УДК 535.2

К ЛУЧЕВОМУ МЕТОДУ В ТЕОРИИ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ. II

Бойцов В. Ф.

Рассмотрено движение амплитудного центра гауссова пучка в квадратичной среде с комплексной неоднородностью. Показано, что в среде с вещественной неоднородностью линия амплитудного центра, подчиняясь принципу Ферма, ведет себя как луч и ее можно рассчитывать с помощью лучевой матрицы. В среде с мнимой неоднородностью линия амплитудного центра— кривая. В среде с комплексной неоднородностью линия амплитудного центра пучка не ортогональна фазовым фронтам. Рассмотрено поведение амплитудных центров резонаторных волн в линейных и кольцевых оптических резонаторах.

Закономерности движения амплитудного центра гауссова пучка в квадратичной среде и в оптическом резонаторе представляют интерес как для теории, так и для практических приложений. Изменение параметров пучка можно описывать лучевой матрицей [1, 2]. В данной работе исследованы свойства амплитудного центра гауссова пучка при его распространении в квадратичной среде с комплексной неоднородностью и в резонаторе, заполненном такой средой.

Движение амплитудного центра гауссова пучка в квадратичной среде

Основной функционал геометрической оптики

$$T = \int \sqrt{1 + (x_z')^2}\, n(x)\, dz$$

в параксиальном приближении для квадратичной среды с показателем преломления

$$n(x) = n_0 - n_2 x^2 \tag{1}$$

запишется следующим образом:

$$T = \int \left[n_0 - n_2 x^2 + \frac{n_0}{2} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right] dz. \tag{2}$$

Согласно принципу Ферма, его экстремум определяет в выбранном приближении движение луча. Уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала (2) совпадает с уравнением осциллятора

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \varepsilon_0 x = 0, \quad \varepsilon_0^2 = \frac{2n_2}{n_0}. \tag{3}$$

Подставляя решение уравнения (3) с учетом граничных условий в (2) и проводя интегрирование между точками начала луча $(x_1, 0)$ и его конца (x_2, z), находим оптическую длину пути луча (эйконал)

$$S(x_1, x_2) = S_0 + \frac{n_0 \varepsilon}{2} \left[\frac{x_1^2 + x_2^2}{\operatorname{tg} \varepsilon_0 z} - \frac{2 x_1 x_2}{\sin \varepsilon_0 z} \right], \quad S_0 = n_0 z. \tag{4}$$

Рассмотрим гауссов пучок в сечении (x, z)

$$\varphi(x,\ z) = \exp\left\{-ik\left[P(z) + \frac{1}{2}Q(z)x^2 + S(z)x\right]\right\}, \tag{5}$$

где k — волновое число. Покажем, что амплитудный центр пучка [3]

$$d_a(z) = -\operatorname{Im} S(z)\,[\operatorname{Im} Q(z)]^{-1} \tag{6}$$

подчиняется уравнению (3). С помощью формул (1)—(4) и матрицы $ABCD$

$$\begin{pmatrix} \cos\varepsilon_0 z, & (2n_0n_2)^{-1/2}\sin\varepsilon_0 z \\ -(2n_0n_2)^{1/2}\sin\varepsilon_0 z, & \cos\varepsilon_0 z \end{pmatrix}, \tag{7}$$

которая описывает прохождение луча через квадратичную среду длиной z [4], после несложных вычислений находим

$$d_a(z) = d_a\cos\varepsilon_0 z + (\varepsilon_0 n_0)^{-1}\alpha\sin\varepsilon_0 z,\qquad \alpha(z) = \operatorname{Re} S(z) + d_a(z)\operatorname{Re} Q(z), \tag{8}$$

где $d_a = d_a(0)$, $Q = Q(0)$, $S = S(0)$, $\alpha = \alpha(0)$. $\alpha(z)$ — угол между осью z и касательной к линии амплитудного центра пучка в сечении z. Подставляя $d_a(z)$ в уравнение (3), убеждаемся, что оно выполняется тождественно. Таким образом, амплитудный центр пучка движется по экстремали подобно лучу. Этот результат можно получить также непосредственно, используя лучевую матрицу (7).

Если в соотношении (1) в [1] матрица $ABCD$ имеет вид (7), то координата x_2 луча определяется формулой

$$x_2 = x_1\cos\varepsilon_0 z + (\varepsilon_0 n_0)^{-1}\alpha_1\sin\varepsilon_0 z. \tag{9}$$

Видно, что это выражение полностью согласуется с (8).

Установим, как движется амплитудный центр пучка в квадратичной среде с мнимой неоднородностью, для которой величина ε_0^2 равна $i\varepsilon$, где ε — вещественно. Ограничиваясь первым порядком по малой величине $\varepsilon_1 = \varepsilon\,[\operatorname{Im} Q]^{-1}$ и кубом по переменной z, с помощью (1)—(4) и (7) находим

$$d_a(z) = d_a + z(\alpha + \varepsilon_1 d_a) + \frac{1}{2}z^2\alpha\varepsilon_1 + \frac{2}{3}z^3\varepsilon_1 F,$$

$$F = \operatorname{Re} S\operatorname{Re} Q\,[\operatorname{Im} Q]^{-1} + \operatorname{Im} S\left[1 - \frac{1}{4}(\operatorname{Re} Q\,[\operatorname{Im} Q]^{-1})^2\right].$$

Видно, что траектория движения амплитудного центра — кривая линия. В квадратичном по z приближении матрица $ABCD$ (1) в [1], связывающая $d_a(z)$ и $\alpha(z)$ с d_a и α, состоит из элементов $A = D = 1 + z\varepsilon_1$, $B = z(1 + z\varepsilon_1/2)$, $C = \varepsilon_1$.

Комплексный эйконал

Пусть величина ε_0^2, определенная в формулах (3), комплексная. Это соответствует среде, которая обладает одновременно пространственной неоднородностью показателя преломления ($\operatorname{Re}\varepsilon_0^2$) и коэффициента усиления или поглощения ($\operatorname{Im}\varepsilon_0^2$). Подставляя комплексную величину ε_0^2 в уравнения (3) и (4), получим уравнение осциллятора с комплексной частотой и комплексный эйконал.

Выясним физический смысл комплексного эйконала. Для этого рассчитаем с его помощью, используя формально принцип Гюйгенса—Френеля, параметр $Q(z)$ гауссова пучка по начальному параметру Q. Пусть $n_0 = 1$, тогда на основании (4) находим

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-ik\left[\frac{1}{2}x_1^2 Q + \varepsilon_0\left(\frac{x_1^2 + x^2}{\operatorname{tg}\varepsilon_0 z} - \frac{2x_1 x}{\sin\varepsilon_0 z}\right)\right]\right\}dx_1.$$

С точностью до несущественного множителя

$$I=\exp\left\{-\frac{ik}{2}\varepsilon_0 x^2\frac{-\varepsilon_0\sin\varepsilon_0 z+Q\cos\varepsilon_0 z}{\varepsilon_0\cos\varepsilon_0 z+Q\sin\varepsilon_0 z}\right\}=\exp\left\{-\frac{ik}{2}x^2Q(z)\right\}.$$

Легко видеть, что полученная функция $Q(z)$ совпадает с функцией $Q(z)$, которую можно определить с помощью (4) из [1] и (7).

Таким образом, комплексный эйконал, полученный формально из принципа Ферма для квадратичной среды с комплексным показателем преломления, описывает распространение гауссова пучка в квадратичной среде с комплексным показателем преломления. Отсюда, в частности, следует, что резонатор с квадратичной средой, имеющей комплексную неоднородность, можно рассчитывать как резонатор с квадратичной средой и вещественной неоднородностью при последующей замене в полученных результатах вещественного показателя преломления на комплексный. Нужно указать, что этот результат можно доказать также, если воспользоваться связью метода интегральных уравнений с лучевыми матрицами, которая особенно наглядно выявлена в [1, 2].

Неортогональность линии амплитудного центра пучка фазовому фронту в квадратичной среде с комплексной неоднородностью

Пусть (x_0, z_0) — точка, в которой линия амплитудного центра пересекает одну из фазовых поверхностей. Очевидно $x_0=d_a(z_0)$ и тангенс угла $\alpha(z_0)$ наклона касательной к линии амплитудного центра в этой точке равен $d'_a(z_0)$. Для малых угловых разъюстировок пучка $\operatorname{tg}\alpha(z_0)\approx\alpha(z_0)$. Уравнение фазовой поверхности, проходящей через данную точку, в квадратичном приближении имеет вид

$$z_p-z=\frac{(x-d_a(z_p))^2}{2R(z_p)}. \tag{10}$$

Здесь $d_p(z)=-\operatorname{Re}S(z)[\operatorname{Re}Q(z)]^{-1}$ — смещение центра кривизны фазового фронта пучка (5) от оси z, $(d_p(z_p), z_p)$ — координата «вершины», а $R(z_p)$ — радиус кривизны рассматриваемой поверхности. Тангенс угла $\varphi_p(z_0)$ наклона касательной к фазовому фронту в точке (x_0, z_0) найдем, дифференцируя соотношение (10) по z и полагая затем $z=z_0$. После проведения этих операций получим

$$-R(z_p)=(d_a(z_0)-d_p(z_p))\operatorname{tg}\varphi_p(z_0), \tag{11}$$

где учтено, что $x(z_0)=d_a(z_0)$ и $x'(z_0)=\operatorname{tg}\varphi_p(z_0)$. Нормаль к фазовой поверхности (волновая нормаль) в точке (x_0, z_0) образует с осью z угол $\alpha_p(z_0)=\varphi_p(z_0)-\pi/2$. В линейном по разъюстировке пучка приближении величину z_p из уравнения (11) можно принять равной z_0. Опуская аргумент z_0 у функций и учитывая малость углов α и α_p, получаем для их разности формулу

$$\Delta\alpha=\alpha-\alpha_p=d'_a-(d_a-d_p)/R. \tag{12}$$

Выразим правую часть этого соотношения через параметры среды, в которой комплексное волновое число подчиняется закону

$$k(x)=k_0-\frac{1}{2}k_1x-\frac{1}{2}k_2x^2. \tag{13}$$

В такой среде параметры $Q(z)$ и $S(z)$ пучка (5) удовлетворяют уравнениям [1-3]

$$Q^2(z)+Q'(z)+k_2=0,\quad 2Q(z)S(z)+2S'(z)+k_1=0. \tag{14}$$

С их помощью находим

$$d'_a(z)=-\left(\frac{\operatorname{Im}S(z)}{\operatorname{Im}Q(z)}\right)'\approx\operatorname{Re}Q(z)(d_a(z)-d_p(z))+$$

$$+[\operatorname{Im}Q(z)]^{-2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Im}k_1\operatorname{Im}Q(z)-\operatorname{Im}k_2\operatorname{Im}S(z)\right). \tag{15}$$

Здесь отброшены малые члены, пропорциональные k_0^{-2}. Подставляя это выражение в формулу (12), с учетом того, что $R=[\mathrm{Re}\,Q]^{-1}$, получим вместо (12)

$$\Delta\alpha=[\mathrm{Im}\,Q]^{-2}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,k_1\,\mathrm{Im}\,Q-\mathrm{Im}\,k_2\,\mathrm{Im}\,S\right). \tag{16}$$

Итак, угол между линией амплитудного центра гауссова пучка и волновой нормалью зависит от мнимых частей k_1 и k_2 волнового числа k, а также от мнимых частей параметров Q и S пучка. Если $\mathrm{Im}\,k_1=-k_0\,\mathrm{Im}\,S=10$ см$^{-1}$, $\mathrm{Im}\,k_2=-k_0\,\mathrm{Im}\,Q=10^2$ см$^{-2}$, то $\Delta\alpha=-5\cdot10^{-2}$.

Линия амплитудного центра пучка ортогональна фазовым поверхностям, когда

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,k_1\,\mathrm{Im}\,Q-\mathrm{Im}\,k_2\,\mathrm{Im}\,S=0. \tag{17}$$

Это равенство имеет место в любой точке z, если одновременно $\mathrm{Im}\,k_1$ и $\mathrm{Im}\,k_2$ равны нулю, т. е. неоднородность среды чисто вещественная. В случае, когда $\mathrm{Im}\,k_2\neq0$, уравнение (17) можно представить следующим образом: $d_a=-2\,\mathrm{Im}\,k_1\,[\mathrm{Im}\,k_2]^{-1}$. Видно, что фазовые поверхности ортогональны линии амплитудного центра пучка, когда он идет вдоль оси симметрии среды, а также в точках пересечения с ней, где $\mathrm{Im}\,k_1=0$ и $\mathrm{Im}\,S=0$ одновременно.

Амплитудные центры мод в резонаторе с квадратичной средой

Пусть кольцевой резонатор полностью или частично заполнен квадратичной средой с вещественной неоднородностью. Как было показано, амплитудный центр гауссова пучка является экстремалью и ведет себя как луч, поэтому амплитудный центр резонаторной гауссовой моды совпадает с осевым лучом или осевым контуром. Если с таким лучом связать систему координат, то параметры $Q^{(+)}$ и $Q^{(-)}$ резонаторных мод встречных волн совпадают, а $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ будут равны нулю. Это выражает хорошо известное свойство резонатора с вещественной средой: пространственные распределения полей встречных волн в нем совпадают. При этом не имеет значения, как расположена среда относительно осевого контура пустого резонатора.

Рассмотрим теперь резонатор с квадратичной средой, имеющей мнимую неоднородность. Если ось симметрии среды лежит на осевом контуре пустого резонатора, то параметры гауссовых мод встречных волн $Q^{(+)}\neq Q^{(-)}$, $S^{(+)}=S^{(-)}=0$ и распределения полей встречных волн различны. Однако амплитудные центры встречных пучков совпадают друг с другом [5]. Смещение оси среды от осевого контура резонатора (разъюстировка) приводит к тому, что параметры резонаторных волн $Q^{(+)}\neq Q^{(-)}$ и $S^{(+)}\neq S^{(-)}$. Важно, что величина $d_a^{(+)}=-\mathrm{Im}\,S^{(+)}[\mathrm{Im}\,Q^{(+)}]^{-1}$ не равна $d_a^{(-)}=-\mathrm{Im}\,S^{(-)}[\mathrm{Im}\,Q^{(-)}]^{-1}$. Таким образом, разъюстировка среды с комплексной неоднородностью приводит к несовпадению амплитудных центров волн встречных направлений в резонаторе.

Продемонстрируем это свойство на примере кольцевого резонатора из трех плоских зеркал с разъюстированной гауссовой диафрагмой, центр которой сдвинут на x_0 от осевого контура резонатора (ср. с (1)—(6)). В таком резонаторе в низшем порядке по N [6] $\mathrm{Im}\,Q^{(\pm)}=-\sqrt{N}$, $\mathrm{Im}\,S^{(\pm)}=\mp Nx_0$ для всех z. Отсюда находим $d_a^{(+)}=-d_a^{(-)}=\sqrt{N}\,x_0$ и амплитудные центры гауссовых мод встречных волн разнесены друг от друга на расстояние $2\sqrt{N}x_0$, не зависящее от z. Несовпадение амплитудных центров встречных волн должно приводить к циркуляции энергии полей этих волн по несовпадающим траекториям, проходящим разные объемы среды.

Разобранные свойства полей кольцевого резонатора имеют свои аналоги в линейном резонаторе. Так если среда, заполняющая резонатор, имеет вещественную неоднородность, то линии амплитудных центров резонаторных мод встречных волн совпадают между собой и с оптической осью. При этом в системе координат, связанной с ней, $Q^{(+)}=Q^{(-)}$, $S^{(+)}=S^{(-)}=0$. Для резонатора с разъюстированной средой с мнимой неоднородностью $Q^{(+)}\neq Q^{(-)}$, $S^{(+)}\neq S^{(-)}$, и линии амплитудных центров встречных волн не совпадают [7].

В качестве примера рассмотрим резонатор из двух плоских параллельных полностью отражающих зеркал, на которых расположены гауссовы диафрагмы с центрами, сдвинутыми относительно друг друга на расстояние $2x_0$. В таком резонаторе линии амплитудных центров резонаторных волн встречных направлений параллельны, находятся на расстоянии $2\sqrt{N}x_0$ одна от другой и в низшем порядке по малому параметру N ортогональны зеркалам.

Автор благодарен Ю. А. Ананьеву за полезные обсуждения и ценные критические замечания и Н. И. Калитеевскому за внимание к работе и постоянную поддержку при ее выполнении.

Литература

[1] Ананьев Ю. А. — Опт. и спектр., 1983, т. 54, в. 4, с. 765.
[2] Ананьев Ю. А. — Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения. М., 1979.
[3] Casperson L. W. — Appl. Opt., 1973, v. 12, p. 2434.
[4] Kogelnik H., Li T. — Proc. IEEE, 1966, v. 54, p. 1312.
[5] Бойцов В. Ф. — Опт. и спектр., 1977, т. 43, в. 4, с. 734.
[6] Бойцов В. Ф., Гусева Т. В. — Опт. и спектр., 1975, т. 32, в. 6, с. 1038.
[7] Бекшаев А. Я., Гримблатов В. М. — Квант. электрон., 1980, т. 7, с. 1168.

Поступило в Редакцию 6 марта 1984 г.