Таким образом, в данной работе были получены точные решения двумерного квазипотенциального уравнения Логунова-Тавхелидзе, описывающего связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы для релятивистского обобщения потенциала гармонического осциллятора.

## Литература

1. Бабиков, В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике / В. В. Бабиков. – Москва : Наука, 1976. – 285с.

2. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Санкт-Петербург : Лань, 2003. – 576 с.

3. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям с формулами графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – Москва : Наука, 1979. – 830 с.

**А. В. Павленко**
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В. Н. Капшай**, канд. физ.-мат. наук, доцент

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА-ТАВХЕЛИДЗЕ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЮКАВЫ

Описывающее связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы $m$ уравнение Логунова-Тавхелидзе в двумерном импульсном представлении имеет следующий вид:

$$(E^2 - m^2 - \mathbf{p}^2)\,\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})\frac{m}{E_k}\,d^2\mathbf{k},\ E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (1)$$

где $0 < 2E < 2m$ – энергия двухчастичной системы, $\mathbf{p}$ – двумерный относительный импульс в системе центра масс, $\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция, $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ – потенциал.

В полярных координатах представим искомую волновую функцию $\psi(\mathbf{p})$ и потенциал $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ в форме [1]

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\psi_\mu(p)\exp(i\mu\varphi), \quad V(\mathbf{p},\mathbf{k}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}V_\mu(p,k)\exp(i\mu\gamma), \quad (2)$$

где $\psi_\mu(p)$ – парциальная волновая функция, $V_\mu\left(p,k\right)$ – парциальный потенциал, $p=|\mathbf{p}|$, $\varphi$ – угол в полярной системе координат, $\gamma$ – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Подстановка рядов (2) в (1) приводит к интегральному уравнению для парциальной волновой функции

$$(E^2-m^2-p^2)\psi_\mu(p)=\frac{\sqrt{p}}{2\pi}\int_0^\infty\sqrt{k}V_\mu\left(p,k\right)\frac{m}{E_k}\psi_\mu(k)dk\,. \tag{3}$$

Парциальный потенциал в импульсном представлении связан с двумерным центрально-симметричным потенциалом в координатном представлении $V(\rho)$ следующим интегральным соотношением:

$$V_\mu\left(p,k\right)=2\pi\int_0^\infty\rho J_\mu\left(p\rho\right)V(\rho)J_\mu\left(k\rho\right)d\rho\,, \tag{4}$$

где $J_\mu\left(z\right)$ – функция Бесселя [2], $\rho\geq 0$ – модуль радиус-вектора.

В данной работе мы рассматриваем потенциал Юкавы

$$V(\rho)=-\lambda\frac{\exp(-a\rho)}{\rho}, \tag{5}$$

где $\lambda>0$, $a>0$ – константы. Подставив (5) в (4) и проинтегрировав, получим следующее выражение для парциального потенциала в импульсном представлении

$$V_\mu\left(p,k\right)=-\lambda\frac{2}{\sqrt{pk}}Q_{\mu-1/2}\left(\frac{p^2+k^2+a^2}{2pk}\right), \tag{6}$$

где $Q_l\left(z\right)$ – функция Лежандра второго рода [2]. Подставив (6) в уравнение (3) и заменив интеграл суммой по квадратурной формуле прямоугольников [3], мы приводим интегральное уравнение к системе однородных линейных алгебраических уравнений

$$K\psi=E^2\psi\,, \tag{7}$$

где $K$ – основная матрица системы уравнений, $\psi$ – вектор, компоненты которого являются значениями волновой функции в узловых точках квадратурной формулы. Таким образом, задача о нахождении энергий и волновых функций связанных состояний для интегрального уравнения сведена к задаче на собственные значения и собственные векторы системы алгебраических уравнений (7). На рисунке 1 приведены графики зависимостей энергии $2E$ двухчастичной системы от параметра $\lambda$ для первых трех состояний. Вычисления проведены при $m = 1$, $a = 0{,}1$.

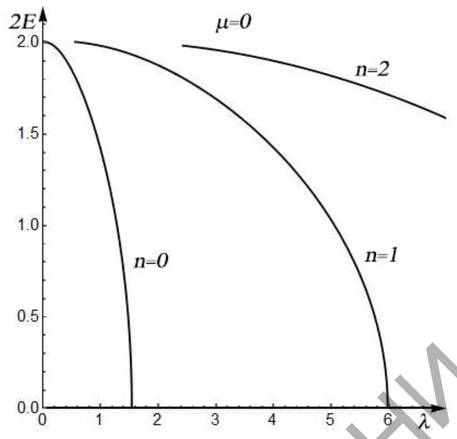


Рисунок 1 – Условия квантования энергии двухчастичной системы

Волновые функции первых двух состояний, вычисленные для $\lambda = 1$, приведены на рисунке 2.

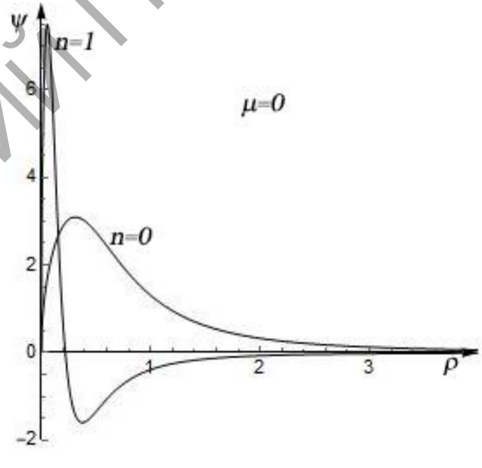


Рисунок 2 – Волновые функции

При построении графиков для нормировки парциальных волновых функций было использовано выражение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\psi_{\mu}^{2}(p)\,dp=1. \qquad (8)$$

Таким образом, в данной работе были получены численные решения двумерного уравнения Логунова-Тавхелидзе, описывающего связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы для двумерного потенциала Юкавы.

**Литература**


1. Бабиков, В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике / В. В. Бабиков. – Москва : Наука, 1976. – 285 с.
2. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям с формулами графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – Москва : Наука, 1979. – 830 с.
3. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 2011. – 512 с.



**М. А. Петруша**
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В. В. Андреев**, д-р физ.-мат. наук, профессор


## РАЗРАБОТКА СОВРЕМЕННЫХ WEB-ПРИЛОЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОСЕТЕЙ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

С появлением искусственного интеллекта у разработчиков появилось огромное количество возможностей для создания более сложных и интерактивных веб-приложений. В данной работе мы рассмотрим основные API которые каждый разработчик может использовать при работе над своими проектами.

В настоящее время одной из передовых компаний, занимающихся развитием искусственного интеллекта, является OpenAi. Компания была основана в 2015 году Илоном Маском, Сэмом Альтманом и Грегом Брокманом. Миссия OpenAI заключается в создании технологий ИИ, которые будут безопасными, полезными и соответствующими человеческим ценностям. Компания внесла значительный вклад в область ИИ благодаря своим исследованиям, которые включают разработку передовых алгоритмов машинного обучения, технологий обработки естественного языка и робототехнических систем. OpenAI также