УДК 535.854

ОПТИМИЗАЦИЯ СХЕМЫ ГОЛОГРАФИЧЕСКОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПО ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ПОРЯДКАМ ПОЛОС

Писарев В. С., Щепинов В. П., Яковлев В. В.

Рассматривается способ оптимизации схем голографических интерферометров, исходя из нестатистического критерия *С*-оптимальности. Показано, что для реализации ортогональных планов эксперимента, обеспечивающих равноточные измерения компонент вектора перемещений с минимальными погрешностями, необходимо одновременно регистрировать как минимум две голограммы. Приводятся схемы интерферометров с оптимальными свойствами, построенные на основании ортогональных матриц размерности 3×3 и 4×4. Сравнительный анализ оптимальных планов эксперимента и планов, соответствующих одноголограммным схемам, свидетельствует, что в первом случае величина погрешности определения вектора перемещений по крайней мере на порядок меньше.

Способ интерпретации интерференционных картин по относительным порядкам полос для определения перемещений поверхности диффузно отражающих объектов методом голографической интерферометрии, предложенный в работе [1], привлекателен прежде всего тем, что не требует идентификации полосы нулевого порядка. Однако при его практическом применении часто возникает проблема устойчивости процесса измерений и, следовательно, вопрос построения оптимальной схемы интерферометра. В частности, при выборе направлений наблюдения в пределах апертуры одной голограммы рекомендуется формировать переопределенную систему как минимум из шести уравнений [2]. Другой подход к обеспечению устойчивости процедуры определения компонент вектора перемещений заключается в использовании двухголограммной схемы интеферометра и получении с ее помощью переопределенной системы из десяти уравнений [3].

Возможность оптимизации схемы интерферометра, основанную на априорной оценке величины погрешности вектора перемещений, связанной с возмущениями правой части и коэффициентов системы уравнений, предоставляет критерий *С*-оптимальности (минимальности числа обусловленности), использованный ранее авторами для случая известных абсолютных порядков полос [4]. Применение аналогичного подхода для выбора направлений наблюдения в пределах апертуры одной голограммы при интерпретации интерферограмм по относительным порядкам полос позволяет выделять оптические схемы, оптимальные в рамках ограничений, накладываемых на параметры интерферометра [5]. Однако получаемые величины погрешностей существенно превышают вытекающие из теории их минимальные значения. Снятие ограничений на допустимый диапазон изменения направлений наблюдения и использование только диагональной и симметричной матриц плана эксперимента приводит к тривиальной оптической схеме с ортогональными векторами чувствительности, требующей получения трех голограмм [6].

В данной работе на основании критерия *С*-оптимальности рассматривается построение двухголограммных схем интерферометров, обеспечивающих максимальную точность измерения компонент вектора перемещений.

Система линейных алгебраических уравнений для определения вектора перемещений произвольной точки поверхности X при интерпретации интерференционных картин по относительным порядкам полос имеет вид

$$KX = \pm\lambda\delta N, \tag{1}$$

где K — матрица чувствительности размерности $n\times 3$ ($n \geqslant 3$) с элементами, равными проекциям разности единичных векторов наблюдения на координатные оси x_i ($i=1, 2, 3$); $\delta N = \{\delta N_1, \delta N_2, \ldots, \delta N_n\}$ — вектор относительных порядков полос, компоненты которого равны числу полос, «пробежавших» над исследуемой точкой объекта при j-м изменении направления наблюдения от начальной до конечной точки; λ — длина волны света.

Наличие известной apriori матрицы плана эксперимента (K), а также линейная связь между измеряемыми (δN) и искомыми (X) параметрами позволяет для оценки величины погрешности вектора перемещений ΔX воспользоваться соотношением [7]

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \frac{\|K\|\|K^+\|}{\left(1 - \|K\|\|K^+\|\frac{\|\Delta K\|}{\|K\|}\right)}\left(\frac{\|\Delta(\delta N)\|}{\|\delta N\|} + \frac{\|\Delta K\|}{\|K\|}\right), \tag{2}$$

где $\|\cdot\|$ — нормы векторов и матриц, согласованные друг с другом; $\Delta(\delta N)$ и ΔK — погрешности определения вектора δN и матрицы K соответственно; $K^+ = (K^T K)^{-1} K^T$ — обобщенная обратная матрица; $\|K\|\ \|K^+\| = \operatorname{cond} K$ — число обусловленности системы линейных алгебраических уравнений (1).

Оценка точности определения отдельных компонентов вектора перемещений ΔX_i возможна с помощью выражения [8]

$$|\Delta X_i| \leqslant \gamma \sum_{j=1}^{n} |k_{ij}^+|, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где $\gamma = \beta_1 + \beta_2 \sum_{i=1}^{3} |X_i|$; β_1 и β_2 — максимальные элементы вектора $\Delta(\delta N)$ и матрицы ΔK соответственно. Чтобы перейти к более удобным при планировании эксперимента (выборе параметров схемы интерферометра) оценкам величин ΔX_i через число обусловленности системы (1), норму $\|\Delta X\|$ можно выразить следующим образом:

$$\|\Delta X\| = \sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \Delta X_3^2} = |\Delta X_1|\,\|G\|, \tag{4}$$

где G — вектор с компонентами G_i ($i=1, 2, 3$), которые определяют соотношения между величинами ΔX_i, вытекающие из неравенства (3),

$$G_i = \frac{\Delta X_i}{\Delta X_1} = \left(\sum_{j=1}^{n} |k_{ij}^+|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |k_{1j}^+|\right)^{-1}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Комбинация выражений (4), (5) и неравенства (2) позволяет получить требуемые оценки

$$\frac{|\Delta X_i|}{\|X\|} \leqslant \frac{\operatorname{cond} K}{\left(1 - \operatorname{cond} K \frac{\|\Delta K\|}{\|K\|}\right)} \frac{G_i}{\|G\|}\left(\frac{\|\Delta(\delta N)\|}{\|\delta N\|} + \frac{\|\Delta K\|}{\|K\|}\right), \quad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Анализ соотношений (4), (5) и (6) показывает, что погрешности ΔX_i минимальны, когда величина числа обусловленности достигает своего теоретически возможного наименьшего значения для класса матриц K_0, а все компоненты вектора G равны единице

$$\operatorname{cond} K_0 = 1, \quad G_i = 1, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

При этом реализуется случай равноточных измерений компонент перемещений X_i. Условие оптимальности (7) выполняется, например, для матриц K_0, у которых векторы, образованные из столбцов (строк), взаимно ортогональны и имеют одинаковую длину (квазиортогональные матрицы). Если матрица чувствительности интерферометра (матрица плана эксперимента) является квазиортогональной, то величины погрешностей ΔX_i можно оценить, исходя из соотношения

$$\frac{\|\Delta X_i\|}{\|X\|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}\left(1-\frac{\|\Delta K_0\|}{\|K_0\|}\right)}\left(\frac{\|\Delta(\delta N)\|}{\|\delta N\|}+\frac{\|\Delta K_0\|}{\|K_0\|}\right). \tag{8}$$

Для построения оптимальных планов эксперимента, обеспечивающих минимизацию погрешностей компонент вектора перемещений, согласно неравенству (8), необходимо выбрать квазиортогональные матрицы, величина элементов которых соответствует чувствительности реальных голографических интерферометров. В качестве примера можно воспользоваться матрицами T_1, T_2 размерности 3×3

$$T_1 = A_1\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = A_2\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

(матрица T_1 получена из канонической ортогональной) и матрицами размерности 4×3, составленными из любых трех столбцов матриц Q_1 и Q_2 соответственно

$$Q_1 = A_3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_4 = A_4\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

(матрица Q_2 с точностью до множителя A_4 совпадает с матрицей Адамара размерности 4×4). Далее рассматривается задача нахождения параметров оптимальных схем голографических интерферометров на основании указанных матриц.

Знаки элементов строк матрицы чувствительности K

Элементы матрицы K	Векторы чувствительности							
	голограмма H_1				голограмма H_2			
	e_4-e_2	e_2-e_4	e_3-e_1	e_1-e_3	e_8-e_6	e_6-e_8	e_5-e_7	e_7-e_5
k_{j1}	+	−	+	−	−	+	+	−
k_{j2}	+	−	+	−	+	−	−	+
k_{j3}	+	−	−	+	+	−	+	−

Необходимым условием построения планов эксперимента вида (9) и (10) является соответствующее распределение знаков элементов матрицы чувствительности. Два положения фотопластинки относительно начала координат O и восемь точек наблюдения, обеспечивающих все возможные комбинации знаков в строках матрицы чувствительности K, показаны на рис. 1. Для наглядности анализа считается, что фотопластинки перпендикулярны линиям, соединяющим их центры (H_1 и H_2) с началом координат O, которое находится в исследуемой точке поверхности объекта. Линии h_1h_1 и h_2h_2, лежащие в плоскости x_1x_2, делят фотопластинки пополам. Ось x_1 совпадает с нормалью к поверхности в точке O. Расстояния от центров фотопластинок до точек наблюдения на обеих голограммах одинаковы. При указанных условиях, векторы чувствительности ($e_p - e_q$) (p, q=1, 2, 3, 4; $p \neq q$) и ($e_r - e_t$) (r, t=5, 6, 7, 8; $r \neq t$) лежат в плоскостях, параллельных плоскостям фотопластинок H_1 и H_2 соответственно (на рис. 1 они для наглядности условно изображены в плоскостях фотопластинок), а матрица чувствительности интерферометра формируется из строк следующего вида:

$$[k_{j1},\ k_{j2},\ k_{j3}] = \frac{2l}{\sqrt{l^2+R^2}}\,[\pm\cos\alpha_j \sin\gamma_m;\ \pm\cos\alpha_j\cos\gamma_m;\ \pm\sin\alpha_j], \tag{11}$$

$j=1, 2, \ldots, n$ — номер перехода на голограммах; $m=1, 2$ — номер голограммы.

Комбинации знаков элементов k_{ij} и соответствующие им векторы чувствительности представлены в таблице.

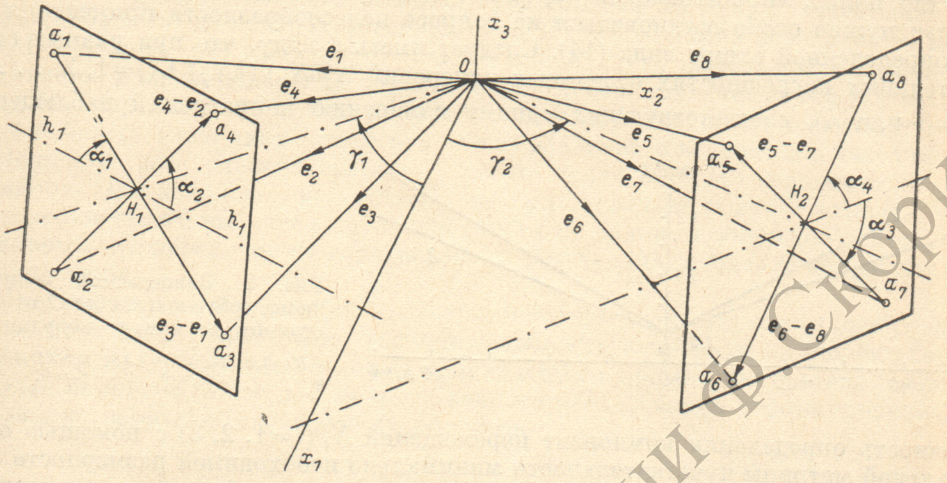

Рис. 1. Схема двухголограммного интерферометра.

e_m ($m=1, 2, \ldots, 8$) — единичные векторы наблюдения, $OH_1=OH_2=R$, $H_1a_j=H_2a_k=l$ ($j=1, 2, 3, 4$; $k=5, 6, 7, 8$).

Можно заметить, что при изменении направления наблюдения в пределах апертуры только одной голограммы получить распределение знаков элементов k_{ij}, совпадающее с распределением знаков планов эксперимента вида (9) и (10), не удается. Использование комбинации переходов на двух голограммах и требование равенства элементов k_{ij}, имеющих вид (11), соответствующим элементам матриц (9) и (10) позволяют определить параметры схем интерферометров, обеспечивающие выполнение соотношений (7) и (8). Значения этих параметров зависят от используемой матрицы плана и выражаются следующим образом:

$$\alpha_1=\alpha_4=0,\quad \alpha_2=90°,\quad \gamma_1=\gamma_2=45°,\quad A_1=\frac{2l}{\sqrt{l^2+R^2}} \tag{12}$$

(векторы чувствительности ($\mathbf{e}_6-\mathbf{e}_8$), ($\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_1$) и ($\mathbf{e}_4-\mathbf{e}_2$)) для матрицы T_1;

$$\alpha_1=0,\quad \alpha_3=\alpha_4=45°,\quad \gamma_1=35.3°,\quad \gamma_2=54.7°,\quad A_2=\frac{2l}{\sqrt{l^2+R^2}} \tag{13}$$

(векторы чувствительности ($\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_1$), ($\mathbf{e}_5-\mathbf{e}_7$) и ($\mathbf{e}_6-\mathbf{e}_8$)) для матрицы T_2;

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=35.3°,\quad \gamma_1=\gamma_2=45°,\quad A_3=A_4=\frac{2\sqrt{3}\,l}{3\sqrt{l^2+R^2}} \tag{14}$$

(векторы чувствительности соответствующие первым трем столбцам матрицы Q_1: ($\mathbf{e}_4-\mathbf{e}_2$), ($\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_1$), ($\mathbf{e}_5-\mathbf{e}_7$) и ($\mathbf{e}_8-\mathbf{e}_6$)) для матриц размерности 4×3, полученных из матриц Q_1 или Q_2.

Таким образом, двухголограммные схемы интерферометров, параметры которых удовлетворяют соотношениям (12), (13) и (14) соответственно, обеспечивают равноточные измерения компонент вектора перемещений исследуемой точки поверхности X_i ($i=1, 2, 3$) с максимальной точностью, допускаемой величинами погрешностей Δ (δN) и ΔK, согласно неравенству (8).

Нужно отметить, что во всех полученных схемах угол между линиями, соединяющими точку O с центрами фотопластинок (угол H_1OH_2), равен 90°, хотя план эксперимента на основании матрицы T_2 приводит к несимметричному расположению голограмм относительно оси x_1. Выбор конкретной оптимальной схемы, направления освещения и расстояния от центров фотопластинок до начала координат в условиях реального эксперимента обычно диктуется желанием уменьшить величину погрешности вектора правой части системы уравнений (1). Здесь уже определяющим условием в большинстве случаев будет количество полос, «пробегающих» через исследуемую точку поверхности. В этой связи нужно особо остановиться на вопросе целесообразности применения переопределенной схемы вида (14). Следует иметь в виду, что при равных относительных погрешностях отдельных измерений $\Delta(\delta N_j)(\delta N_j)^{-1}$ ($j=1, 2, \ldots, n$; $n=3$ или 4), соответствующих одному изменению направлений наблюдения,

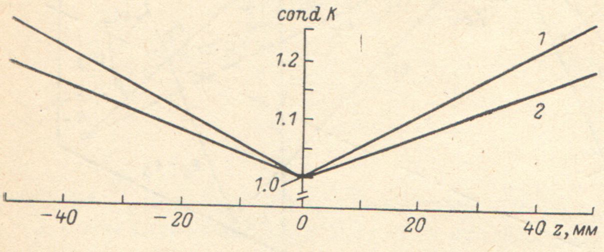

Рис. 2. Зависимости величины числа обусловленности от расстояния до начала координат z. $R=0.3$ м, $2l=0.11$ м. 1 — точки $x_3=0$, 2 — $x_2=0$.

точность определения компонент перемещений X_i ($i=1, 2, 3$) с помощью оптимальной матрицы чувствительности минимально необходимой размерности 3×3 (соотношения (12) и (13)) и переопределенной оптимальной матрицы размерности 4×3 (соотношения (14)) будет одинакова. Этот факт особенно важен, учитывая значительную трудоемкость метода относительных порядков полос.

Чтобы полнее представить эффективность использования оптимального планирования эксперимента, полезно оценить степень снижения погрешностей, которую обеспечивает использование двухголограммной схемы по сравнению с одноголограммной. В первую очередь необходимо обратить внимание на возможность возникновения самой неблагоприятной, с точки зрения получаемых результатов, ситуации. Для этого, например, в схеме интерферометра, описываемой параметрами (12), можно оставить только голограмму H_2 под углом $\gamma_2=54.7°$, к оси x_1 и перенести на нее переход, определяемый углом $\alpha_1=0$, с голограммы H_1. Эта операция эквивалентна замене первой строки матрицы T_2 на строку вида ($\mp\sqrt{6}/3$; $\pm\sqrt{3}/3$; 0). Нетрудно убедиться, что построенная таким образом матрица является сингулярной (т. е. cond $K\to\infty$), и, следовательно, измерения с помощью подобного интерферометра не имеют смысла. Более того, соотношение cond $K\to\infty$ справедливо для рассмотренных в примере переходов на одной голограмме при любых значениях угла γ_2 от 0 до 90°. Этот факт объясняет часто наблюдаемую на практике неустойчивость процедуры измерения компонент вектора перемещений по относительным порядкам полос с помощью одноголограммных интерферометров, которая, кроме того, обычно усугубляется большой величиной относительной погрешности определения вектора правой части системы уравнений (1).

Представление о максимальных возможностях одноголограммного интерферометра позволяют составить результаты оптимизации оптической схемы, полученные с помощью численного моделирования на ЭВМ. Расчеты, проведенные для фотопластинки размерами 0.16×0.1 м, расположенной на расстоянии 0.3 м от исследуемой точки, показали, что минимальная величина числа обусловленности матрицы чувствительности равна пятнадцати [5]. Поэтому, даже принимая во внимание, что величина числа обусловленности описывает возможную максимальную границу погрешности, можно утверждать, что двухголограммные оптимальные схемы обеспечивают увеличение точности определения компонент вектора перемещений по крайней мере на порядок.

Особо следует рассмотреть степень отклонения полученных планов эксперимента от C-оптимальных (cond $K_0=1$) при исследовании протяженных объектов, возникающую вследствие того, что используя одни и те же точки наблюдения на голограмме, в методе относительных порядков полос принципиально невозможно получить матрицу чувствительности, постоянную для всей рассматриваемой поверхности. Результаты расчетов, выполненных с помощью специально разработанной программы на ЭВМ серии ЕС, показывают, что при удалении от начала координат O в плоскости x_2x_3 по любому направлению числа обусловленности возрастают практически линейно для всех рассмотренных схем. Зависимости величины cond K от расстояния z до точки O на плоской поверхности для оптимальной схемы с параметрами (12) представлены на рис. 2. Расстояние от начала координат до центров фотопластинок $R=0.3$ м, длина переходов — $2l=0.11$ м. Видно, что удаление от точки O вдоль оси x_3 (зависимость 2) меньше сказывается на величине числа обусловленности, чем удаление по оси x_2 (зависимость 1). В пределах диапазона $z=\pm 50$ мм значения cond K отличаются от единицы не более чем на одну четверть, т. е. по сравнению с величинами чисел обусловленности для одноголограммной схемы (cond $K\sim 10$) практически не меняются. При использовании оптимальных схем следует также учитывать, что отклонения величины числа обусловленности от единицы уменьшаются с увеличением длин переходов на голограммах и расстояния от начала координат до фотопластинок.

Представленные в работе двухголограммные оптимальные схемы интерферометров позволяют существенно увеличить точность измерения компонент перемещений и могут служить основой практического применения метода относительных порядков полос для количественного исследования деформированного состояния диффузно отражающих объектов.

Литература

[1] Александров Е. Б., Бонч-Бруевич А. М. — ЖТФ, 1967, т. 37, с. 360.
[2] Kohler H. — Optik, 1974, Bd 39, S. 229.
[3] King P. W., III. — Appl. Opt., 1974, v. 13, p. 231.
[4] Писарев В. С., Яковлев В. В., Щепинов В. П., Индисов В. О. — ЖТФ, 1981, т. 51, с. 869.
[5] Wenke L., Schreiber W., Erler K. — Feingerätetechnik, 1980, Bd 29, S. 413.
[6] Erler K., Wenke L., Schreiber W. — Feingerätetechnik, 1980, Bd 29, S. 510.
[7] Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М., 1977.
[8] Day J. D. — Int. J. Mathematical Education in Science and Technology, 1978, v. 9, p. 89.

Поступило в Редакцию 8 сентября 1982 г.