



# ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

Посвящается академику Б. В. Бокутю



Гомель  
2018

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»

Государственное научное учреждение  
«Институт физики имени Б. И. Степанова»  
Национальной академии наук Беларуси

Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований

## **ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ**

V Международная научная конференция

**Посвящается академику Б. В. Бокутю**

(Гомель, 14–16 ноября 2018 года)

Материалы

В двух частях

Электронное научное издание

Гомель  
ГГУ им. Ф.Скорины  
2018

**ISBN 978-985-577-475-5**

**ISBN 978-985-577-476-2 (Ч. 1)**

**ISBN 978-985-577-477-9 (Ч. 2)**

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный  
университет имени Франциска  
Скорины», 2018

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»

Государственное научное учреждение  
«Институт физики имени Б. И. Степанова»  
Национальной академии наук Беларуси

Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований

## **ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ**

V Международная научная конференция

Посвящается академику **Б. В. Бокутю**

(Гомель, 14–16 ноября 2018 года)

Материалы

В двух частях

Часть 1

Электронное научное издание

Гомель  
ГГУ им. Ф. Скорины  
2018

**ISBN 978-985-577-475-5**  
**ISBN 978-985-577-476-2 (Ч. 1)**

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный  
университет имени Франциска  
Скорины», 2018

УДК 538.97

**Проблемы взаимодействия излучения с веществом** [Электронный ресурс] : V Международная научная конференция, посвящ. акад. Б. В. Бокутю (Гомель, 14–16 ноября 2018 г.) : материалы : в 2 ч. Ч. 1. – Электронные тестовые данные (10,6 МБ). – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2018. – Системные требования: IE от 11 версии и выше или любой актуальный браузер, скорость доступа от 56 кбит. – Режим доступа: [http:// conference.gsu.by](http://conference.gsu.by). – Заглавие с экрана.

В сборнике, состоящем из двух частей, помещены материалы докладов V Международной научной конференции, посвященной академику Б. В. Бокутю, по следующим направлениям: нелинейная оптика, оптическая гиротропия, упругие волны, фотоакустика, акустооптика, электрослабые свойства микрочастиц, электродинамические и адронные процессы взаимодействия, гравитация, физика лазеров и лазерные технологии, ионно-лучевые и плазменные технологии, формирование структуры и свойства покрытий, инструменты и методы автоматизации научных исследований, моделирование систем и процессов, моделирование и обработка изображений, стратегия формирования образовательно-научной инфосреды.

В первой части содержатся материалы по секциям: «Оптика, акустика кристаллов и анизотропных структур», «Теория фундаментальных взаимодействий».

Адресуется научным работникам, аспирантам, магистрантам, студентам.

Материалы публикуются в соответствии с оригиналом, подготовленным редакционной коллегией, при участии издательства.

**Редакционная коллегия:**

Д. Л. Коваленко (главный редактор), А. Н. Сердюков,  
Н. В. Максименко, А. В. Рогачев, О. М. Дерюжкова, В. Е. Гайшун,  
А. Н. Годлевская, В. В. Андреев, В. Д. Левчук,  
В. Н. Мышковец, Е. Б. Шершнев

УО «ГГУ им. Ф. Скорины»  
246019, Гомель, ул. Советская, 104,  
тел. (232) 57-16-73, 57-75-20  
<http://www.gsu.by>

© Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», 2018



**Борис Васильевич Бокуть**  
(27.10.1926 – 15.03.1993)

**V Международная научная конференция**  
**ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ**  
**С ВЕЩЕСТВОМ**

**(Посвящается академику Б.В. Бокутю)**

**14–16 ноября 2018 г.**

**Гомель, Беларусь**

Конференция посвящена Б.В. Бокутю – выдающемуся белорусскому физику и организатору науки, академику АН БССР, ректору Гомельского государственного университета (1973–1989 годы), лауреату Государственной премии СССР, автору более 200 научных работ, в том числе 3 монографий и 20 изобретений. Конференция работает по направлениям, в развитие которых Б.В. Бокуть внес существенный вклад: нелинейная оптика, кристаллооптика, акустооптика, физика лазеров, теория электромагнетизма, лазерные технологии.

## **ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ**

1. Хахомов Сергей Анатольевич д.ф.-м.н., доцент (председатель)
2. Сердюков Анатолий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН Беларуси (зам. председателя)
3. Апанасевич Павел Андреевич, д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Беларуси
4. Афанасьев Анатолий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН Беларуси
5. Белый Владимир Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН Беларуси
6. Воропай Евгений Семенович, д.ф.-м.н., профессор
7. Гапоненко Сергей Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Беларуси
8. Гончаренко Андрей Маркович, д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Беларуси
9. Достанко Анатолий Павлович, д.т.н., профессор, академик НАН Беларуси
10. Казак Николай Станиславович, д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Беларуси
11. Константинова Алиса Федоровна, д.ф.-м.н., профессор (Россия)
12. Максименко Николай Васильевич, д.ф.-м.н., профессор
13. Митюрин Георгий Семенович, д.ф.-м.н., профессор
14. Мышкин Николай Константинович, д.т.н., профессор, академик НАН Беларуси
15. Орлович Валентин Антонович, д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Беларуси
16. Редько Всеволод Петрович, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН Беларуси
17. Рогачев Александр Владимирович, д.х.н., профессор, член-корреспондент НАН Беларуси
18. Сихвола Ари, доктор, профессор (Финляндия)
19. Стренк Веслав, доктор хабилитационный, профессор (Польша)
20. Третьяков Сергей Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, (Финляндия)

## **ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ**

1. Семченко Игорь Валентинович, проректор по учебной работе (председатель)
2. Демиденко Олег Михайлович, проректор по научной работе (зам. председателя)
3. Никитюк Юрий Валерьевич, проректор по воспитательной работе (зам. председателя)

4. Коваленко Дмитрий Леонидович, декан факультета физики и информационных технологий (зам. председателя)
5. Дерюжкова Оксана Михайловна, заместитель декана факультета физики и информационных технологий по научной работе (ученый секретарь)
6. Самофалов Андрей Леонидович, заместитель декана факультета физики и информационных технологий (секретарь)
7. Андреев Виктор Васильевич, профессор кафедры теоретической физики
8. Гайшун Владимир Евгеньевич, заведующий кафедрой оптики
9. Левчук Виктор Дмитриевич, заведующий кафедрой АСОИ
10. Мышковец Виктор Николаевич, заведующий кафедрой радиоп физики и электроники
11. Шершнев Евгений Борисович, заведующий кафедрой общей физики

## СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

### 1. «Оптика, акустика кристаллов и анизотропных структур»

Председатели: Гиргель Сергей Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор  
Шепелевич Василий Васильевич, д.ф.-м.н., профессор

### 2. «Теория фундаментальных взаимодействий»

Председатели: Тимошин Сергей Иванович, д.ф.-м.н., профессор  
Максименко Николай Васильевич, д.ф.-м.н., профессор

### 3. «Новые материалы и технологии»

Председатели: Рогачев Александр Владимирович, член-корр. НАН  
Беларуси, д.х.н., профессор  
Воропай Евгений Семенович, д.ф.-м.н., профессор

### 4. «Автоматизация научных исследований»

Председатели: Демиденко Олег Михайлович, д.т.н., профессор  
Левчук Виктор Дмитриевич, к.т.н., доцент

## РЕГЛАМЕНТ

Доклады на пленарном заседании	—	до 20 минут
Доклады и сообщения на секционных заседаниях	—	до 10 минут
Участие в дискуссиях	—	до 5 минут

## ПОРЯДОК РАБОТЫ КОНФЕРЕНЦИИ

14 ноября 2018 г.

**9<sup>00</sup> – 13<sup>00</sup>** – регистрация участников

(ГГУ им. Ф. Скорины, ул. Советская, 102, корпус № 5, фойе второго этажа).

**14<sup>00</sup>** – возложение цветов к мемориальной доске Б.В.Бокутя

(ГГУ им. Ф. Скорины, ул. Советская, 102, корпус № 5).

**15<sup>00</sup> – 17<sup>00</sup>** – открытие конференции, пленарное заседание

(ГГУ им. Ф. Скорины, ул. Советская, 104, корпус № 4, второй этаж, конференц-зал).

**17<sup>30</sup>** – ужин участников конференции (ул. Песина, 4).

15 ноября 2018 г.

**9<sup>00</sup> – 12<sup>00</sup>** – работа секций

**Секция «Оптика, акустика кристаллов и анизотропных структур»**

Ауд. 2-25, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Теория фундаментальных взаимодействий»**

Ауд. 3-7, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Новые материалы и технологии»**

Ауд. 4-27, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Автоматизация научных исследований»**

Ауд. 4-10, корпус 5, ул. Советская, 102.

**12<sup>00</sup> – 13<sup>00</sup>** – обеденный перерыв.

**13<sup>00</sup> – 15<sup>00</sup>** – работа секций

**Секция «Оптика, акустика кристаллов и анизотропных структур»**

Ауд. 2-25, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Теория фундаментальных взаимодействий»**

Ауд. 3-7, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Новые материалы и технологии»**

Ауд. 4-27, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Автоматизация научных исследований»**

Ауд. 4-10, корпус 5, ул. Советская, 102.

**15<sup>00</sup> – 16<sup>00</sup>** – обсуждение результатов конференции.

16 ноября 2018 г.

**12<sup>00</sup> – 13<sup>00</sup>** – посещение лабораторий факультета физики и информационных технологий

(ГГУ им. Ф. Скорины, ул. Советская, 104, 102, корпуса № 4, № 5).

**WWW страница:** <http://old.gsu.by/physfac/index.php/2010-02-04-14-08-07/2010-02-04-14-08-32/1405.html>



## ПЛЕНАРНОЕ ЗАСЕДАНИЕ

14 ноября 2018 г.

1. **С.А. Хахомов**, д.ф.-м.н., доцент, ректор УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь.

Открытие конференции.

2. **А.В. Рогачев**, д.х.н., профессор, член-корреспондент НАН Беларуси, УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь.

Плазмохимический синтез и свойства нанокпозиционных покрытий.

3. **Г.С. Митюрин**, д.ф.-м.н., профессор, УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь.

Научное наследие академика Б.В. Бокутя.

4. **С.С. Гиргель**, д.ф.-м.н., профессор, УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь.

Развитие оптики световых пучков.

5. **В.В. Шепелевич**, д.ф.-м.н., профессор, УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь.

Развитие оптики фоторефрактивных кристаллов в Мозырском государственном педагогическом университете имени И.П. Шамякина.

6. **А.Н. Сердюков**, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН Беларуси, УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь.

Космологический дрейф атомных часов и «аномалия Пионеров».

## Содержание

*Митюрин Г.С.* Научное наследие академика Б.В. Бокутя..... 14

### Оптика, акустика кристаллов и анизотропных структур

*Barsukou S.D., Khakhomov S.A., Kondoh Jun* Features of periodical acoustic impedance structure and acoustic wave interaction in novel controllable saw device..... 22

*Mityurich G.S., Ranachowski P., Lebedeva E.V., Aleksiejuk M., Serdyukov A.N.* Piezoelectric detection of photoacoustic signal in dense layer of carbon nanotubes irradiated by Bessel light beams..... 31

*Navitskaya Roza, Stashkevich Ihar* Dual-polarization generation in the Nd:YAG laser..... 40

*Алешкевич Н.А., Горбачев Д.Л., Федосенко Е.А.* Оптические свойства покрытий на основе тонких слоев  $TiO_2$ ,  $SiO_2$ ,  $ZnS$ ..... 45

*Аманова М.А., Навныко В.Н., Макаревич А.В., Шепелевич В.В., Юдицкий В.В.* Особенности взаимодействия световых волн на смешанной отражательной голограмме в кристалле  $Bi_{12}TiO_{20}$  среза (001)..... 50

*Балмаков А.П.* Особенности моделирования фотонных кристаллов, содержащихся в перьях птиц со структурным типом цветообразования..... 55

*Балмаков А.П.* Исследование физических особенностей структурного цветообразования перьев птиц..... 60

*Белый В.Н., Казак Н.С., Ропот П.А., Хило Н.А., Ропот П.И.* Акустооптическая генерация световых пучков Эйри с перестраиваемой криволинейной траекторией распространения..... 64

*Бобкова М.В., Пекаревич В.В., Мельникова Е.А., Толстик А.Л.* Фазово-поляризационное преобразование световых полей на основе пространственно структурированных электрически управляемых жидкокристаллических элементов..... 71

*Василенко А.Н., Примак И.У., Старовойтов А.Г., Хомченко А.В.* Поляризационные измерения двулучепреломления в средах с большой анизотропией..... 76

<b>Васильев С.В., Иванов А.Ю., Недолугов В.И.</b> Различные способы регистрации акустических волн, формирующихся в металлическом образце при воздействии на его поверхность лазерного импульса.....	82
<b>Гиргель С.С.</b> Свойства циркулярных оптических пучков Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом.....	87
<b>Гиргель С.С.</b> Световые пучки Вебера – Гаусса с непрерывными комплексными параметрами.....	93
<b>Кулак Г.В., Крох Г.В., Митюрин Г.С., Ропот П.И.</b> Акусто-оптическое взаимодействие частично поляризованных полихроматических световых пучков в кристаллах.....	99
<b>Митюрин Г.С., Велешук В.П., Гиргель С.С., Лебедева Е.В., Власенко А.И., Левицкий С.Н.</b> Фототермоакустическое преобразование куммер-гауссовых световых пучков в полупроводниковых сенсорных структурах на основе CdTe.....	104
<b>Митюрин Г.С., Кожушко В.В., Мышковец В.Н., Митюрин Д.Г., Яшин И.А.</b> Импульсное возбуждение ультразвуковых волн гауссовыми или бесселевыми световыми пучками в образцах горных пород (кернах).....	113
<b>Тимощенко Е.В., Юревич Ю.В.</b> Расчёт эффективности бистабильного тонкоплёночного отражателя.....	120
<b>Толкачёв А.И., Капшай В.Н., Шамына А.А.</b> Оптимизация эффективности генерации второй гармоники-суммарной частоты в тонком сферическом слое.....	126
<b>Толкачёв А.И., Шамына А.А., Капшай В.Н.</b> Оптимизационный анализ в задаче о генерации второй гармоники-суммарной частоты в тонком сферическом слое.....	132
<b>Чугунов С.В., Чугунов А.С., Чугунова Э.В.</b> Моделирование фотонных нанопучков в системе связанных микрорезонаторов....	137
<b>Шамына А.А., Капшай В.Н., Толкачёв А.И.</b> Симметрии и свойства пространственного распределения излучения при генерации второй гармоники-суммарной частоты оптически нелинейным слоем, нанесённым на поверхность сферической частицы, при её облучении плоской электромагнитной волной.....	143
<b>Шамына А.А.</b> Генерация второй гармоники в тонком оптически нелинейном слое, нанесённом на поверхность диэлектрической частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения, при её облучении плоской электромагнитной волной.....	149

<i>Шановалов П.С.</i> Взаимодействие эллиптических гауссовых пучков в нелинейных кристаллах.....	155
<i>Юревич В.А.</i> Импульсы сверхизлучения в тонком слое плотной резонансной среды.....	159

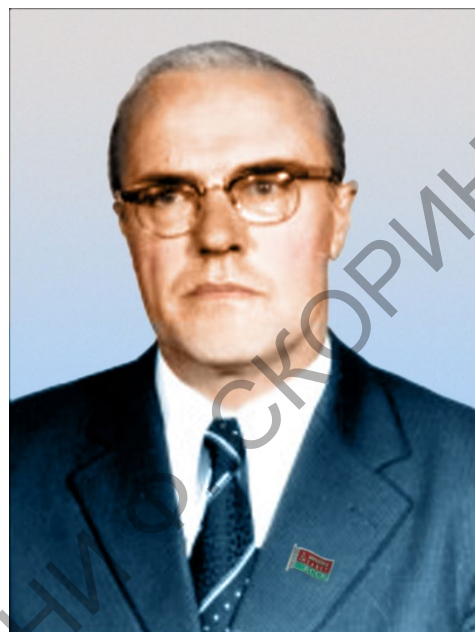
## Теория фундаментальных взаимодействий

<i>Bystritskiy Yu.M., Dbeysyi A., Maas F., Tomasi-Gustafsson E., Zykunov V.A.</i> Hard photons in proton-antiproton annihilation to a lepton pair for panda experiment.....	165
<i>Kisel V.V., Pletyukhov V.A., Ovsyuk E.M., Red'kov V.M.</i> On P-noninvariant wave equation for spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment, interaction with external fields.....	169
<i>Maksimenko N.V., Lukashevich S.A.</i> The energy-momentum tensor for a spin 1/2 particle taking into account polarizabilities.....	174
<i>Ovsyuk E.M., Voynova Y.A., Koral'kov A.D.</i> P-noninvariant equation for spin 1/2 particle, taking into account of the external Coulomb field.....	178
<i>Pankov A.A., Serenkova I.A.</i> First results on precision constraints on charged boson mixing from diboson production searches with ATLAS at LHC at 13 TEV.....	184
<i>Serdyukova M.A.</i> The primary nucleosynthesis in cyclic non-expanding universe involving long-lived rapidly moving primordial neutrons.....	189
<i>Serdyukova M.A.</i> The law of energy-momentum conservation of massive spin-zero gravitational field.....	193
<i>Zykunov Vladimir, Levantsov Victor</i> Calculation of radiative events in the inclusive experiments by new Monte Carlo method.....	199
<i>Авакян Е.З., Авакян С.Л.</i> Взаимодействия скалярных мезонов..	204
<i>Авакян С.Л., Авакян Е.З.</i> Низкоэнергетические взаимодействия странных мезонов.....	209
<i>Андреев В.В., Бабич К.С.</i> Релятивистские эффекты высших порядков для S-состояний водородоподобных систем.....	214
<i>Андреев В.В., Гавриш В.Ю., Крутов А.Ф.</i> Электромагнитный форм-фактор перехода $\omega \rightarrow \pi^0 \ell^+ \ell^-$ в релятивистской кварковой модели.....	223
<i>Андреев В.В., Максименко Н.В., Дерюжкова О.М.</i> Уравнения движения бесспиновой частицы в электромагнитном поле с учетом дипольных поляризуемостей.....	228

<i>Ахраменко Н.А., Павленко А.П.</i> Поле тяготения массивной плоскости.....	233
<i>Бужан А.В., Гришечкин Ю.А., Капшай В.Н.</i> Решение уравнения Шрёдингера для обобщённого ангармонического потенциала.....	238
<i>Вакулина Е.В., Максименко Н.В.</i> Частица с поляризуемостями в поле плоской электромагнитной волны.....	242
<i>Гайда Л.С., Свистун А.Ч., Матук Е.В.</i> Сфероидальная частица в поле светового давления гауссова пучка.....	250
<i>Гришечкин Ю.А., Капшай В.Н.</i> Решение квазипотенциальных уравнений с линейным запирающим в релятивистском конфигурационном представлении потенциалом.....	254
<i>Дей Е.А.</i> Эффективность метода конечных разностей при решении трехмерного стационарного уравнения Шрёдингера.....	260
<i>Желонкина Т.П., Лукашевич С.А., Гузовец А.А.</i> Законы сохранения в дифференциальной форме.....	267
<i>Левчук М.И., Львов А.И., Невмержицкий М.Н., Шуляковский Р.Г.</i> Измерение поляризуемостей нейтрона в комптоновском рассеянии на дейтроне.....	271
<i>Михалко И.С., Семченко И.В.</i> Резонанс в двойной ДНК-подобной спирали.....	277
<i>Панков А.А.</i> Международные базы и центры ядерных данных и создание ядерно-информационного центра на базе ЛФИ ГГТУ им. П.О. Сухого.....	282
<i>Тимошин Е.С., Тимошин С.И.</i> Глубоконеупругое рассеяние (не)поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах и дейтронах с заряженным и нейтральным током.....	289
<i>Тюменков Г.Ю.</i> Квазисвободная двухвременная функция Грина релятивистской кварк-дикварковой системы.....	295

## НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ АКАДЕМИКА Б.В. БОКУТЯ

Научная деятельность Б.В. Бокутя началась ещё в студенческие годы на отделении физики физико-математического факультета БГУ, куда он поступил в 1947 г. после окончания Узденской средней школы, которую закончил с золотой медалью. До войны Б.В. Бокуть успел закончить только восемь классов. С ноября 1941 г. стал участником Узденского подполья, а после освобождения Узденщины от немецко-фашистских захватчиков – участником боевых действий в составе частей 2-го Белорусского фронта. В августе 1944г. был ранен – осколок, застрявший в позвоночнике, превратил молодого воина в инвалида.



**Борис Васильевич Бокуть**

В студенческой аудитории Б.В.Бокуть слушал лекции Ф.И. Федорова, общение с которым определило дальнейшую научную судьбу и выбор тематики научно-исследовательской работы. Как отмечал Андрей Александрович Богуш, однокурсник Бориса Васильевича (впоследствии член-корреспондент НАН Беларуси) на первом курсе физико-математического факультета студентов, прошедших через фронты и партизанскую борьбу, было немало, и они у «молодых»



**Академик АН БССР  
Ф.И. Федоров**

пользовались непререкаемым авторитетом. Это в полной мере относилось и к Б.В. Бокутю. После окончания БГУ Борис Васильевич – аспирант кафедры теоретической физики этого же вуза. В январе 1956 года в БГУ защитил кандидатскую диссертацию «Статистическая теория структуры поверхностного слоя жидкости» (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор

И.З.Фишер), и перешёл в Институт физики АН БССР – на должность младшего научного сотрудника. Последующая деятельность Бориса Васильевича связана с работой под руководством Ф.И. Федорова в стенах Академии наук: в качестве старшего научного сотрудника (до 1973 года), и заведующего лабораторией кристаллооптики (с 1970 года). В годы работы Б.В. Бокутя в Академии наук проявились его лучшие качества как настоящего ученого, творческого человека, неординарной личности, прекрасного теоретика и экспериментатора.

Научные исследования Б.В. Бокутя были связаны с применением методов прямого тензорного исчисления, развитых Ф.И. Федоровым, для решения задач электродинамики и кристаллооптики линейных и нелинейных оптически активных сред. Естественная и вынужденная (эффект Фарадея) оптическая активность имеет большое значение – как в научном, так и в практическом отношении. Широкое применение методы дисперсии оптического вращения и циркулярного дихроизма нашли в органической химии, кристаллографии, молекулярной биологии, медицине. Само возникновение и развитие стереохимии – учения о пространственном расположении атомов в молекуле обусловлено открытием естественной оптической активности. В фармакологии, препаративной химии это явление используется для выделения из рацемической смеси оптических изомеров, которые могут отличаться по физиологическому действию.

На основе предложенного еще Френелем объяснения явления оптической активности возникновением циркулярного двулучепреломления не были выявлены причины естественной оптической активности и особенности её проявления в кристаллических средах. Попытки построения теории естественной оптической активности предпринимались многими известными учёными, например, М.Борном, Д.У.Гиббсом, Л. Розенфельдом, К. В. Озееном, К.Фёрстерлингоми др. При теоретическом описании явления ими использовались противоречивые ограничения и допускались отдельные неточности, несовместимые с основными положениями электродинамики материальных сред. И только благодаря работам Б.В. Бокутя оказалось возможным корректное решение граничных задач электродинамики оптически активных кристаллов.

Были изучены основные закономерности распространения оптического излучения в оптически активных линейных и нелинейных кристаллах, разработаны методы определения оптических параметров таких сред, выяснены возможности и условия повышения эффектив-

ности генерации второй гармоники и лазерной генерации на смешанных частотах в нелинейных кристаллах. Кроме этого, в работах Б.В. Бокутя на основе ковариантных методов были выведены основные соотношения электродинамики движущихся оптически активных нелинейных сред, исследовано пондеромоторное действие поляризованного излучения на нелинейные кристаллы (нелинейный эффект Садовского). В совокупности решение этих задач составило основное содержание докторской диссертации «Электромагнитные волны в оптически активных и нелинейных кристаллах», которую Б.В. Бокуть успешно защитил в 1972 году в Институте физики Академии наук БССР по специальности 01.044 – оптика. Одним из оппонентов при защите диссертации выступил известный ученый в области нелинейной оптики профессор МГУ, д.ф.-м.н. С.А. Ахманов, высоко оценивший полученные соискателем результаты.

Следует отметить, что расчеты, выполненные в диссертации Б.В. Бокутя, и сделанные на их основе теоретические предсказания получили экспериментальное подтверждение в работах учёных из Института кристаллографии АН СССР – А.Ф. Константиновой, Б.Н. Гречушникова, З.Б. Перекалиной и других. Для ряда гиротропных кристаллов ими была исследована дисперсия угла поворота плоскости поляризации и циркулярного дихроизма и определены компоненты тензоров гирации, параметры анизотропии и циркулярного дихроизма. Итогом проведенных исследований стала подготовка монографии А.Ф. Константиновой, Б.Н. Гречушникова, Б.В. Бокутя,





Е.Г. Валяшко «Оптические свойства кристаллов», опубликованной в 1995 г. – к сожалению, уже после смерти Б.В. Бокутя.

Развитие основ теории взаимодействия света с оптически активными кристаллами в рамках ковариантного метода обусловило выявление принципиальных недостатков, свойственных теории гиротропных сред, и их последующее устранение. В ходе анализа решений граничных задач электродинамики гиротропных сред, полученных в работах группы московских физиков, возглавляемой академиком В.Л. Гинзбургом, было обнаружено нарушение закона сохранения плотности потока энергии при прохождении излучения через прозрачную плоскопараллельную гиротропную пластинку. Возникло принципиальное разногласие относительно формы материальных уравнений, использованных представителями школы В.Л. Гинзбурга для описания явления пространственной дисперсии и белорусскими физиками при описании гиротропных сред. Спор разрешился в ходе выездной сессии Отделения общей физики и астрономии Академии Наук СССР в Минске в присутствии лауреатов Нобелевской премии И.Г. Басова и А.М. Прохорова. Руководил совместным научным семинаром академик Е.П. Велихов. Жаркая многочасовая дискуссия закончилась тем, что молодой, в то время, кандидат наук А.Н. Сердюков в конце семинара убедил московских оппонентов в ошибочности их представлений, чем вызвал бурю аплодисментов. Нужно отдать должное В.Л. Гинзбургу, тогда ещё будущему лауреату Нобелевской премии, который проявил научную добропорядочность и принципиальность, признав свою неправоту, о чем – со ссылкой на работы Б.В. Бокутя, А.Н. Сердюкова – написал в трижды переизданной монографии «Теоретическая физика и астрофизика. Таким образом, представленная Б.В. Бокутем, совместно с Ф.И. Федоровым и А.Н. Сердюковым, самосогласованная система материальных уравнений, граничных условий и энергетических соотношений электродинамики гиротропных сред кристаллов составляет в настоящее время основу корректной феноменологической теории естественной и вынужденной оптической



Сердюков Анатолий Николаевич

активности. Подтверждением этому являются многочисленные ссылки на работы классиков современной физики Ф.И. Федорова, Б.В. Бокутя, А.Н. Сердюкова в работах по широкому кругу проблем кристаллооптики гиротропных сред, лазерной физики линейных и нелинейных явлений, квантово-механической теории оптической активности.

С созданием теоретических основ электродинамики гиротропных сред многочисленным ученикам и последователям академика Б.В. Бокутя были обеспечены успешные исследования по различным научным направлениям оптики и акустики на современном этапе. В настоящее время весь спектр научных исследований в области электродинамики гиротропных кристаллов и структур реализуется в Республике Беларусь и в ИКАН России усилиями его учеников и последователей – академика Н.С. Казака, директора Института физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси; члена корреспондента НАН Беларуси, д.ф.-м.н., профессора А.Н. Сердюкова; члена-корреспондента НАН Беларуси д.ф.-м.н., профессора В.Н. Белого, руководителя центра «Диагностические системы» Института физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси; д.ф.-м.н., профессора В.В. Шепелевича, заведующего кафедрой теоретической физики и прикладной информатики МГПУ им. И.П. Шамякина; д.ф.-м.н. профессора А.Ф. Константиновой, главного научного сотрудника лаборатории кристаллооптики Института кристаллографии РАН; учёными из других научных центров.

Существенным вкладом в развитие магнитооптики кристаллов и сред, в которых проявляются эффект Фарадея и магнитогирация, стали работы, результаты которых опубликованы Б.В. Бокутем в соавторстве с С.С. Гиргелем, в настоящее время интенсивно продолжающим исследования, касающиеся, в частности, особенностей распространения световых пучков – Бесселевых, Бессель-Гауссовых, а также гипергеометрических пучков Куммера-Гаусса.

Результаты исследования взаимодействия электромагнитных волн с поглощающими гиротропными кристаллами нашли отражение в работах Б.В.Бокутя, опубликованных совместно с его учениками В.В. Шепелевичем и Г.С. Митюринем, которые расширили спектр задач, решаемых в оптике поглощающих гиротропных сред. В.В. Шепелевичем достигнуты заметные успехи в области голографии фоторефрактивных кристаллов, проявляющих оптическую активность. Результаты совместного с учениками изучения свойств таких кристаллов обобщены в десяти кандидатских диссертациях, подготовленных под его руководством в УО «Мозырский государственный педагоги-

ческий университет им. И.П.Шамякина» и успешно защищенных в специализированных советах Республики Беларусь.

На кафедре оптики УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины» активно исследуется лазерная термооптическая генерация звука в гиротропных средах, пьезоэлектрических кристаллах, многослойных гиротропных структурах, естественно-гиротропных и магнитоактивных сверхрешетках, в низкоразмерных наноструктурах, хиральных и ахиральных углеродных нанотрубках. Новые научные результаты, полученные в области фотоакустической спектроскопии сред с пространственной дисперсией, отражены в успешно защищенных докторской и шести кандидатских диссертациях. Одной из первых работ этого направления была статья, выполненная Б.В. Бокутем в соавторстве с Г.С. Митюричем и опубликованная в журнале «Кристаллография».



Существенные результаты, получившие международное признание, получены в лаборатории «Физика волновых процессов», которую возглавляют д.ф.-м.н. И.В. Семченко и д.ф.-м.н. С.А. Хахомов. Основные направления деятельности возглавляемого ими научного коллектива относятся к электродинамике искусственных анизотропных и гиротропных структур и связаны с расчетом, кон-

струированием и созданием метаматериалов с равными диэлектрическими и магнитными проницаемостями в СВЧ диапазоне, изучением взаимодействия электромагнитных полей с биологическими спиральными структурами, исследованием взаимодействия акустических поверхностных и объемных волн в средах с искусственной анизотропией. В соответствии с этим направлением подготовлены и успешно защищены две докторские и шесть кандидатских диссертаций, из последних три защищены в Японии и одна в Финляндии, что можно расценивать как подтверждение международного уровня научных ис-

следований учеников И.В. Семченко и С.А. Хахомова и высокого престижа научной школы Б.В. Бокутя.

Первым научным руководителем «Проблемной научно-исследовательской лаборатории Перспективных материалов» был Б.В. Бокуть. Впоследствии – уже под руководством д.т.н. профессора И.М. Мельниченко – в лаборатории развернулись исследования в рамках нового научного направления по созданию перспективных материалов на базе золь-гель технологий. В настоящее время лабораторию возглавляет к.ф.-м.н. доцент Гайшун В.Е., и усилия её сотрудников направлены на создание принципиально новых наукоёмких конкурентоспособных материалов и технологий. Исследования этой группы учёных соответствуют приоритетным для Республики Беларусь научным направлениям. За время существования лаборатории её сотрудниками защищено 4 докторские и 9 кандидатских диссертаций, получено более 80 свидетельств об изобретениях, патентов и документов, подтверждающих приоритет в создании промышленных образцов.

Б.В. Бокутью было присуще желание и умение теоретические исследования доводить до эксперимента, эксперименты до изобретения или патента. В этой связи результаты, полученные под его руководством прекрасным экспериментатором Малащенко Алексеем Терентьевичем с сотрудниками научно-исследовательской лаборатории «Лазерные технологии обработки материалов», в настоящее время возглавляемой к.ф.-м.н. В.Н. Мышковцом, широко применяются как в гражданских организациях, так и на предприятиях ВПК. В лаборатории разработаны высокоэффективные технологические процессы лазерной обработки материалов, созданы современные оптические системы, предназначенные для фокусировки и передачи мощного лазерного излучения. Исследования сотрудников лаборатории соответствуют приоритетным направлениям фундаментальных исследований, практико-ориентированы, а результаты их НИР внедряются в производственный и учебный процесс. В частности, результаты, полученные по теме «Технология импульсной лазерной наплавки и восстановление поверхностей деталей и узлов авиационной и артиллерийской техники», используются в целях восстановления деталей для ОАО «558 авиационный завод» и в/ч 63604; соответствующие услуги оказываются на лабораторной базе университета.

В лаборатории «Новые материалы и технологии» одним из главных направлений исследований, выполняемых под руководством

к.ф.-м.н., доцента Шалупаева С.В., является изучение процессов обработки материалов концентрированными потоками энергии. В рамках данного направления были созданы методы прецизионной лазерной обработки различных изотропных и анизотропных хрупких неметаллических материалов. С использованием построенных в соавторстве Б.В.Бокутем, А.Н. Сердюковым, С.В.Шалупаевым и др. математических моделей процессов лазерного воздействия на неоднородные материалы выяснены особенности физического механизма лазерного преобразования – в рамках теории термоупругости и линейной механики разрушений. Сотрудниками лаборатории проводятся также исследования по изучению особенностей лазерного термораскалывания кремниевых и германиевых пластин, а также пластин из арсенида галлия, сапфира и кварца.

Б.В. Бокуть несомненно являлся одним из лучших представителей школы академика Ф.И. Федорова, создавшим свою многочисленную научную школу. Его ученики и последователи успешно работают в научно-исследовательских институтах академии наук Беларуси, в университетах Минска, Гомеля, Мозыря. В школе академика Б.В. Бокутя один академик, два член-корреспондента НАН Беларуси и более 40 докторов и кандидатов наук. Научное и творческое наследие Бориса Васильевича Бокутя, выдающегося ученого, прекрасного педагога, талантливое организатора, сделавшего исключительно много для становления и развития Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, будет жить и приумножаться в трудах его учеников и последователей, в деятельности всего профессорско-преподавательского коллектива университета.

Доктор физико-математических наук,  
профессор Г.С. Митюрнич

# Оптика, акустика кристаллов и анизотропных структур

Председатели – Сердюков А.Н., Шепелевич В.В.

**S.D. Barsukou<sup>1</sup>, S.A. Khakhomov<sup>1</sup>, Jun Kondoh<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus

<sup>2</sup>Shizuoka University, Shizuoka, Japan

## FEATURES OF PERIODICAL ACOUSTIC IMPEDANCE STRUCTURE AND ACOUSTIC WAVE INTERACTION IN NOVEL CONTROLLABLE SAW DEVICE

### Introduction

A surface acoustic wave (SAW) device with novel acoustic metamaterials (AM) and phonic crystal (PCs) structures are increasingly applied in advanced electronics as the broadband filter, negative reflector, signal switcher and so forth [1-8]. Those motivates research interest prevails in the ultrasound application area. The perspective effects of ultrasound interaction with PCs and AM structures have been investigated. Recently, the AM structures based on the elementary “metaatoms”, which are characterized by optimal size and shape are opening a widespread effects of SAW interaction [9-14]. The wave interaction properties are almost determined by the element configuration, size and the array structure [15-20]. However, the AMs or 2D analog as the “metasurface” with established parameters and properties do not allow the switching and controlling functionality in real time. Especially, for electronics applications, the controllable interaction of SAW which is the input and output signals are required. In recent years, the some studies about the controllable structures already discussed [21-24]. The controllable electroinduced periodical domain structures on a LiNbO<sub>3</sub> were investigated as a kind of the controllable structures [25]. The switchable domain structures were induced via the electrostatic effect by applying different electric potentials [26].

In this research the SAW device with an electroinduced controllable structure was theoretically and experimentally studied. The innovative SAW device on a LiTaO<sub>3</sub> single crystal with controllable, electroinduced, and volume existed domain structures was proposed. The periodic domain structures were implemented by the linear electrostatic effect with different electric potentials applied to the surface arranged electrodes. Different electroinduced domain

structures are achievable when the electrode structures are crossed on the top and bottom surfaces of the crystal. The parameters of the electroinduced structure and features of the acoustic wave interaction have ability to control. The electroinduced structure is considered as the volume-existed periodic acoustic impedance. The SAW device experimental samples were fabricated, and the propagated SAW influence due to the electroinduced structure was experimentally observed. The theoretical and experimental results of the acoustic wave interaction in ferroelectric waveguide with electroinduced periodical structures were discussed.

### 1. Principle of the controllable SAW device and theoretical investigations

The SAW device principle and structure are shown in Figure 1(a). The device was fabricated on a  $36^\circ$ -rotated Y-cut, X-propagating  $\text{LiTaO}_3$  single crystal, which allows the shear horizontal (SH) SAW propagation. The SH-SAW propagates as the plate wave with the SH displacements. The resonance frequency and wavelength of the SH-SAW were 10 MHz and  $421 \mu\text{m}$ , respectively. The controlled periodic domain structures were implemented by applying different electric potentials to the surface arranged electrodes of E1, E2, E3, and E4. The electrode fingers arranged on the both surfaces were mutually perpendicular. The applied electric field was lower than the coercive, and the spontaneous domain polarization was not changed. However, the material parameters at the regions of the electric field action are changed. This regime formation of the periodical structure was applied in the current research. Exit-ed from the inter-digital transducer (IDT1) the SH-SAW interacts at the electroinduced structure region, and then the reflected and transmitted waves were generated and registered using the IDT1 and IDT2 simultaneously. At the measurements, the reflected and transmitted SAWs were studied.

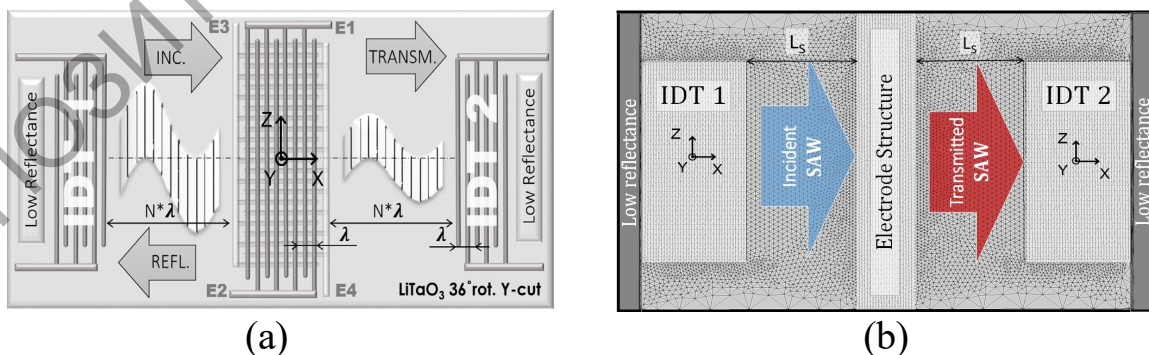


Figure 1 – (a) Device structure and principle of the SH-SAW interaction; (b) configuration of FEM model of the controllable SAW device. (The INC., REFL., and TRANSM. are the incident, reflected, and transmitted waves, respectively. The E1, E2, E3, and E4 are the conductive electrodes arranged on the surface of the acoustic waveguide)

In Ref. [26], the domain formation process for different electrode configurations and ferroelectric substrate thicknesses was discussed. In this research, the finite elements method (FEM) with the full 3D model was applied for the theoretical investigation. The full model of the controllable SAW device was theoretically investigated in two steps in the time domain. The FEM model for the device structure considered is shown in Figure 1(b). In the model the classical descriptions of the electric and relative particle displacements were used. The quasi-static approximation was applied to describe the electric field of the SAW and mechanical stress. All boundaries correspond to the electrical and mechanical potentials absence, and the lateral boundaries correspond to the low reflection condition. The FEM model includes the IDTs and the electrode structures (ES). The numbers of the electrode fingers of the IDT was 20. The ES consists of 10 electrode fingers on the top and 60 on the bottom surfaces. The distance  $L_S$  between the IDT and ES was 10 wavelengths. The SH-SAW propagated in the X-direction from IDT1 to IDT2. The thickness of the crystal was 50  $\mu\text{m}$ . The total dimension of the calculated structure is  $2000 \times 1000 \times 50 \mu\text{m}^2$ . The electrical potentials of 200 V and 0 V were periodically applied to each pair of the electrode finger of ES. The parameters of the displacements and the electric potential were calculated for the time of 10  $\mu\text{s}$ .

Based on the full model discussed the periodical acoustic impedance structure formation was investigated without the SH-SAW action. That allows to discuss the features of formation of induced structure. The results are listed in Figures 2(a) and 2(b). In this model, the domain structure was induced by applying of the opposite DC potentials to the top and bottom ESs simultaneously. When the DC is applied to the ES, the short SH-SAWs are generated and propagate in the opposite form the ES directions. The Figure 2(a) shows the total displacement distribution measured for the time of 1 and 10  $\mu\text{s}$ . The shown displacements correspond to the SAW was induced when the DC is applied. The periodical structure formation we characterized by analyzing spectra of the registered SAW. After the domain structure stabilized the wave process is attenuates. The black curve in Figure 2(b) shows the registered by IDT signal. The short wave packet from 1 to 3  $\mu\text{s}$  corresponds to the domain structure formation signal, and the lower amplitude packet between 4 and 7  $\mu\text{s}$  is the results of the between lateral boundaries and the IDTs reflection. The registered signal spectra are illustrated in Figure 2(b). At least two maximums of 9,6 MHz and 12,8 MHz were observed. The first maximum corresponds to the resonance frequency of the similarity to the IDT structure. The second one relates to the domain formation process, where the displacement was produced in the volume of the crystal.



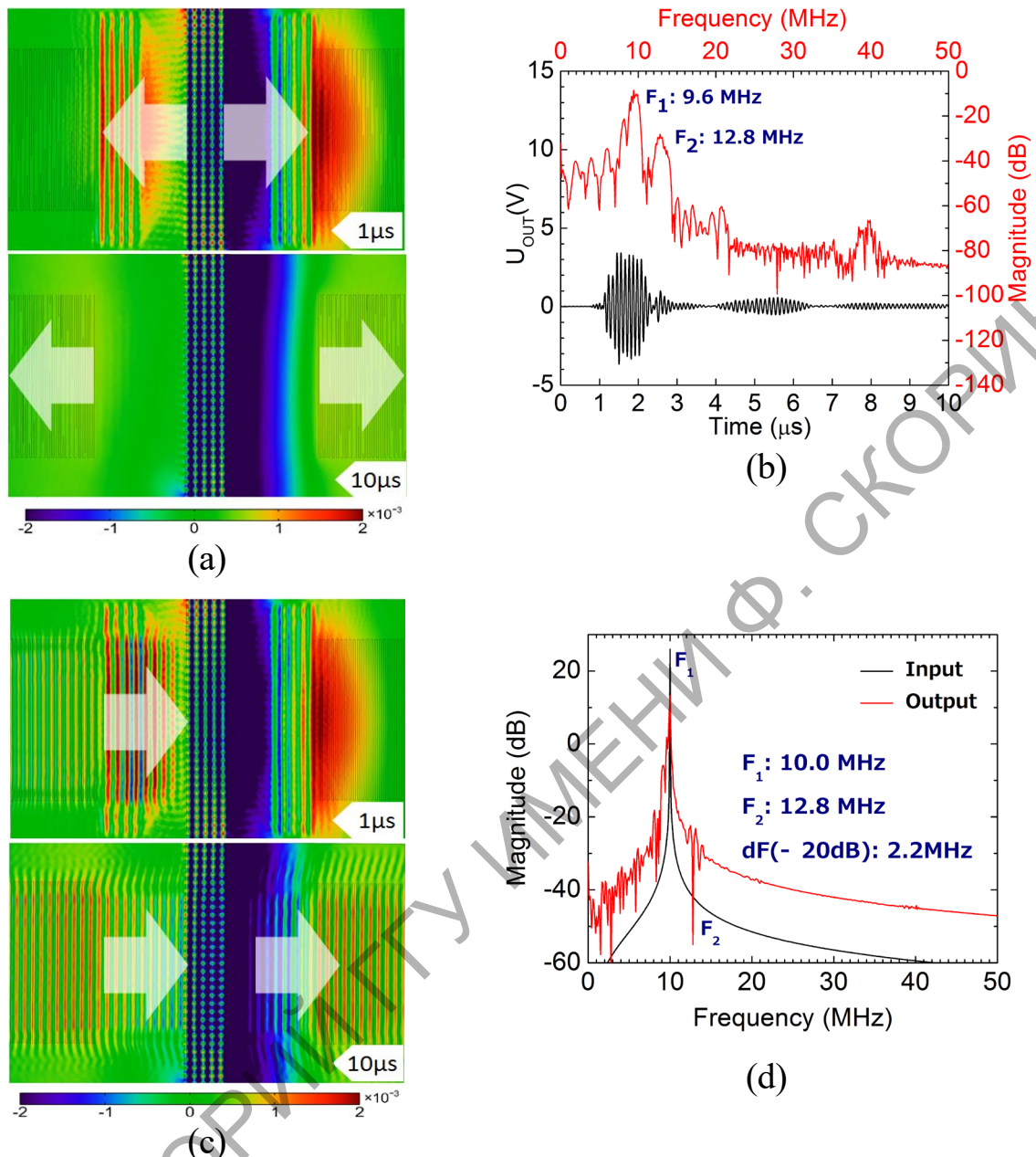


Figure 2 – Results of the theoretical investigations: (a) and (b) the periodical structure formation, (c) and (d) the SH-SAW interaction processes. (a) Field of the total displacement distribution measured for the time of 1 and 10  $\mu\text{s}$ , (b) the registered of the domain formation signal (the black curve) and spectra (the red curve), (c) the total displacement distribution measured for the time of 1 and 10  $\mu\text{s}$  in the case of the SH-SAW interaction, and (d) spectra of the input signal (the red curve) and output signal (the black curve)

The acoustic wave interaction includes the SH-SAW transmission, the domain structure formation, and the interaction processes, simultaneously. The SH-SAW interaction was calculated for the time span from 0 to 10  $\mu\text{s}$  with results in Figures 2(c) and 2(d). The propagated SH-SAW interacts with the induced periodical structure, and results calculated for the time of 1 and 10

$\mu\text{s}$  were plotted in Figure 2(c). Analyzing of the displacement distribution in Figure 2(c), the SH-SAW propagated was described the shape of preinduced static displacement. Thus, the acoustic energy redistribution occurs in the volume of the crystal. Need to note, that in case of the not matched interaction conditions, the propagation losses will increase. To analyze of the acoustic wave interaction, the registered signal spectra (the black curves) and applied signal spectra (the red curve) were compared in Figure 2(d). The resonances of both signals are located at 10 MHz, and related to the SH-SAW propagation. The single minimum of the output signal was found at 12,8 MHz. This result is corresponding to the acoustic band gap caused due to SH-SAW interaction with the electroinduced periodical structure.

## 2. Experimental investigations of SAW interaction

Two types of SAW devices with different parameters of the ES were fabricated using a conventional lithography technique. The pitches between the electrode fingers of ES were 1,0 and 0,5 wavelength. The thickness of the ferroelectric waveguide was 250  $\mu\text{m}$ . Electrode fingers material for both the IDT and ES was aluminum with thickness about 100 nm. Number of finger pairs for the IDT was 32, and the ES consists of 20 electrode fingers on the top and 116 on the bottom surfaces. The distance between IDT and ES was 32 wavelengths and corresponds to the matched interaction conditions.

The time response of the reflected signals for the both SH-SAW devices was measured, and the domain induced regions were concluded for the both SAW devices. Figures 3(a) and 3(b) shows the measured reflected signals for SH-SAW devices with the pitch of half and one wavelength, respectively. The dashed region shows the location of the induced structure at the timeline scale. Here, the photographs of the fabricated SH-SAW devices with different ES are also shown.

The results of relative magnitude and absolute phase deviation for both studied SAW devices are plotted in Figure 4. Here, results for the periodical structure, which represents the four codirected domains induced in a structural unit, are shown in Figures 4(a) and 4(b). The results obtained for the structure with two opposite directed domains are shown in Figures 4(b) and 4(d). Figures 4(a) and 4(c) describes the results measured for the ES pitch of 0,5, and Figures 4(b) and 4(d) of 1,0 wavelength.

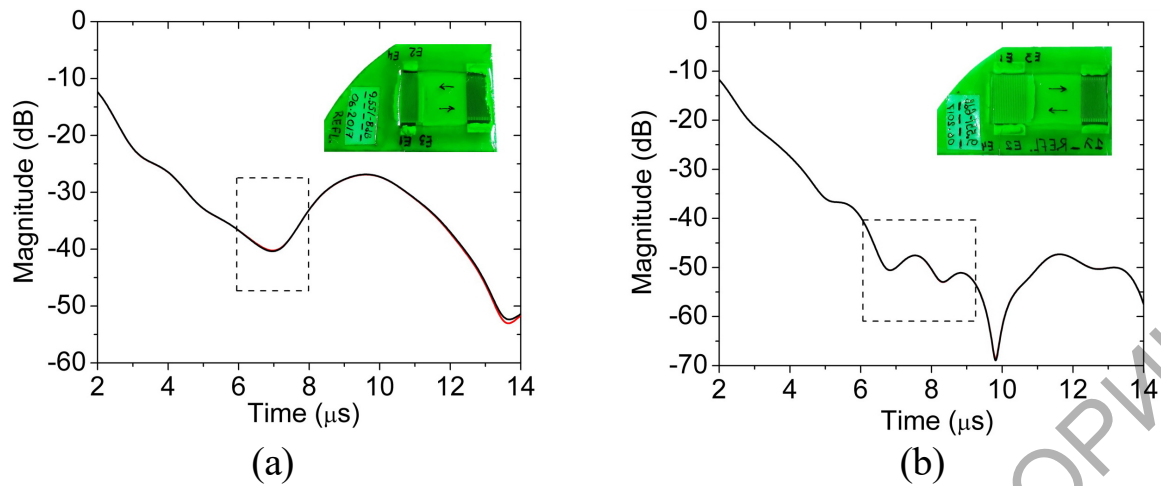


Figure 3 – Measured time response and the domain structure region (the dotted curve) and the fabricated sample photograph. (a) The ES with pitch of half wavelength, and (b) the ES with pitch of one wavelength

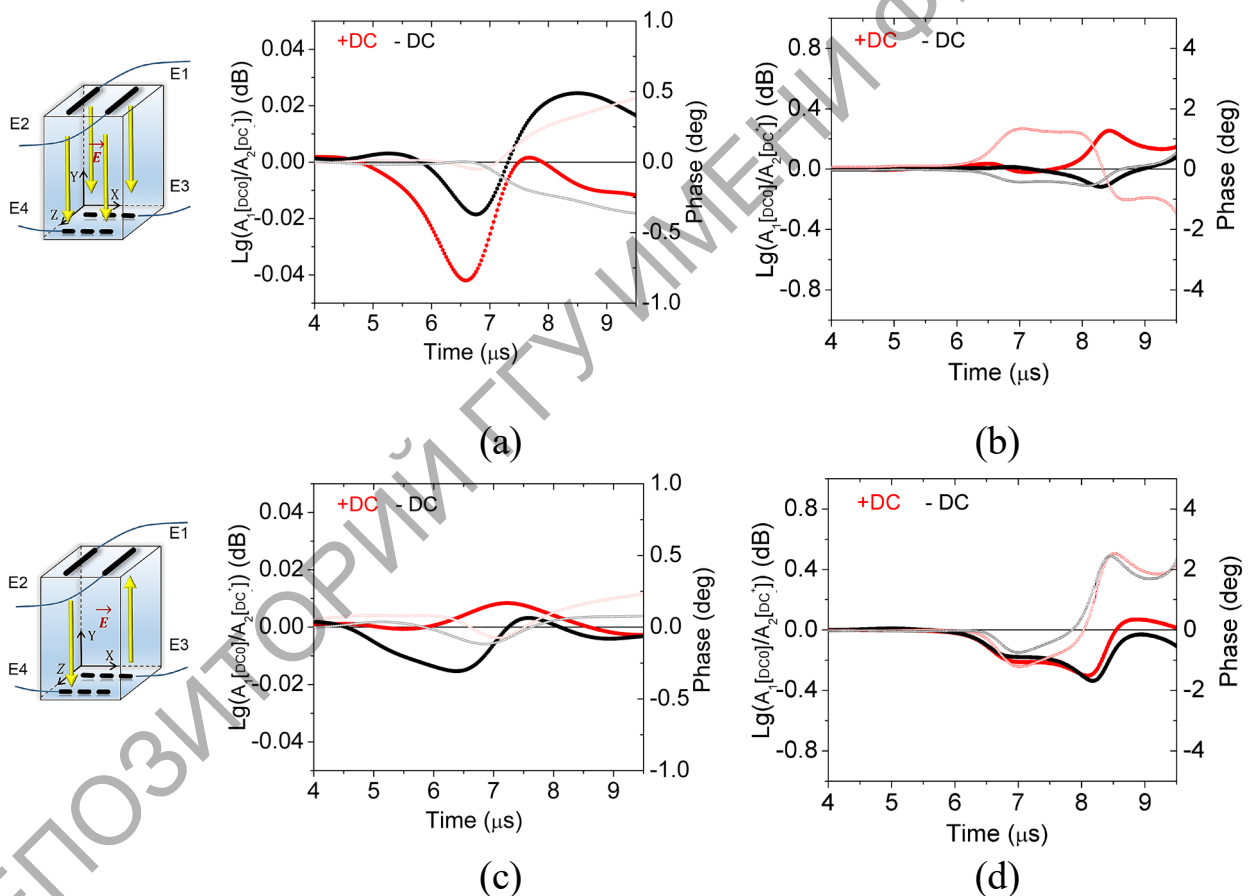


Figure 4 – Experimental results of the magnitude relative and phase absolute deviations of the reflected SH-SAW. (a) The domain structure with four codirected domains in the single domain unit and ES pitch of half wavelength, (b) the domain structure with four codirected domains in the domain unit and ES pitch of one wavelength, (c) the domain structure with two opposite directed domains in the domain unit and ES pitch of half wavelength, and (d) the domain structure with two opposite directed domains in the unit and ES pitch of one wavelength

The positive +DC (the red curve), and negative –DC (the black curve) polarities of 200 V were applied. The measurement was carried out by the network analyzer (Agilent Technologies, E5070B) in frequency and time domains. To reduce influence of the “0” level, it was measured for all domain configurations and DC polarities and normalized. During measurements, the ES was “shorted” for AC using the four high voltage capacitance of 0,1 mF connected in “bridge”. That allows to reduce the influence occurred during switching of the domain structures. From Figure 4 the SH-SAW interaction dependence at the domain induced region on a DC polarity was observed for different domain configurations. Moreover, was found, that the different ESs are provide the different distribution and time shift of the reflected signal. For the ES pitch of one wavelength (Figures 4(b) and 4(d)), the wider region of interaction with different features was observed. However, for the discussed SH-SAW device structure, due to the effects of SH-SAW attenuation and acoustic wave reflection, the matched interaction properties are difficult. The registered signal represents the complex signal from the different acoustic modes which are propagates simultaneously.

In conclusion, the possibilities of the controllable interaction of the SH-SAW with the electroinduced periodical structures were shown theoretically and experimentally. The proposed SAW device structure and discussed interaction features show a good opportunity for advanced electronic applications, such as the controllable filter, delay line, and as well as the complex multifunctional device for signal processing. The switchable induced structures allow to control of the acoustic wave interaction. To achieve the matched conditions of interaction, the SAW device structure improvement is required. The regime of matched interaction allows to increase the SH-SAW parameters and new scattering effects are reachable. As the way to improve of the domain formation and interaction parameters is the device based on the thin film structure, as well as the appropriate the ferroelectric substrates consideration is required.

### References

1. Hall, D.A. Nonlinearity in piezoelectric ceramics / D.A. Hall // J. Mater. Sci. – 2001. – № 36. – 4575.
2. Royer, D Elastic Waves in Solids I / D. Royer and E. Dieulesain // Springer, Heidelberg. – 2000. – Vol. 1. – P. 216.

3. Tselev, A. Microwave a.c. conductivity of domain walls in ferroelectric thin film / A. Tselev, P. Yu, Y. Cao, L.R. Dedon, L.W. Martin, S.V. Kalinin, P. Maksymovych // *Nat. Commun.* – 2016. – № 7. – P. 11630.
4. Shur, V.Y. Micro- and nano-domain engineering in lithium niobate / V.Y. Shur, E.V. Pelegova, A.R. Akhmatkhanov, I.S. Baturin // *Ferroelectrics.* – 2016. – 496:1. – P. 49–69.
5. Whyte, J.R. A diode for ferroelectric domain-wall motion / J.R. Whyte and J.M. Gregg // *Nat. Commun.* – 2015. – № 6. – P. 7361.
6. Wu, Ying Perspective: Acoustic metamaterials in transition / Ying Wu, Min Yang, and Ping Sheng // *J. Appl. Phys.* – 2018. – № 123. – P. 090901.
7. Liu, Bingyi Experimental realization of all-angle negative refraction in acoustic gradient metasurface / Bingyi Liu, Bin Ren, Jiajun Zhao, Xiaodong Xu, Yuxin Feng, Wenyu Zhao, and Yongyuan Jiang // *Appl. Phys. Lett.* – 2017. – № 111. – P. 221602.
8. Zhang, H. Omnidirectional broadband acoustic absorber based on metamaterials / H. Zhang, B. Liang, X. Zou, J. Yang, J. Yang and J. Cheng // *Appl. Phys. Exp.* – 2017. – № 10. – P. 027201.
9. Lu, Ruochen Lithium niobate phononic crystals for tailoring performance of RF laterally vibrating devices / Ruochen Lu, Tomás Manzanique, Yansong Yang, and Songbin Gong // *IEEE Trans.* – 2018. – № 65(6).
10. Xie, Y. Measurement of a broadband negative index with space-coiling acoustic metamaterials / Y. Xie, B. Popa, L. Zigoneanu, and Steven A. Cummer // *Phys. Rev. Lett.* – 2013. – № 110. – P. 175501.
11. Li, D Design of an acoustic metamaterial lens using genetic algorithms / D. Li, L. Zigoneanu, B. Popa, and S. A. Cummer // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2012. – № 132. – P. 2823.
12. Zigoneanu, L. Design and measurements of a broadband two-dimensional acoustic lens / L. Zigoneanu, B. Popa, and Steven A. Cummer // *Phys. Rev. B.* – 2011. – № 84. – P. 024305.
13. Frenzel, T. Three-dimensional labyrinthine acoustic metamaterials / T. Frenzel, J. D. Brehm, T. Buckmann, R. Schittny, M. Kadic, and M. Wegener // *Appl. Phys. Lett.* – 2013. – № 103. – P. 061907.
14. Mohammadi, S. High-Q micromechanical resonators in a two-dimensional phononic crystal slab / S. Mohammadi, A. A. Eftekhar, W. D. Hunt, and A. Adibi // *Appl. Phys. Lett.* – 2009. – № 94.
15. Iwasaki, Y. Rectification of Lamb wave propagation in thin plates with piezo-dielectric periodic structures / Y. Iwasaki, K. Tsuruta, and A. Ishikawa // *Jpn. J. Appl. Phys.* – 2016. – № 55. – P. 07KB02.

16. Liang, B. Acoustic diode: rectification of acoustic energy flux in one-dimensional systems / B. Liang, B. Yuan, and J. Cheng // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – № 103. – P. 104301.
17. Lu, M. Phononic crystals and acoustic metamaterials / M. Lu, L. Feng, Y. Chen // *J. Materials Today.* – 2009. – № 12(12).
18. Laude, V. Stochastic excitation method for calculating the resolvent band structure of periodic media and waveguides / V. Laude, and M.E. Koro-tyaeva // *Phys. Rev. B.* – 2018. – № 97. – P. 224110.
19. Peng, S. Acoustic far-field focusing effect for two-dimensional graded negative refractive-index sonic crystals / S. Peng, Z. He, H. Jia, A. Zhang, C. Qiu, M. Ke, and Z. Liu // *Appl. Phys. Lett.* – 2010. – № 96, – P. 263502.
20. Noeth, A. Electrical tuning of dc bias induced acoustic resonances in paraelectric thin films / A. Noeth, T. Yamada, A. K. Tagantsev, and N. Setter // *J. Appl. Phys.* – 2008. – C 104. – P. 094102.
21. Popa, A. Active acoustic metamaterials reconfigurable in real time / A. Popa, D. Shinde, A. Konneker, S. A. Cummer // *Phys. Rev. B.* – 2015. – № 91. – P. 220303.
22. Chen, Z. Tunable topological phononic crystals / Z. Chen, Y. Wu // *Phys. Rev. Appl.* – 2016. – C 5. – P. 054021.
23. Pashchenko, V.P. Controlled surface acoustic wave phononic crystal based on induced periodic domains / V.P. Pashchenko // *Proc. St. Petersburg State Polytechnic University.* – 2013. – № 3(177).
24. Barsukov, S.D. Acoustic waves in ceramics with the electroinduced anisotropy / S.D. Barsukov, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko // *Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems.* – 2009. – Vol. 3. – № 4.
25. Mackwitz, P. Periodic domain inversion in x-cut single-crystal lithium niobate thin film / P. Mackwitz, M. Rüsing, G. Berth, A. Widhalm, K.Muller, and A. Zrenner // *Appl. Phys. Lett.* – 2016. – № 108. – P. 152902.
26. Barsukou, S. Investigation of interaction of shear horizontal surface acoustic wave with controlled electroinduced domain structure / S. Barsukou, J. Kondoh // *Jpn. J. Appl. Phys.* – 2017. – № 56. – P. 07JD07.

G.S. Mityurich<sup>1</sup>, P. Ranachowski<sup>2</sup>, E.V. Lebedeva<sup>3</sup>,  
M. Aleksiejuk<sup>2</sup>, A.N. Serdyukov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus

<sup>2</sup>Institute of Fundamental Technological Research PAS, Warsaw, Poland

<sup>3</sup>Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives,  
Gomel, Belarus

## PIEZOELECTRIC DETECTION OF PHOTOACOUSTIC SIGNAL IN DENSE LAYER OF CARBON NANOTUBES IRRADIATED BY BESSEL LIGHT BEAMS

### Introduction

Bessel light beams (BLB) are used and widely used in laser photoacoustic methods to diagnose the structure of various samples as a source of sound excitation [1-4]. In particular, the use of Bessel light beams in optical-acoustic microscopy makes it possible to effectively increase the focal depth of the resulting photoacoustic image in comparison with a conventional Gaussian light beam. The use of different types of BLB polarization modes is explained by the fact that BLBs have a number of unique properties, for example, non-diffraction of propagation in space.

Promising material in various fields of science and technology are carbon nanotubes (CNTs). One of the main advantages of these structures is the ability to control the properties of the created CNT layers (Figure 1) by changing the geometric dimensions and configuration of nanoobjects.

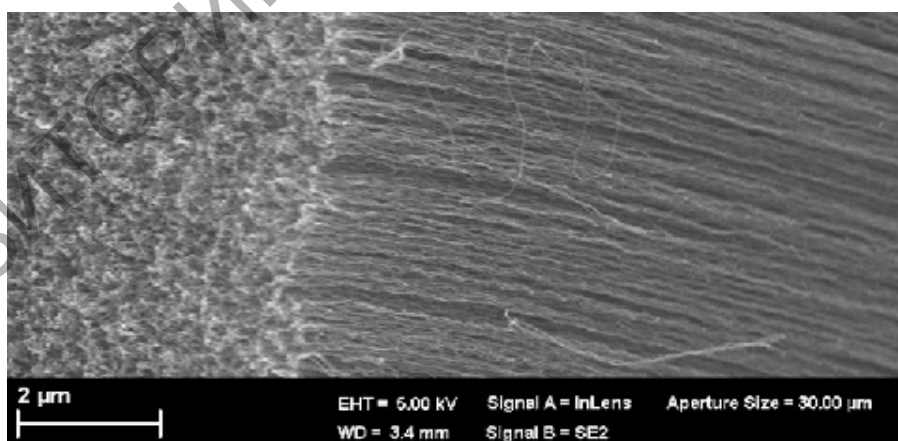


Figure 1 – Cross-section of a CNT array (Focussed ion beam scanning electron microscope, Zeiss–Neon 40 EsB) [5]

The classical theory of electrodynamics can not always be applied to the description of nanotubes. Consequently, it is required to search for new quasiclassical theoretical approaches and studies that would enable us to solve the problems of micro- and macroscopic electrodynamics [6], which underlie the theoretical basis of modern photoacoustic spectroscopy.

This paper is devoted to the construction of a model of photoacoustic conversion of BLB modes in a layer of chiral and achiral carbon nanotubes for the case of piezoelectric recording of the resultant signal.

### 1. Conductivity of chiral and axial carbon nanotubes

By analogy with [6], the conductivity of chiral CNTs in cylindrical coordinates is determined by the relation, (electron velocity  $v_e \ll c$ ,  $c$  – speed of light)

$$\sigma_{zz}(\omega) = -\frac{2P_0ie^2}{\pi\hbar\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \frac{1}{(\omega + i\nu)} \sum_{s=1}^m v_z^2(p_z, s) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}, \quad (1)$$

where the expression for the velocity projection

$$v(p_z) = \pm \frac{\sqrt{3}\gamma_0 a}{\hbar\sqrt{n^2 + nm + m^2}} [m \sin(\psi_1 - \psi_2) - n \sin(\psi_1 + \psi_2) - (n + m) \sin 2\psi_2] / (1 + 4 \cos \psi_1 \cos \psi_2 + 4 \cos^2 \psi_2),$$

$$\psi_1(p_z) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \left( \frac{3\pi q(n + m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}ap_z(n - m)}{4\hbar} \right),$$

$$\psi_2(p_z) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \left( \frac{\pi q(n - m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}ap_z(n + m)}{4\hbar} \right)$$

For CNTs of the zigzag type, the expressions for the axial conductivity are expressed by the formula

$$|\sigma_{zz}(\omega)| = \frac{2w_{cn}e^2P_0}{\sqrt{3}\pi^2 R_{cn} \sqrt{(\omega^2 + \nu^2)} k_B T} \sum_{s=1}^m \frac{\exp(\varepsilon_0 / k_B T)}{[1 + \exp(\varepsilon_0 / k_B T)]^2},$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(P_0) = \gamma \sqrt{1 + 4 \cos(aP_0) \cos\left(\frac{\pi S}{m}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi S}{m}\right)}.$$

Also obtained expression describing the axial conductivity in carbon nanotubes armchair type

$$|\sigma_{zz}(\omega)| = \frac{2w_{cn}e^2P_0}{\pi^2 R_{cn} \sqrt{(\omega^2 + \nu^2)} k_B T} \sum_{s=1}^m \frac{\exp(\varepsilon_0 / k_B T)}{[1 + \exp(\varepsilon_0 / k_B T)]^2},$$



$$\varepsilon_0 = \varepsilon(P_0) = \gamma \sqrt{1 + 4 \cos\left(\frac{a\hbar S}{R_0}\right) \cos\left(\frac{aP_0}{\sqrt{3}}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{aP_0}{\sqrt{3}}\right)}.$$

The expression for the projection of the electron velocity vector on the  $z$  axis is obtained with allowance for the formula  $v(p_z) = \partial\varepsilon(\mathbf{p})/\partial p_z$  [7] and the relationship for the energy distribution within the tight-binding approximation, which takes into account the interaction of only the nearest neighboring atoms in the hexagonal structure [8, 9].

## 2. Dissipation of energy of Bessel light beams in chiral and achiral carbon nanotubes

The effect of a Bessel light beam on the absorbing layer of chiral nanotubes leads to a periodic change in the temperature field, which can be described by the equation of thermal conductivity

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\beta_S} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2k_S} Q(1 + e^{i\Omega t}), \quad (2)$$

where  $\beta_S = k_S / \rho_0 \cdot C$  is effective coefficient of thermal diffusivity,  $k_S$  is coefficient of thermal conductivity,  $\rho_0$  is density of a layer of carbon nanotubes,  $C$  is specific heat of a layer of CNTs,  $\Omega$  is modulation frequency.

In equation (2)  $Q$  is volume density of thermal sources, which is determined by the expression

$$Q = \sigma_{cn} |E|^2, \quad (3)$$

where  $|\sigma_{cn}| = 2\pi \cdot |\sigma_{zz}| / \lambda$  is conductivity of the CNT layer. Substituting into (3) the relation describing the intensity of the wave, it is easy to obtain the energy dissipation rate

$$Q = 2\alpha_0 I_0 e^{-2\alpha_{eff} z} = 2\sigma_{cn} / (c\sqrt{\varepsilon'}\varepsilon_0) I_0 e^{-2\alpha_{eff} z}. \quad (4)$$

In the formula (4)  $I_0$  is Proceeding from the geometry of chiral and achiral carbon nanotubes, it is expedient to write equation (2) in a cylindrical coordinate system. The absorption coefficient in (3) is defined as follows

$$\alpha_0 = (\omega / c) \cdot (\varepsilon'' / \sqrt{\varepsilon'}) = (\omega / c) \cdot (\varepsilon'' / n).$$

Conductivity is related to the imaginary part of the dielectric constant by the formula  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ ,  $\varepsilon'' = 4\pi \cdot \sigma / \omega$ .

Thus, in cylindrical coordinates, the energy dissipation rate of Bessel light beams (BLB) in the layer of absorbing carbon chiral nanotubes can be represented as follows

$$Q^{TE} = \frac{2|\sigma_{cn}|I_0}{c\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_0}} \frac{c}{4\pi} k_0 \varepsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2) \left[ \frac{m^2}{(q\rho)^2} J_m^2(qr) + J_m'^2(qr) \right] \exp(-\alpha_{eff} z), \quad (5)$$

where  $\alpha = 2k_{zz}$ .

### 3. Calculation of the resulting photoacoustic signal

Let us determine the amplitude of the photoacoustic signal arising in the layer of chiral CNTs upon irradiation by the TE mode of the BLB, based on the use of the piezoelectric method of recording the signal in accordance with the scheme shown in figure 2.

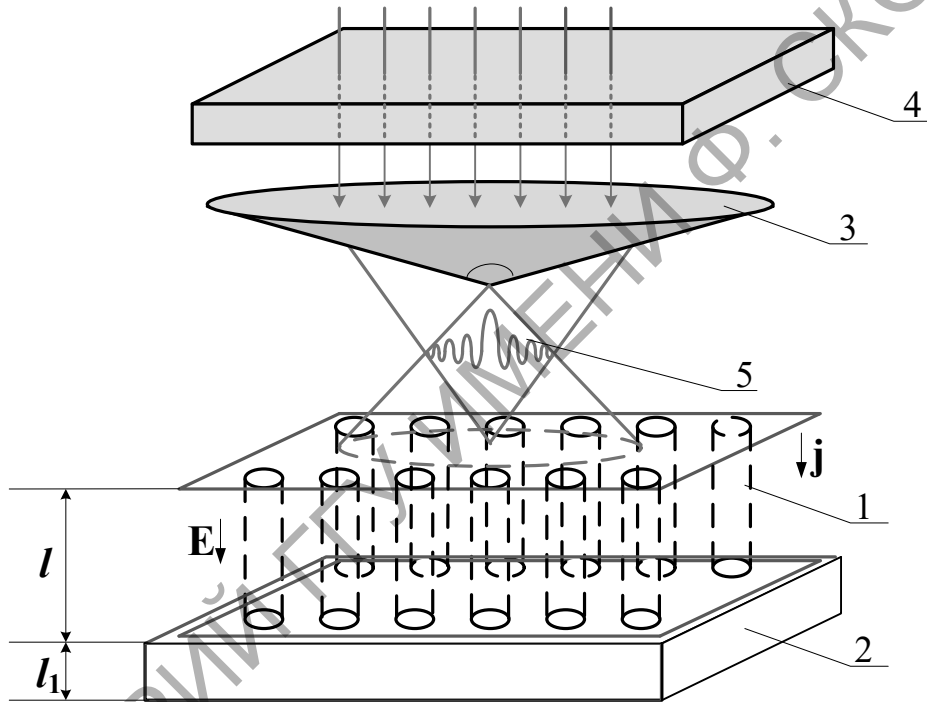


Figure 2 – The scheme of registration of a photoacoustic signal:  
 1 – the layer of chiral or achiral CNTs; 2 – piezoelectric detector; 3 – axicon;  
 4 – modulator; 5 – Bessel light beam

The simultaneous solution of the heat equation (2) and the equations for thermoelastic deformations in the sample and piezoelectric transducer  $l_1$  allows us to find an expression for the photoacoustic signal.

Assuming the boundaries of the "sample-piezoelectric detector" system to be free ( $\sigma(l=0) = 0$ ,  $\sigma(l_1=0) = 0$ ) and also using the technique described in [10], we will find the expression for the no-load voltage  $V^{TE}$  on a piezo transducer

$$V^{TE} = \frac{e}{\varepsilon_S} (U_P|_{z=l_1} - U_P|_{z=0}) = \frac{e}{\varepsilon_S} Z R^{TE}. \quad (6)$$

In relation (5), the factor  $Z$

$$Z = \frac{\sin^2(k_1 \Delta l / 2)}{m_0 \sin k_1 \Delta l \cos kl + \cos k_1 \Delta l \sin kl} \quad (7)$$

describes the purely acoustic properties of the "carbon nanotube-piezoelectric detector" system, and the factor  $R^{TE}$

$$R^{TE} = \frac{\bar{E}^{TE} B_0 k}{(\lambda_l + 2\mu_l) k_S \sigma_S^2 \alpha_{ef}} \left[ \frac{1 + \mu_1 + \mu_2^2 + \mu_3^2}{(1 + \mu_1) \cdot (1 + \mu_2^2) \cdot (1 + \mu_3^2)} \right] \quad (8)$$

determines the dissipative, dielectric, thermophysical, and thermoelastic properties of the sample under study, as well as the polarization and energy parameters of the BLB.

In the expressions (5)–(7) the following notation is introduced:  $U(z)$ ,  $U_p(z)$  are elastic displacements in the CNT layer and piezoelectric transducer;  $v_{cn}$ ,  $v_p$  are values of velocities of elastic longitudinal waves,  $B_0$  is the bulk modulus,  $c^T = \lambda_l + 2/3 \mu_l$ ,  $\lambda_l$ ,  $\mu_l$  are the Lamé coefficients,  $a_0$  is coefficient of volumetric thermal expansion,  $\sigma$  – values of elastic stresses,  $\sigma_S = (1 - i)a_S$ ,  $a_S = (\Omega/2\beta_{cn})^{1/2}$  is effective coefficient of thermal diffusion of the sample,  $\beta_{cn}$  is effective coefficient of sample thermal diffusivity,  $\mu_1 = \alpha_{eff}/\sigma_S$ ,  $\mu_2 = k/\sigma_S$ ,  $\mu_3 = k/\alpha_{eff}$ ,  $k_1 = \Omega/v_p$  is wave number of an elastic wave in a piezoelectric transducer,  $k = \Omega/v_{cn}$  is wave number of a sound wave in a sample,  $m_0 = (k_1 c^D)/(k c^T)$ ,  $c^D = c^E (1 + e^2/\varepsilon^S c^E)$ ,  $c^E$  is coefficient of rigidity of a piezoelectric,  $e$  – piezoelectric module,  $\varepsilon^S$  – dielectric constant of a piezoelectric crystal,

$$\bar{E}^{TE} = \eta a_t \alpha_{ef} E^{TE}, \quad E^{TE} = A^{TE} / (\alpha_{ef}^2 - \sigma_S^2),$$

$$A^{TE} = \frac{2|\sigma_{cn}| I_0}{c \sqrt{\varepsilon' \varepsilon_0}} \frac{c}{4\pi} k_0 \varepsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2) \left[ \frac{m^2}{(q\rho)^2} J_m^2(qr) + J_m'^2(qr) \right],$$

$J_m'(q\rho) = \partial J_m(q\rho)/\partial \rho$  is derivative of the Bessel function  $J_m(q\rho)$  from the radial coordinate  $\rho$ . Analysis of expression (6) for the amplitude of the photoacoustic signal showed the presence of resonant peaks in the region of gigahertz frequencies (Figures 3, 4).

We note that we have considered a particular case of the free boundaries of the "sample-piezotransducer" system. In this case, the potential difference recorded by the detector is determined by the formulas (6)–(8). When the boundary conditions change, the relationships for calculating the potential difference appearing in the detector will change. Under conditions where the boundaries of the "sample-piezoelectric detector" system are fixed ( $U(0) = 0$ ,  $U(l + l_1) = 0$ ) or alternately loaded ( $\sigma(0) = 0$ ,

$U(l + l_1) = 0; \sigma(l + l_1) = 0$  ( $U(0) = 0$ ), other expressions for the potential difference are obtained. However, even in these particular situations, the main regularities of the photoacoustic transformation of the TE-mode of the BLB in magnetically low-dimensional structures correspond to those revealed on the basis of the model of free boundaries.

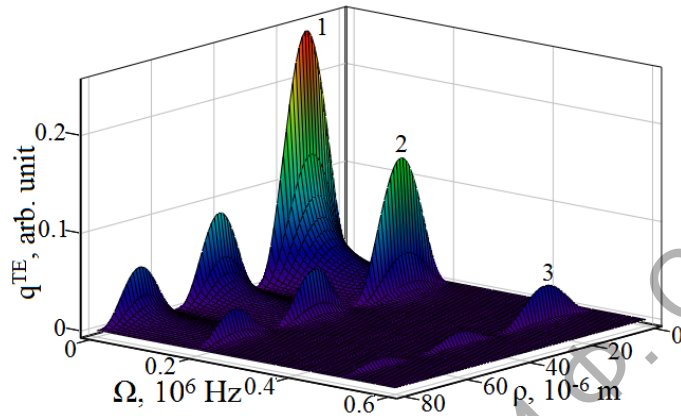


Figure 3 – Dependence of the amplitude of the PA signal on the radial coordinate and modulation frequency of the BLB ( $m = 0, \alpha = 1^\circ$ )

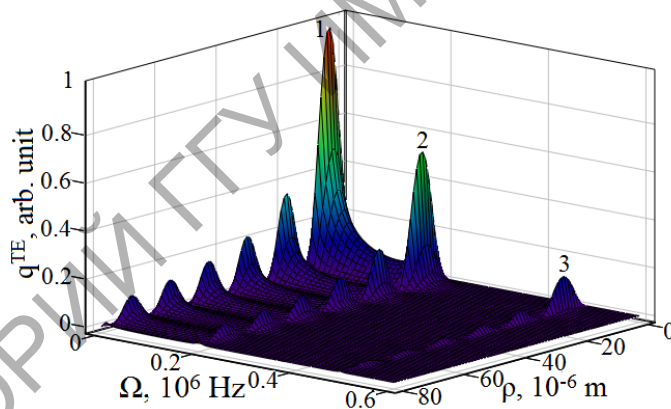


Figure 4 – Dependence of the amplitude of the PA signal on the radial coordinate and modulation frequency of the BLB ( $m = 0, \alpha = 2^\circ$ )

Using expression (6) for the idling voltage, it is possible to determine the amplitudes of photoacoustic signals for the system "sample-piezoelectric transducer" with alternately loaded boundaries:

$$\begin{cases} \sigma(l) = \sigma_p(l), \\ U(l) = U_p(l), \\ \sigma(0) = 0, \\ U_p(l_1) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \sigma(l) = \sigma_p(l), \\ U(l) = U_p(l), \\ \sigma_p(l_1) = 0, \\ U(0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

The difference in the amplitude of the displacement of the boundaries of the system when the boundary conditions (9) is realized is determined by the following relation

$$U^{TE} = \frac{A'_1 C'_2 - A'_2 C'_1}{A'_1 B'_2 + A'_2 B'_1} (e^{-2i k_1 l_1} e^{i k_1 l} - e^{-i k_1 l}), \quad (11)$$

where

$$\begin{aligned} A'_1 &= 2k c^T \sin kl; \quad A'_2 = 2 \cos kl; \\ B'_1 &= ik_1 c^D (e^{-2ik_1 l_1} e^{ik_1 l} + e^{-ik_1 l}); \quad B'_2 = (e^{-2ik_1 l_1} e^{ik_1 l} - e^{-ik_1 l}); \\ C'_1 &= G'_3 e^{i kl} - G'_1; \quad C'_2 = -\frac{i G'_3}{k c^T} e^{i kl} + G'_2; \\ G'_1 &= E' B_0 \alpha_t \left( \alpha_{eff} \left( \frac{\alpha_{eff} e^{-\alpha_{eff} l}}{\alpha_{eff}^2 + k^2} - \frac{\sigma_S e^{-\sigma_S l}}{\sigma_S^2 + k^2} \right) + \left( \frac{\alpha_{eff}}{\sigma_S} e^{-\sigma_S l} - e^{-\alpha_{eff} l} \right) \right); \\ G'_2 &= E' \frac{B_0 \alpha_t \alpha_{eff}}{c^T} \left( \frac{e^{-\alpha_{eff} l}}{\alpha_{eff}^2 + k^2} - \frac{e^{-\sigma_S l}}{\sigma_S^2 + k^2} \right); \\ G'_3 &= E' B_0 \alpha_t \left( \alpha_{eff} \left( \frac{\alpha_{eff}}{\alpha_{eff}^2 + k^2} - \frac{\sigma_S}{\sigma_S^2 + k^2} \right) + \left( \frac{\alpha_{eff}}{\sigma_S} - 1 \right) \right); \\ E' &= Q^{TE} / (\alpha_{eff}^2 - \sigma_S^2); \quad c^D = c^E (1 + e^2 / \varepsilon^S c^E). \end{aligned}$$

It is also easy to obtain an expression for the potential difference, taking into account the boundary conditions (10):

$$U^{TE} = \frac{A''_1 C''_2 + A''_2 C''_1}{A''_1 B''_2 - A''_2 B''_1} (2e^{-2ik_1 l_1} - e^{-2ik_1 l_1} e^{ik_1 l} - e^{-ik_1 l}), \quad (12)$$

where

$$\begin{aligned} A''_2 &= 2i \cos kl; \quad A''_1 = 2i \sin kl; \\ B''_2 &= (e^{-2ik_1 l_1} e^{ik_1 l} + e^{-ik_1 l}); \quad B''_1 = ik_1 c^D (e^{-2ik_1 l_1} e^{ik_1 l} - e^{-ik_1 l}); \\ C''_1 &= ik c^T G''_3 e^{i kl} + G''_1; \quad G''_2 = G'_2, \\ C''_2 &= -G''_3 e^{i kl} + G''_2; \quad G''_1 = G'_1; \end{aligned}$$

$$G_3'' = E'B_0\alpha_t\alpha_{eff} \left( \frac{1}{\alpha_{eff}^2 + k^2} - \frac{1}{\sigma_S^2 + k^2} \right).$$

Analyzing expressions (11) and (12), we see that the amplitude of the photoacoustic signal is determined in a rather complicated manner and depends on many parameters of the "sample-piezoelectric converter" system. In addition, the magnitude of the resulting signal is significantly affected by the modulating action of Bessel light beams (Figure 5).

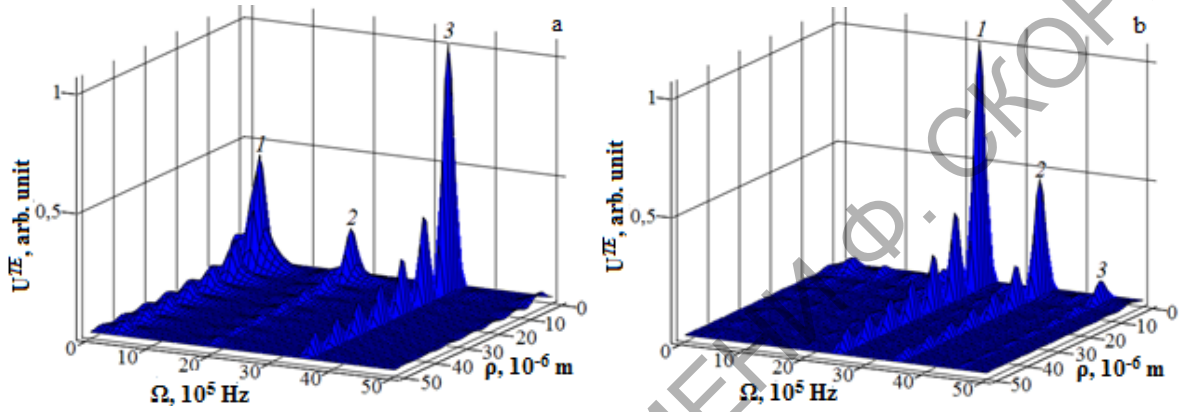


Figure 5 – Dependence of the amplitude of the photoacoustic signal  $U^{TE}$  on the radial coordinate when receiving the modulation frequency  $\Omega$ :  
*a* – the dependence under the boundary conditions (11);  
*b* – dependence under the boundary conditions (12)

As a result of the graphical analysis of expressions (11), (12), a resonant increase in the amplitude was detected.

It should be noted that the amplitude and position of the resonant peaks depend on the type of the boundary conditions imposed on the "sample-piezoelectric converter" system. At the same time, the tendency is generally to decrease the amplitudes of the resonance coordinates, as well as to identify and eliminate inconsistencies.

It can also be seen from the figures that an increase in the cone angle of a BLB affects the frequency of the appearance of resonant peaks as a function of the radial coordinate  $\rho$ . Controlling the amplitude of the resulting signal resulting from the modulated absorption of the light beam can be realized by using the taper angle adjustment schemes of the BLBs acting on the basis of the electrochotic Pockels effect [11, 12].

Thus, the model of photoacoustic transformation in the layer of chiral and achiral carbon nanotubes irradiated by the TE-mode of a Bessel light beam is constructed.

## References

1. Thermo-optical Sound generation by Bessel light beams in nonlinear crystals / G.S. Mityurich [et al.] // *International Journal of Thermophysics*. – 2011. – Vol. 32, № 4. – P. 844–851.

2. Bessel-beam Grueneisen relaxation photoacoustic microscopy with extended depth of field / J. Shi [et al.] // *Journal of Biomedical Optics*. – 2015. – Vol. 20(11). – p. 116002-1–116002-6.

3. Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bessel beam plane illumination / T.A. Planchon [et al.] // *Nature Methods*. – 2011. – Vol. 8. – p. 417–423.

4. Multicolor 4D fluorescence microscopy using ultrathin Bessel light sheets / T. Zhao [et al.] // *Scientific Reports*. – 2016. – Vol. 6. – p. 26159-1–26159-5.

5. Trivedi, S. Effect of vertically aligned carbon nanotube density on the water flux and salt rejection in desalination membranes / S. Trivedi, K.E. Alameh // *SpringerPlus*. – 2016. – Vol. 5(1). – p. 1158-1–1158-13.

6. Слепьян, Г.Я. Современные тенденции развития наноэлектромagnetизма: аналит. обзор / НИУ «Ин-т ядерных проблем» БГУ; сост. Г.Я. Слепьян, С.А. Максименко, П.П. Кужир. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 71 с.

7. Митюрин, Г.С. Фотодефлекционный сигнал, генерируемый беселевым световым пучком в плотном слое углеродных нанотрубок / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков. // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2015. – Т. 25, № 4. – С. 20–27.

8. Saito, R. Physical properties of carbon nanotubes / R. Saito, M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus. – London: Imperial College Press, 1999. – 251 p.

9. Mintmire, J.W. Electronic and structural properties of carbon nanotubes / J.W. Mintmire, C.T. White // *Carbon*. – 1995. – Vol. 33, Iss. 7. – P. 893–902.

10. Mityurich, G.S. Photoacoustic transformation of Bessel light beams in magnetoactive superlattices / G.S. Mityurich, E.V. Chernenok, V.V. Sviridova, A.N. Serdyukov // *Crystallography Reports*. – 2015. – Vol. 60, № 2. – P. 273–279.

11. Устройство управляемой термооптической генерации акустической волны: пат. 10757u Респ. Беларусь, МПК (2006.01) G10K 11/00 / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков; заявитель ГГУ им. Ф. Скорины. – № u 20150083; заявл. 09.09.2015; опубл.

30.09.2015 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2015. – № 4. – С. 146.

12. Устройство управляемой лазерной генерации звука: пат. 11032u Респ. Беларусь, МПК (2006.01) G10K 11/00 / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков; заявитель ГГУ им. Ф. Скорины. – № u 20150378; заявл. 06.11.2015; опубл. 30.04.2016 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2016. – № 2. – С. 162–163.

**Roza Navitskaya, Ihar Stashkevich**  
Belarusian State University, Minsk, Belarus

## **DUAL-POLARIZATION GENERATION IN THE ND:YAG LASER**

### **Introduction**

Dual-polarization laser generation in dynamic mode is currently used for some interesting applications [1, 2]. We propose using it for passive cavity dumping by the second harmonic generation in the mode locked laser. In this case it is important to have the same radiation intensity at both polarizations.

In this paper, we investigate the effect of the difference between inactive loss coefficients and cavity optical lengths for simultaneously generated polarizations on their intensities.

### **1. Theoretical model**

Dual-polarization generation in dynamic regime is simulated with the use of simple scalar model. The main approximations used in the model are as follows:

- a) The pump source (a lamp) produces unpolarized radiation.
- b) The *Nd: YAG* active laser medium properties are independent of the optical field polarization: stimulated emission cross-section  $\sigma_e$  and refractive index  $n$  of the medium are equal for both polarizations, anisotropic properties of the  $Nd^{3+}$  ions are not considered.
- c) The cavity anisotropies consist in different coefficients of losses  $\gamma$  and optical cavity lengths  $L_{opt}$  for radiation with different polarizations.

Our model may be used to investigate quantitative behavior of the described system, although it may be not enough for more complicated cases. To describe the laser generation in more detailed and correct way, the cor-



responding vector models should be used [3]. Such models allow to take into account the polarization of the pump laser and other factors besides the cavity anisotropies that may influence the polarization states of lasers, as well as consider crystal symmetry and anisotropic properties of the ions at different sites.

The proposed model is based on the rate equations for the point model of active medium [4]. The 4-level generation scheme is considered.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS'}{dt} &= \frac{nL_{LC}}{L_{opt}'} v_c \sigma_e S' (n_2 - n_1) - \frac{c\gamma' L_{LC}}{L_{opt}'} S' \\
 \frac{dS''}{dt} &= \frac{nL_{LC}}{L_{opt}''} v_c \sigma_e S'' (n_2 - n_1) - \frac{c\gamma'' L_{LC}}{L_{opt}''} S'' \\
 \frac{dn_1}{dt} &= \sigma_e (S' + S'') (n_2 - n_1) - \frac{n_1}{\tau_1} + \frac{n_2}{\tau_2} \\
 \frac{dn_2}{dt} &= \sigma_e (S' + S'') (n_1 - n_2) + \frac{n_3}{\tau_3} - \frac{n_2}{\tau_2} \\
 \frac{dn_3}{dt} &= \frac{P}{s_{LC} h \nu_a} \sigma_a (N_s - n_1 - n_2 - n_3) - \frac{n_3}{\tau_3}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Here  $S'$  and  $S''$  correspond to the photon flux densities of the radiation with different polarizations,  $n_i$  describe the carrier densities at different energy levels. Other *Nd:YAG* crystal parameters used in the calculations: pump wavelength  $\lambda_a = 808$  nm, emission wavelength  $\lambda_e = 1064$  nm, absorption cross-section  $\sigma_a = 7,7 \cdot 10^{-20}$  cm<sup>2</sup>, emission cross-section  $\sigma_e = 28 \cdot 10^{-20}$  cm<sup>2</sup>, refractive index  $n = 1,82$ , crystal length  $L_{LC} = 6$  cm, crystal surface area  $s_{LC} = 9,425$  cm<sup>2</sup>, lifetime at <sup>4</sup>F<sub>3/2</sub> level  $\tau_2 = 230$  mcs, lifetime at <sup>4</sup>F<sub>5/2</sub> level  $\tau_3 = 10$  ns, lifetime at <sup>4</sup>I<sub>11/2</sub> level  $\tau_1 = 30$  ns, total *Nd*<sup>3+</sup> ion density (concentration 1%)  $N_s = 1,38 \cdot 10^{20}$  cm<sup>-3</sup>.

System (1) is used to calculate time dependence of photon flux densities  $S'$  and  $S''$  (and intensities  $I = S \cdot h \nu_e$ ) for the given parameters – pump power  $P$ , cavity optical lengths  $L_{opt}'$ ,  $L_{opt}''$  and coefficients of losses in the cavity  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  for different polarizations. Initial values of pump power, cavity optical length and losses used in the calculations are  $P = 2$  kW,  $L_{opt} = 65$  cm,  $\gamma = 0,003$  cm<sup>-1</sup> respectively. The coefficient of losses  $\gamma = 0,003$  cm<sup>-1</sup> and crystal length  $L_{LC} = 6$  cm are equivalent to the output mirror reflectivity of 96,5%.

## 2. Results

The first important conclusion follows from the first two equations of the system (1). It describes the condition of simultaneous existence of non-zero  $S'$  and  $S''$  values in the steady-state:  $\gamma' = \gamma''$ . This observation is confirmed with the simulations of laser generation in dynamics. Figures 1a, 1b show time dependencies of  $I'$  and  $I''$  for  $\gamma' \neq \gamma''$  and  $L_{opt}' \neq L_{opt}''$ .

The intensity of the polarization with bigger  $\gamma$  finally goes to zero independently of the other parameter values. The difference between losses  $\gamma' - \gamma''$  and cavity optical lengths  $L_{opt}' - L_{opt}''$  as well as the pump power  $P$  influence only the dynamics of the generation and time needed to achieve the steady-state.

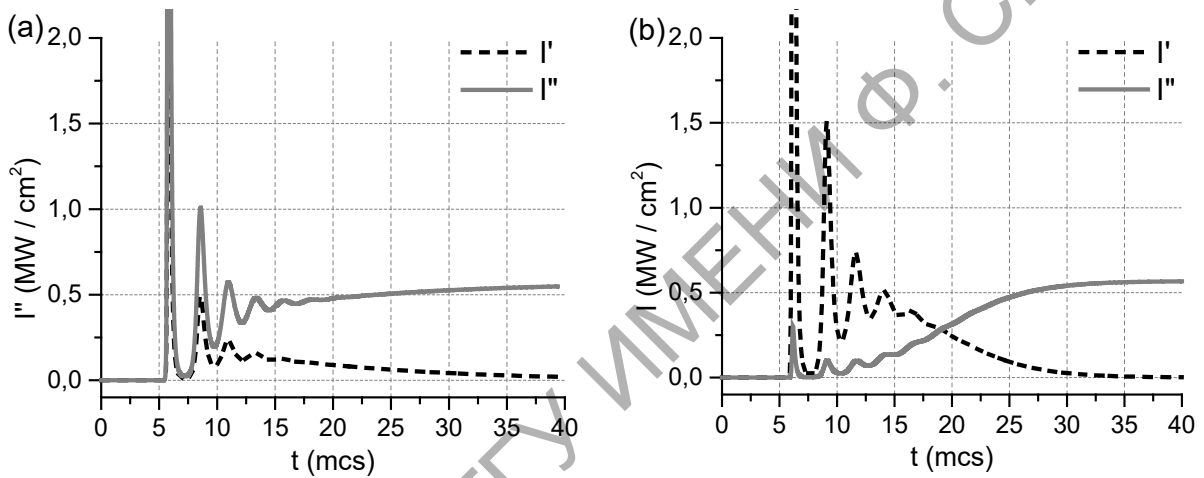


Figure 1 – Time dependence of the  $I'$  and  $I''$  for two polarizations for  
 (a)  $P=2kW$ ,  $L_{opt}'=L_{opt}''=65$  cm,  $\gamma'=0,00303$  cm $^{-1}$ ,  $\gamma''=0,003$  cm $^{-1}$  ( $\Delta\gamma/\gamma''=1\%$ );  
 (b)  $P=2$  kW,  $L_{opt}'=60$  cm,  $L_{opt}''=65$  cm ( $\Delta L_{opt}/L_{opt}''=-7,7\%$ ),  $\gamma'=0,0031$  cm $^{-1}$ ,  
 $\gamma''=0,003$  cm $^{-1}$  ( $\Delta\gamma/\gamma''=33\%$ )

In the case when the condition  $\gamma' = \gamma''$  is fulfilled, the ratio  $I'/I''$  of the  $I'$  and  $I''$  steady-state values are defined by the ratio of the corresponding cavity optical lengths  $L_{opt}'/L_{opt}''$  (Figure 2). The observed dependence  $I'/I''$  ( $L_{opt}'/L_{opt}''$ ) is exponential.

In reality the generation is realized at different longitudinal modes, and losses in the cavity are not equal for them (and may be also not constant in time). This situation may be simulated by specifying  $\gamma'$  and  $\gamma''$  fluctuating in time around the average value. Figure 3 shows an example of the generation dynamics for both polarization modes and their losses time dependence in such case.

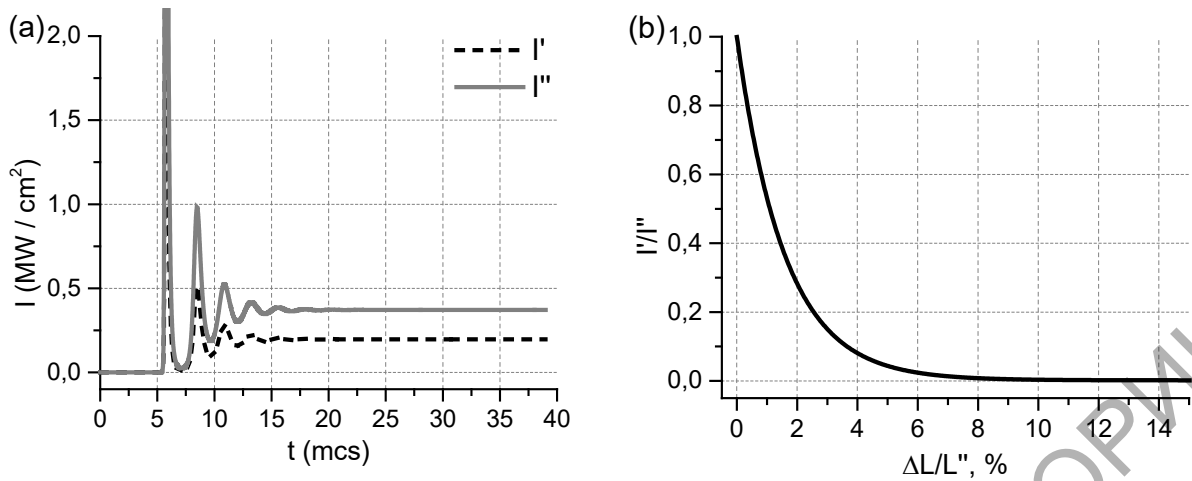


Figure 2 – (a) Time dependence of the  $I'$  and  $I''$  for two polarizations for  $P=2kW$ ,  $\gamma'=\gamma''=0,003\text{ cm}^{-1}$ ,  $L_{opt}'=65,65\text{ cm}$ ,  $L_{opt}''=65\text{ cm}$  ( $\Delta L_{opt}/L_{opt}''=1\%$ );  
 (b) Dependence of the intensity ratio  $I'/I''$  on the cavity length ratio  $L_{opt}'/L_{opt}''$  for  $P=2\text{ kW}$ ,  $\gamma'=\gamma''=0,003\text{ cm}^{-1}$  ( $L_{opt}''=65\text{ cm}$ ,  $L_{opt}'>L_{opt}''$ )

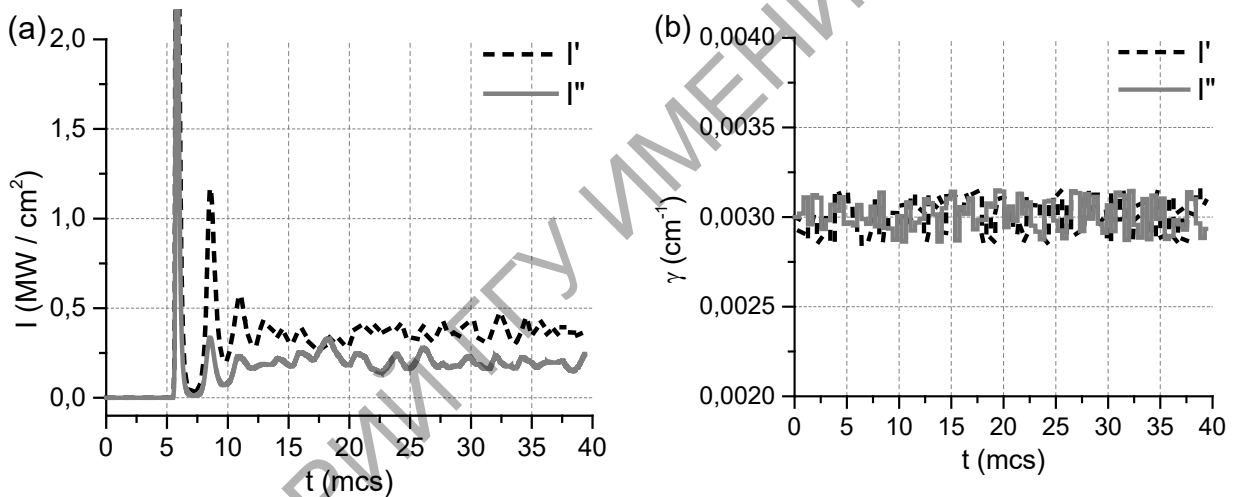


Figure 3 – Time dependence of the  $I'$ ,  $I''$  (a) and  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  (b); both  $\gamma'$  and  $\gamma''$  are fluctuating randomly in the range of 5% about the average value of  $0,003\text{ cm}^{-1}$  with the period of  $\sim 430\text{ ns}$  (100 cavity round-trips)

In the described case none of both polarization modes intensities goes to zero with time as the average values of losses for them remain approximately equal.

### 3. Experiment

The experimental setup sketched in Figure 4 was used to obtain dual-polarization generation in the Nd: YAG laser with lamp pumping.

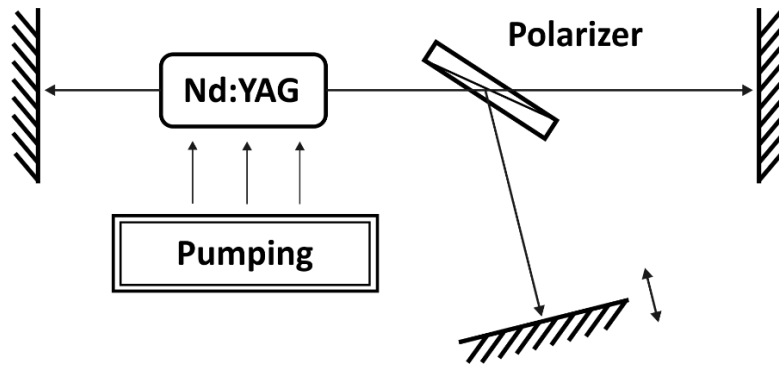


Figure 4 – Experimental setup

The beams with two orthogonal polarizations were separated with the use of a polarizer inclined at Brewster's angle ( $57^\circ$  between the normal and beams propagation directions). The output mirror common for two polarization modes had reflectivity of 53%, the other mirrors were highly reflective and equal for both beams. One of the end mirrors was placed on the moving mount, so it was possible to change the cavity length for one of the beams.

We obtained the simultaneous generation on two polarizations for a pulsed laser operation. The pulse shapes for orthogonal polarization modes are shown in Figure 5.

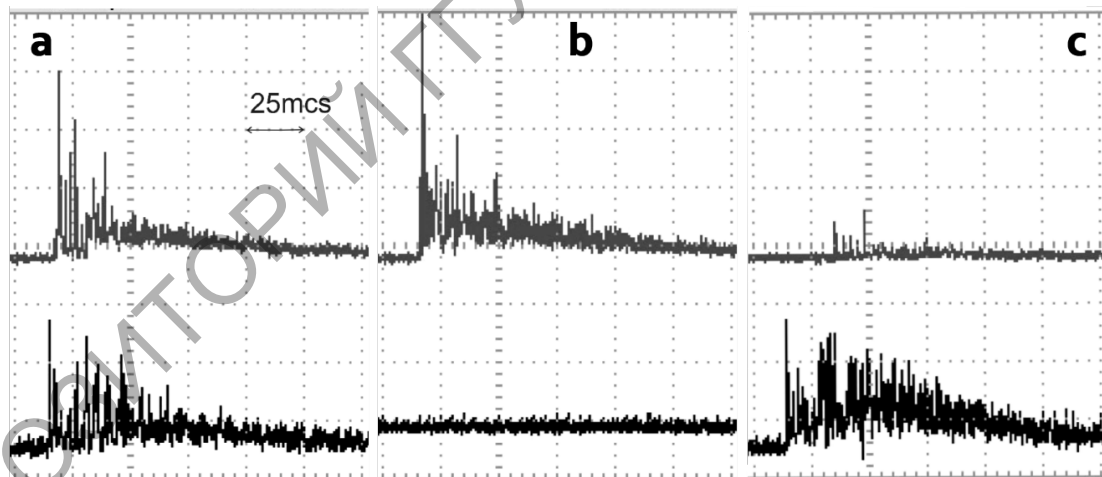


Figure 5 – Pulse profiles for different polarizations: *a* – coefficients of losses in the cavity  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  for different polarizations are almost the same (no additional losses), *b* – additional losses for the beam corresponding to the lower curve, *c* – additional losses for the beam corresponding to the upper curve

Figure 5a shows that the pulse profiles for two polarization modes are different. The Figure 5b and 5c show the pulse profiles when additional

losses were added into the cavity of one of the polarized beams (we used a glass plate increasing losses by  $\sim 16\%$  for the cavity round-trip). This led to a significant decrease of the corresponding beam intensity and relative increase of intensity of the other beam.

#### 4. Conclusions

The effect of the difference in loss coefficients and cavity lengths for different polarizations on the ratio of the intensities of the generated beams was studied. We have shown that generation at different polarizations in the dynamic mode is possible with different loss factors for them. At different optical cavity lengths for different polarizations, generation is possible in continuous mode if the loss coefficients are the same. In this case, the intensity of beams with orthogonal polarizations will be different.

#### References

1. Khelifa, Naceur-Eddine. Traceability of small force measurements and the future international system of units (SI) / Naceur-Eddine Khelifa, Philippe Averlant, Marc Himbert Int. J. Metrol. Qual. Eng. – 2016. – Vol.7. – P. 306–313.
2. M. Brunel Dual-polarization microchip laser at  $1,53 \mu\text{m}$ . / M. Brunel, A. Amon, M Valet. – 2005. – Opt. Lett. – Vol. 30. – P. 2418–2420.
3. Dalgliesh, R. Polarization States of a Single-Mode (Microchip) Nd:YAG Laser – Part I: Theory / R. Dalgliesh, A. D. May, and G. Stephan. – 1998. – IEEE Journal of quantum electronics. – Vol. 34 – P. 1485–1492.
4. Stashkevich, I.V. Cavity Dumping by the Second Harmonic Generation / I.V.Stashkevich, R.I.Navitskaya, A.S Gorbacevich. – BSU Journal. Physics. – 2017. – № 2. – С. 57–62.

**Н.А. Алешкевич, Д.Л. Горбачев, Е.А. Федосенко**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

### **ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ТОНКИХ СЛОЕВ $\text{TiO}_2$ , $\text{SiO}_2$ , $\text{ZnS}$**

#### **Введение**

Оптические интерференционные покрытия практически используются при создании зеркальных, просветляющих покрытий, оптиче-

ских фильтров, эффективных поляризаторов. В настоящее время остается актуальной задача формирования оптических покрытий – как с заданными оптическими характеристиками, так и с высокими физико-механическими свойствами. Покрытия на основе тугоплавких оксидов и полупроводниковых материалов наиболее привлекательны при разработке на их основе многослойных оптических систем, обладающих высокой стойкостью к воздействию лазерного излучения большой мощности, высокой прозрачностью и обеспечивающих высокую степень поляризации взаимодействующего с ними излучения [1, 2].

Целью исследования являлось изучение оптических свойств многослойных покрытий на основе  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{SiO}_2$  и  $\text{ZnS}$ , формируемых посредством электронно-лучевого испарения, в целях определения возможностей их практического использования в качестве поляризаторов оптического излучения, эффективных на определенных длинах волн.

### 1. Методика эксперимента

Многослойные оптические покрытия представляют систему чередующихся слоёв на основе  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{ZnS}$ , различающихся значениями показателя преломления. Нанесение покрытий производилось на установке вакуумного напыления ВУ-1А, оснащенной источником электронно-лучевого испарения УЭЛИ-1 с максимальным ускоряющим напряжением 12 кВ и максимальным током нагрузки 500 мА. Установка модернизирована – дополнена встроенной системой контроля оптических характеристик Iris-0211 (СОК Iris, Беларусь).

Изучение морфологии поверхности покрытий, сформированных на подложках из полированного кремния, осуществлялось с использованием сканирующего зондового микроскопа «Solver P47 PRO» (НТ-МДТ, Россия) в полуконтактном режиме. Анализ снимков производился с использованием программы Gwyddion.

При исследовании оптических свойств покрытий использован спектрофотометр Photon RT (Essent Optics), предназначенный для измерения спектральных характеристик отражения, пропускания и оптической плотности в поляризованном свете в диапазоне длин волн от 200 до 4000 нм. На основании измеренных спектров рассчитывались степень поляризации отражённого излучения  $P_R$  – для образца покрытия, сформированного на непрозрачной кремниевой подложке, и степень поляризации  $P_T$  – для образца, нанесённого на прозрачную подложку из оптического стекла К8, при облучении их под разными уг-

лами, а именно: при углах падения излучения 8, 30, 45, 75 градусов. Степень поляризации  $P$  рассчитывалась по формуле:

$$P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}), \quad (1)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  – максимальное и минимальное значения интенсивности излучения, пропущенного анализатором при разных его положениях.

## 2. Результаты и их обсуждение

На основании измеренных спектров отражения однослойных покрытий рассчитаны показатели преломления материала отдельных слоев и спроектирована конструкция семислойного поляризационного покрытия – при выборе рабочей длины волны равной 660 нм. Параметры и характеристики покрытия приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры многослойного покрытия

Номер слоя	Материал	Физическая толщина, нм	Показатель преломления, n
1	SiO <sub>2</sub>	98	1,50
2	ZnS	322	2,06
3	SiO <sub>2</sub>	14	1,50
4	ZnS	61	2,06
5	TiO <sub>2</sub>	279	1,92
6	SiO <sub>2</sub>	69	1,50
7	TiO <sub>2</sub>	213	1,92

В результате анализа морфологии отдельных слоёв и сформированного многослойного покрытия по снимкам, полученным методом атомно-силовой микроскопии (рисунок 1) определены статистические параметры поверхности отдельных слоёв и покрытия (таблица 2).

Как видно на рисунке 1 и в таблице 2, отдельные слои покрытия характеризуются низкими значениями шероховатости поверхности и малым размером зёрен, и эти параметры не оказывают существенного влияния на оптические и геометрические параметры многослойного покрытия в целом.

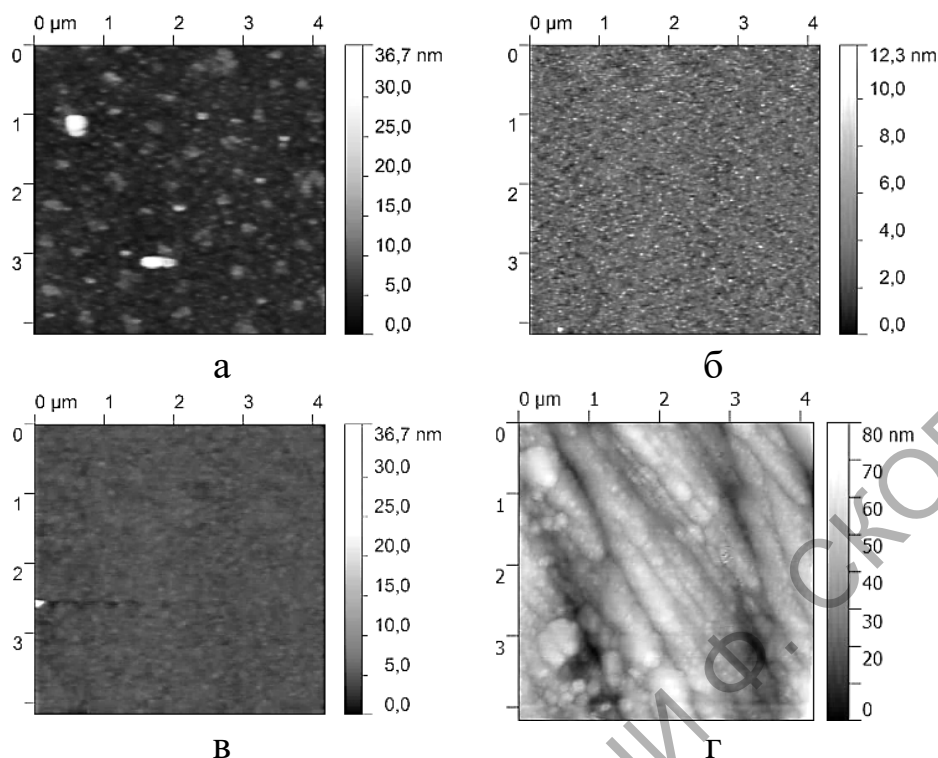


Рисунок 1 – Изображения поверхности покрытий полученные методом атомно-силовой микроскопии: а – SiO<sub>2</sub>; б – фазовый контраст

Таблица 2 – Параметры морфологии поверхности

Тип покрытия	Среднее значение высоты неровности $Z$ , нм	Субшероховатость $R_a$ , нм
SiO <sub>2</sub>	5,79	0,97
TiO <sub>2</sub>	3,76	0,79
ZnS	4,42	0,60
Семислойное SiO <sub>2</sub> + TiO <sub>2</sub> +ZnS	36,8	9,6

Рассчитана степень поляризации  $P_T$  излучения, прошедшего через покрытие, локализованное на прозрачной подложке, и степень поляризации  $P_R$  излучения, отражённого от покрытия, сформированного на подложке из полированного кремния, при разных углах падения излучения на поверхность покрытия. На рисунке 2 приведены диаграммы, иллюстрирующие зависимость  $P_T$  и  $P_R$  от угла падения для излучения с длиной волны 620 нм.



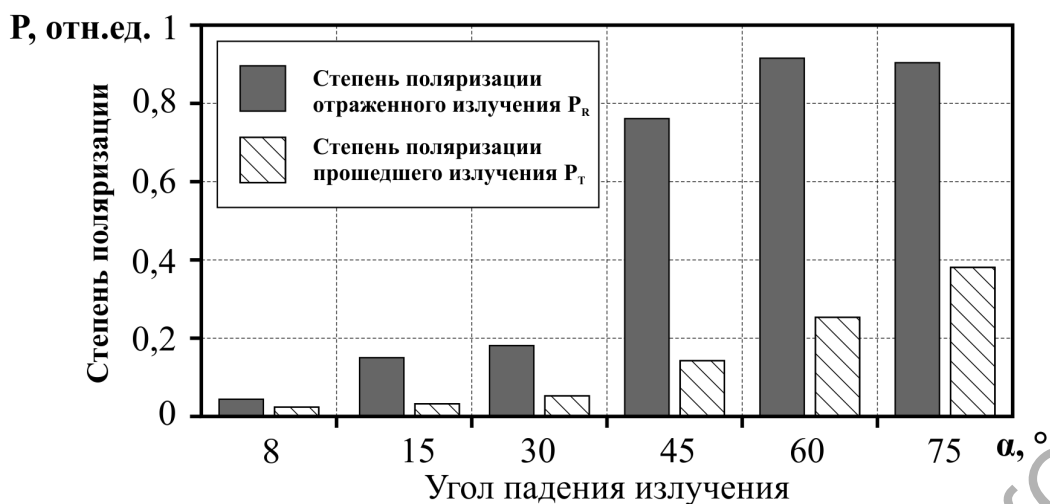


Рисунок 2 – Значения степени поляризации при разных углах падения и  $\lambda = 620\text{нм}$

Как видно на рисунке 2, степень поляризации излучения, отражённого от непрозрачного образца с многослойным покрытием, достигает значения 0,76 уже при угле падения в  $45^\circ$ , и при увеличении угла падения в интервале  $60^\circ - 75^\circ$  возрастает до значения 0,9, и можно сделать вывод о высоких поляризационных свойствах синтезированных покрытий.

### Заключение

Показана возможность нанесения однородных слоёв  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{SiO}_2$  и  $\text{ZnS}$  методом электронного испарения в вакууме, а также создания на их основе эффективных поляризующих оптических элементов. Покрытия данного типа могут применяться для изготовления зеркальных поляризующих оптических систем как элементов для полупроводниковых лазеров, а также оптических покрытий различного функционального назначения – для нужд прикладной оптики и оптоэлектроники.

### Литература

1. Гайнутдинов, И.С. Назначение и свойства оптических интерференционных покрытий / И.С. Гайнутдинов, В.П. Иванов, Е.А. Несмелов // Казань: Из-во ФЭН. – 2002. – 112 с.
2. Тихонравов, А.В. Современное состояние и перспективы развития методов проектирования многослойных интерференционных покрытий / А.В. Тихонравов, М.К. Трубецков // Оптич. журн. – 2007. – Т. 74, № 12. – С. 66–73.

М.А. Аманова<sup>1</sup>, В.Н. Навныко<sup>1</sup>,  
А.В. Макаревич<sup>1</sup>, В.В. Шепелевич<sup>1</sup>, В.В. Юдицкий<sup>2</sup>  
УО «Мозырский государственный педагогический  
университет имени И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь  
УО «Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники», Минск, Беларусь

## ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН НА СМЕШАННОЙ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ ГОЛОГРАММЕ В КРИСТАЛЛЕ $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ СРЕЗА (001)

### Введение

Особенности дифракции световых волн на смешанных (фазово-амплитудных) голограммах в изотропных средах анализировались в [1-3]. В этих работах получены аналитические выражения для нахождения комплексных амплитуд дифрагирующих на голограмме опорной и предметной световых волн. В работе [4] представлено обобщение полученных в [1] результатов для случая анизотропной среды и рассмотрены особенности дифракции на смешанной голограмме в фоторефрактивном кристалле.

В работах [5, 6] дифракция световых волн на пропускающих голограммах в фоторефрактивных кристаллах класса симметрии 23 исследована с учетом оптической активности, обратного пьезоэлектрического эффекта и фотоупругости кристалла. В [5] показано, что для теоретического объяснения экспериментально установленной зависимости дифракционной эффективности пропускающей голограммы, сформированной в кристалле  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (ВТО), от ориентационного угла необходимо предположение о фазово-амплитудной структуре голограммы. В работе [6] предложена теоретическая модель для описания восстановления световой волны на смешанной пропускающей голограмме, сформированной в фоторефрактивном кристалле класса симметрии 23 среза  $(\bar{1}10)$ .

Целью настоящей работы является анализ закономерностей энергетического обмена между опорной и предметной световыми волнами при их встречном взаимодействии на смешанной отражательной голограмме в оптически активном фоторефрактивном пьезокристалле класса симметрии 23. В статье проанализирован вклад амплитудной отражательной голографической решетки в усиление предметной

волны при двухволновом взаимодействии на смешанной отражательной голограмме и поляризационное условие достижения наибольшей интенсивности предметной волны.

### 1. Геометрическая модель

Рассмотрим одновременную дифракцию двух монохроматических линейно поляризованных световых волн – опорной и предметной – на смешанной отражательной голограмме, сформированной в фоторефрактивном кристалле ВТО среза (001), в геометрических условиях, иллюстрированных на рисунке 1.

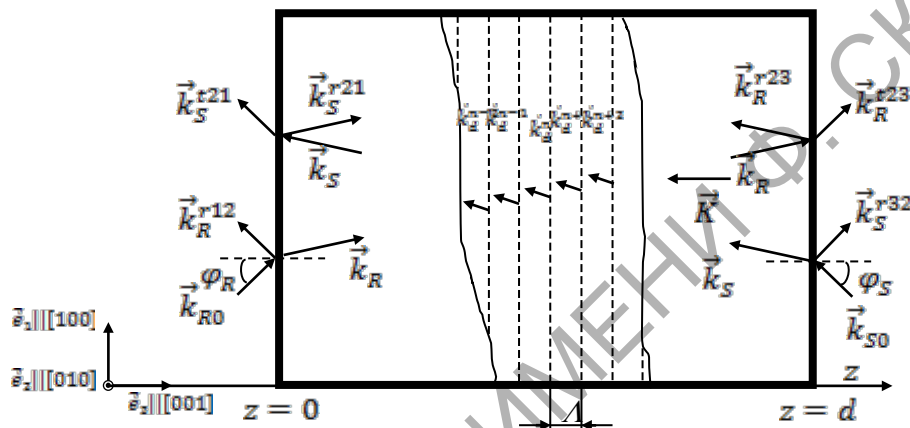


Рисунок 1 – Взаимодействие световых волн на отражательной голограмме в кристалле ВТО

На рисунке 1 связанная с голографическим столом рабочая система координат задана единичными векторами  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , которые в кристаллографической системе координат ориентированы следующим образом:  $\vec{e}_1 \parallel [100]$ ,  $\vec{e}_2 \parallel [010]$ ,  $\vec{e}_3 \parallel [00\bar{1}]$ . Волновые векторы  $\vec{k}_{R0}$  и  $\vec{k}_{S0}$  задают направления падения опорной и предметной волн на кристалл. Единичные векторы  $\vec{e}_{R0} = [\vec{e}_2, \vec{n}_{R0}]$ ,  $\vec{e}_{S0} = -[\vec{e}_2, \vec{n}_{S0}]$  используются для определения азимута поляризации опорной и предметной волн. Единичные векторы  $\vec{n}_{R0}$  и  $\vec{n}_{S0}$  определяют направление волновых нормалей опорной и предметной волн соответственно. Символами  $\vec{R}_0$  и  $\vec{S}_0$  обозначены векторные амплитуды линейно поляризованных опорной и предметной волн. Входные азимуты поляризации  $\Psi_{R0}$ ,  $\Psi_{S0}$  являются мерой углового расстояния между парами векторов  $(\vec{e}_{R0}, \vec{R}_0)$  и  $(\vec{e}_{S0}, \vec{S}_0)$  соответственно. Векторы  $\vec{R}_0$ ,  $\vec{S}_0$ ,  $\vec{e}_{R0}$ ,  $\vec{e}_{S0}$ ,  $\vec{n}_{R0}$ , и  $\vec{n}_{S0}$  на рисунке 1 не показаны.

Примем следующие обозначения для волн, дополнительно взаимодействующих с одной из граней кристалла: индексы t и r поставим

в соответствии преломленной и отраженной волнам; цифрами обозначим порядковые номера сред, с которыми взаимодействует волна. Допустим, что эти среды локализованы в следующих областях пространства: среда 1 – при  $z < 0$ ; среда 2 – в интервале  $0 < z < d$ ; среда 3 – при  $z > d$ . Таким образом, волновые векторы  $\vec{k}_R^{r12}$ ,  $\vec{k}_S^{r32}$  соответствуют световым волнам, формирующимся при френелевском отражении от граней кристалла. Волновые векторы  $\vec{k}_R$  и  $\vec{k}_S$  ( $\vec{k}_R = \vec{k}_R^{t12}$ ,  $\vec{k}_S = \vec{k}_S^{t32}$ ) сопоставляются прошедшим волнам, которые дифрагируют на отражательной голографической решетке, характеризуемой волновым вектором  $\vec{K}$  и пространственным периодом  $\Lambda$ . Вертикальные штриховые линии на рисунке 1 иллюстрируют расположение в кристалле слоев отражательной голографической решетки. Волновые векторы  $\dots, \vec{k}_d^{n-2}, \vec{k}_d^{n-1}, \vec{k}_d^n, \vec{k}_d^{n+1}, \vec{k}_d^{n+2}, \dots$  соответствуют парциальным волнам, возникающим при дифракции опорной волны на голограмме. Волновые векторы  $\vec{k}_R^{t23}$ ,  $\vec{k}_R^{r23}$  и  $\vec{k}_S^{t21}$ ,  $\vec{k}_S^{r21}$  сопоставлены преломленным и отраженным волнам, возникающим при падении волн с волновыми векторами  $\vec{k}_R$  и  $\vec{k}_S$  на грани кристалла. Параметрами  $\varphi_R$  и  $\varphi_S$  определяются углы между нормальными к граням кристалла и волновыми векторами  $\vec{k}_{R0}$  и  $\vec{k}_{S0}$ .

Для проведения теоретических расчетов использовались система уравнений связанных волн [5, 6] и параметры кристалла ВТО, приведенные в [7]. Напряженность электрического поля разделенных зарядов в фоторефрактивном кристалле принималась равной 0,6 кВ/см. Углы  $\varphi_{R0}$  и  $\varphi_{S0}$  выбраны равными  $5^\circ$ . Отношение интенсивностей предметной и опорной волн на входе в кристалл предполагалось равным 1/10. При расчетах использовались световые волны с длиной волны, равной 633 нм. При численном решении системы уравнений связанных волн учтены френелевские потери, обусловленные взаимодействием волн с гранями кристалла.

При описании энергетического обмена между опорной и предметной волнами при их одновременной дифракции на отражательной голографической решетке использовался параметр относительной интенсивности предметной волны:  $\gamma = I_S^{Gr}/I_S$ , где  $I_S$  – интенсивность предметной волны с волновым вектором  $\vec{k}_S^{t21}$ , прошедшей через невозмущенный кристалл (в кристалле отсутствует голографическая

решетка);  $I_S^{Gr}$  – интенсивность предметной волны с волновым вектором  $\vec{k}_S^{t21}$ , прошедшей через кристалл, в котором записана голограмма.

### 3. Обсуждение результатов

На рисунке 2 кривые 1, 2 и 3, 4 представляют соответственно огибающие, проходящие через максимумы  $\gamma^{\max}$  и минимумы  $\gamma^{\min}$  графиков, иллюстрирующих зависимости относительной интенсивности предметной волны  $\gamma$  от толщины кристалла  $d$ .

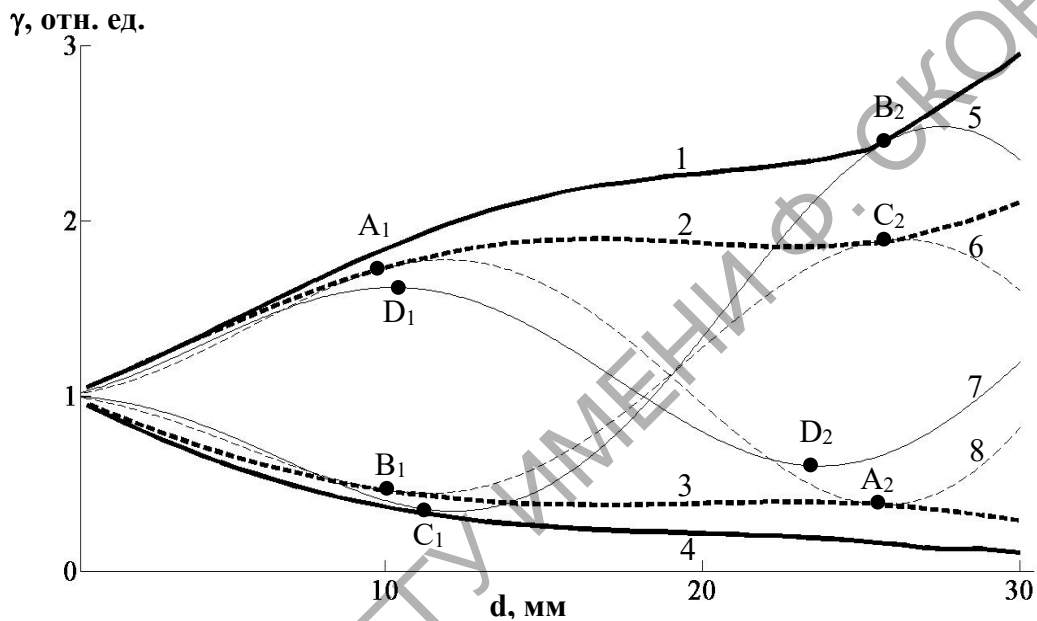


Рисунок 2 – Зависимости относительной интенсивности предметной волны  $\gamma$  от толщины кристалла  $d$ , рассчитанные для фазовой (штриховые линии) и фазово-амплитудной (сплошные линии) отражательных голограмм: 1, 2 – огибающие, проведенные через точки, соответствующие  $\gamma^{\max}$ ; 3, 4 – огибающие, проведенные через точки, соответствующие  $\gamma^{\min}$ ; 5, 6 –  $\Psi_{R0} = 9^\circ$ ; 7, 8 –  $\Psi_{R0} = 100^\circ$

Параметры  $\gamma^{\max}$  и  $\gamma^{\min}$  при каждом значении толщины в интервале  $0 < d \leq 30$  мм определялись как наибольшие и наименьшие значения  $\gamma$ , полученные при численном решении уравнений связанных волн с использованием различных комбинаций азимутов  $\Psi_{R0}$  и  $\Psi_{S0}$ . Кривые 5–8 отображают зависимости относительной интенсивности  $\gamma$  предметной волны от толщины кристалла  $d$ , рассчитанные при фиксированных значениях  $\Psi_{R0}$  и  $\Psi_{S0}$ : кривые 5 и 6 – при  $\Psi_{R0} = 9^\circ$ , кривые 7 и 8 – при  $\Psi_{R0} = 100^\circ$ . При расчетах кривых 5–8 использовалось следующее поляризационное условие: входные азимуты поляризации  $\Psi_{R0}$  и  $\Psi_{S0}$  выбирались таким образом, чтобы при любом  $z$  выполнялось условие одинаковой поляризации вещественных векторов  $\vec{R}$  и  $\vec{S}$ .

Как видно при сравнении кривых 1 и 2, при любых значениях толщины  $d$  максимально возможные значения  $\gamma$ , достигаемые при дифракции на фазово-амплитудной голограмме, выше, чем при дифракции на фазовой голограмме. С увеличением толщины  $d$  кристалла разность между значениями  $\gamma^{\max}$ , найденными в обеих указанных ситуациях, возрастают. Это можно объяснить тем, что при некоторых комбинациях азимутов  $\Psi_{R0}$  и  $\Psi_{S0}$  парциальные волны, возникшие в результате дифракции опорной волны на фазовой и амплитудной составляющих голографической решетки, суммируются с когерентной им предметной волной. Немонотонность зависимости параметра  $\gamma^{\max}$  от толщины кристаллического слоя  $d$  обусловлена влиянием естественной оптической активности кристалла.

При анализе кривых 5–8 видно, что при соответствующем выборе  $\Psi_{R0}$  и соблюдении принятого поляризационного условия для фазовой голограммы можно определить  $\gamma^{\max}$  и  $\gamma^{\min}$  при каждом фиксированном значении толщины  $d$  (см., например, точки  $A_1, A_2$  и  $C_1, C_2$ ). Для смешанной голограммы соблюдение этого поляризационного условия не обуславливает аналогичного эффекта. Например, если при  $\Psi_{R0} = 9^\circ$  и выполнении поляризационного условия  $\gamma^{\max}$  и  $\gamma^{\min}$  имеют место при дифракции как на фазовой, так и на смешанной голограмме, то при  $\Psi_{R0} = 100^\circ$  для фазовой голограммы  $\gamma^{\max}$  и  $\gamma^{\min}$  достигается при некотором значении толщины  $d$  (точки  $B_1, C_1$  и  $B_2, C_2$ ), а для смешанной в интервале  $0 < d \leq 30$  мм  $\gamma^{\max}$  и  $\gamma^{\min}$  не достигаются (ср., например, точки  $A_1, D_1$  и  $A_2, D_2$ ).

Таким образом, при двухволновом взаимодействии на фазовой отражательной голограмме в интервале  $0 < d \leq 30$  мм  $\gamma^{\max}$  и  $\gamma^{\min}$  могут быть достигнуты посредством оптимального выбора входного азимута  $\Psi_{R0}$  и соблюдения поляризационного условия, связывающего параметры  $\Psi_{R0}$  и  $\Psi_{S0}$ . В случае двухволнового взаимодействия на фазово-амплитудной отражательной голограмме в интервале  $0 < d \leq 30$  мм существуют такие значения толщины кристалла, при которых при соблюдении поляризационного условия не существует значений входного азимута  $\Psi_{R0}$ , обеспечивающих достижение  $\gamma^{\max}$  и  $\gamma^{\min}$ .

### Литература

1. Kogelnik, H. Coupled wave theory for thick hologram gratings / H. Kogelnik // Bell Syst. Tech. J. – 1969. – Vol. 48. – No. 9. – P. 2909–2947.

2. Guibelalde, E. Coupled wave analysis for out-of-phase mixed thick hologram gratings / E. Guibelalde // Opt. and Quant. Electron. – 1984. – Vol.16. – P. 173–178.

3. 7. Guibelalde, E. Coupled wave analysis for a reflection dephased mixed hologram grating / E. Guibelalde, M.L. Calvo // Opt. and Quant. Electron. – 1986. – Vol.18. – P. 213–217.

4. Light diffraction at mixed phase and absorption gratings in anisotropic media for arbitrary geometries / G. Montemezzani, M. Zgonik // Phys. Rev. E. – Vol. 55. – № 1. – P. 1035–1047.

5. Шепелевич, В.В. Смешанные пропускающие голограммы в фоторефрактивном кристалле  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  / В.В. Шепелевич, А.В. Макаревич, С.М. Шандаров // Письма в ЖТФ. – 2014. – Т. 40. – Вып. 22. – С. 83–89.

6. Макаревич, А.В. Выходные характеристики смешанных голограмм в кристалле  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  среза  $(\bar{1}\bar{1}0)$ . Теория и эксперимент // Смешанные пропускающие голограммы в фоторефрактивном кристалле  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  / А.В. Макаревич, В.В. Шепелевич, С.М. Шандаров // ЖТФ. – 2017. – Т. 87. – Вып. 5. – С. 766–771.

7. Zagorskiy, A.E. Energy exchange optimization in (1 1 0)-cut BTO crystal by choice of interacting waves polarization / A.E. Zagorskiy [et al.] // Opt. Mat. – 2001. – Vol. 18. – P. 131–133.

**А.П. Балмаков**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛОВ, СОДЕРЖАЩИХСЯ В ПЕРЬЯХ ПТИЦ СО СТРУКТУРНЫМ ТИПОМ ЦВЕТООБРАЗОВАНИЯ**

Наиболее распространенная форма отражающих систем в биологических объектах связана с одномерной структурой фотонных кристаллов. Она широко встречается в кожных покровах многих насекомых и рыб. Фотонная структура таких достаточно простых одномерных многослойных систем может быть описана с использованием основных законов интерференции. В качестве примера рассмотрим тонкую пленку, показанную на рисунке 1, имеющую показатель преломления  $n_2$  и толщину  $d$ . Показатели преломления среды, из которой па-

дает излучение, и среды, в которую оно выходит из диэлектрической пленки, соответственно равны  $n_1$  и  $n_3$ . Свет падает на пленку под некоторым углом  $\theta_1$ , частично отражается и частично преломляется под углом  $\theta_2$ . Далее свет в пленке, претерпевая отражение от её нижней границы и преломление на верхней границе, выходит в среду, показатель преломления которой  $n_1$ . Оптическая разность хода двух лучей на выходе равна  $2dn_2\cos\theta_2$ . Для возникновения максимума интерференции эти два луча должны быть в фазе. Условия максимума и минимума интенсивности отраженного света определяются следующими равенствами:

$$m\lambda = 2n_2d \cos\theta_2, \quad \text{при } n_1 < n_2 < n_3,$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda = 2n_2d \cos\theta_2, \quad \text{при } n_1 < n_2 > n_3,$$

где  $m$  целое число.

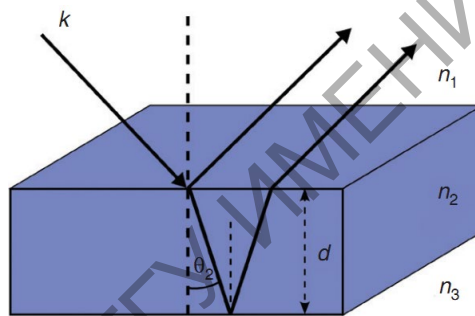


Рисунок 1 – Схема интерференции в тонкой диэлектрической пленке толщиной  $d$  с показателем преломления  $n_2$

Для описания многократного отражения в пленке, зависящего от длины волны, следует рассмотреть интерференцию всех отраженных волн:

$$r = r_{12} + t_{12}r_{23}t_{12}e^{-i2\delta} + t_{12}r_{23}^2r_{21}t_{21}e^{-i4\delta} + t_{12}r_{23}^3r_{21}^2t_{21}e^{-i6\delta} + \dots,$$

где  $r$  и  $t$  – коэффициенты отражения и прохождения Френеля. При этом разность фаз, обусловленная оптической толщиной пленки, описывается формулой

$$\delta = \frac{2\pi n_2 d \cos\theta_2}{\lambda}.$$

Суммируя соответствующие амплитуды, находим общий коэффициент отражения, связанный с двумя границами раздела пленки:

$$r = \frac{r_{12} + r_{23}e^{-i2\delta}}{1 + r_{23}r_{12}e^{-i2\delta}}.$$



При этом энергетический коэффициент отражения может быть рассчитан как  $R=|r|^2$ . Данный формализм может быть использован для прогнозирования спектрального отражения в простых однослойных системах. Однако в биологических объектах наиболее распространены системы, состоящие из нескольких тонких пленок, т.е. многослойные системы. В этих системах пик коэффициента отражения может быть определен с использованием того же геометрического соображения, которое было использовано при рассмотрении одиночных тонких пленок. Рассмотрим слой, содержащий две тонкие пленки, при этом слой 1 имеет показатель преломления  $n_1$  и толщину  $d_1$ , а слой 2 – показатель преломления  $n_2$  и толщину  $d_2$ . Свет падает под углом  $\theta_0$  из среды с показателем преломления  $n_0$ . Условие максимума интерференции при этом имеет вид:

$$m\lambda = 2\left(d_1\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0} + d_2\sqrt{n_2^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0}\right), \quad (1)$$

где  $m$  – целое число. Когда оптические толщины обоих слоев равны, система называется идеальным мультислоем. При нормальном падении выражение для максимума интерференции (1) упрощается:

$$\frac{\lambda}{4} = n_1 d_1 + n_2 d_2.$$

Несмотря на то, что идеальный мультислой встречается в некоторых биологических системах, таких как некоторые виды рыб, большинство биологических многослойных систем не являются идеальными. Поэтому анализ отражения излучения от многослойных систем в зависимости от длины волны выполняется с использованием метода матрицы переноса, методом рекурсии или итерационным методом.

С использованием итерационного метода получено следующее выражение для пиковой величины коэффициента отражения от идеального мультислоя при нормальном падении излучения:

$$R = \left( \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^{2s} n_h^2 - n_{inc} n_{out} \right) / \left( \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^{2s} n_h^2 + n_{inc} n_{out} \right), \quad (2)$$

где показатели преломления слоев  $n_h > n_l$ ; символом  $s$  обозначено число пар слоев в системе  $2s + 1$  слоев;  $n_{inc}$  и  $n_{out}$  соответственно – показатели преломления входной и выходной сред. При увеличении числа пар слоев  $s$  выражение (2) сводится к следующему:

$$R \cong 1 - \frac{4n_{inc} n_{out}}{n_h^2} \left( \frac{n_h}{n_l} \right)^{2s},$$

а пиковое значение коэффициента отражения быстро приближается к единице. Пики с абсолютным отражением соответствуют запрещенной зоне фотонного кристалла. Из приведенных выражений следует, что с увеличением числа слоев максимальная отражательная способность увеличивается. При этом спектральная ширина запрещенной зоны определяется показателями преломления составляющих слоев. Большинство структурно окрашенных биологических видов эволюционировали к относительно ограниченному количеству слоев в их отражающих системах. В перьях птиц многослойные структуры содержат, как правило, около 10 слоев меланосом. Виды с большим количеством слоев имеют тенденцию к отображению более интенсивной цветовой гаммы. При этом, если эти слои относительно хорошо выровнены относительно друг друга, то перья приобретают металлический окрас.

Рассмотрим подробнее структуру фотонного кристалла в перье и проанализируем его основные характеристики. На рисунке 2(a) приведено схематическое изображение трехмерной структуры гексагонального массива из плотно упакованных полых меланосом, расположенных в слое кератина, граничащего с воздухом сверху и снизу. На рисунке 2(a) схематически показано падающее линейно-поляризованное излучение видимого диапазона с углом падения  $\alpha$  и модами TE и TM, обозначенными красными и синими стрелками соответственно. Рассматриваются две плоскости падения по отношению к упорядоченным меланосомам, которые обозначены соответственно цифрами 1 и 2. На рисунке 2(b) показан поперечный разрез рассматриваемого фотонного кристалла. Зубчатая структура нижней части кератинового кортекса с высотой зубцов 0,75 мкм и шириной, сравнимой с радиусом меланиновых цилиндров, искусственно введена в модель фотонного кристалла с целью согласования импеданса кератинового кортекса с импедансом свободного пространства (воздуха). При такой структуре кортекса на спектрах отражения излучения происходит сглаживание высокочастотных составляющих осцилляций, образующихся вследствие резонанса Фабри-Перо при отражении излучения от верхней и нижней границ кератинового кортекса. В фотонных кристаллах перьев птиц этой зубчатой структуре (гребенке) соответствует массив неоднородностей в толще кератинового кортекса. При этом толщина кератинового кортекса в модели с зубчатой гребенкой может быть ограничена размером порядка 3 мкм, тогда

как в естественных структурах толщина кератинового кортекса как правило больше.

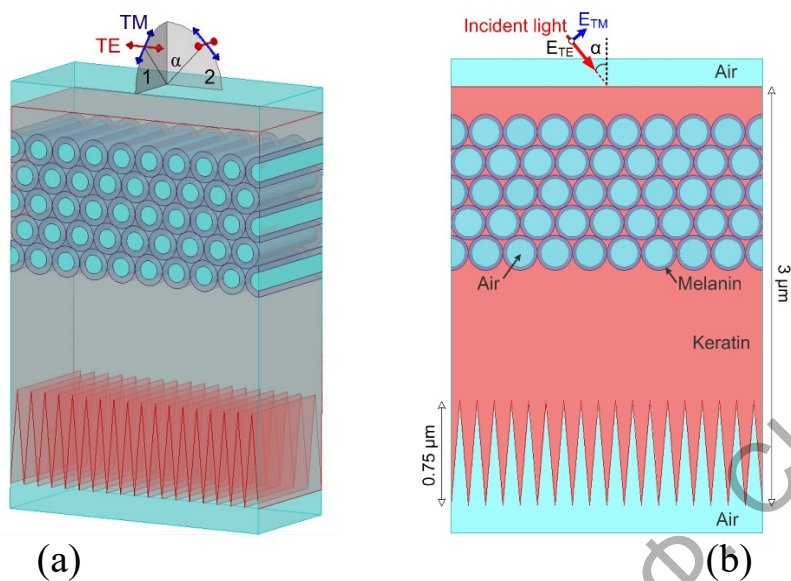


Рисунок 2 – Двумерный фотонный кристалл, формирующий структурное цветообразование в перьях некоторых птиц. (а) – Общий вид фотонного кристалла, на который падает свет под углом  $\alpha$  с поляризациями TE или ТМ, (b) – Поперечный разрез исследуемого фотонного кристалла с указанием расположения меланиновых блоков в кератиновом кортексе и указанием характерных размеров структуры

В модели для фотонных структур в перьях индюка, приведенной на рисунке 2, нами были получены следующие основные геометрические параметры, при которых спектры отражения наиболее точно соответствуют экспериментальным данным [1-4]: толщина кератинового кортекса порядка 3 мкм, толщина верхнего слоя кератина (между верхним слоем воздуха и первым слоем меланосом) порядка 200 нм, диаметр меланосом  $D = 250$  нм, диаметр воздушных полостей в меланосомах  $d = 0,8D$ , количество слоев меланосом 7, расстояние между слоями меланосом 216,5 нм, угол падения излучения  $\alpha = 0^\circ$  (нормальное падение), падающее излучение соответствует типу номер 1 на рисунке 2(a), показатель преломления для меланина  $n_{mel}$  имеет дисперсионный характер, изменяясь в пределах от  $1,79+i \cdot 1,69$  до  $1,66+i \cdot 1,54$ . Показатель преломления кератина  $n_{ker}$  изменяется в пределах от  $1,57+i \cdot 0,01$  до  $1,54+i \cdot 0$  в видимом диапазоне длин волн [5].

## Литература

1. Prum, R.O. Anatomy, Physics, and Evolution of Structural Colors // Bird coloration volume 1: mechanisms and measurements / ed. Hill G.E.,

McGraw K.J. Harvard University Press, 2006. – 640 p.

2. Yoshioka, S. Origin of two-color iridescence in rock dove's feather /S.Yoshioka, E.Nakamura, S.Kinoshita // J. Phys. Soc. Japan. – 2007. – Vol. 76, № 1. – P. 013801 (4 pages).

3. High refractive index of melanin in shiny occipital feathers of a bird of paradise / D.G.Stavenga [et al.] // Light Sci. Appl. – 2015. – Vol. 4, № 1. – P. e243.

4. Eliason, C.M. How hollow melanosomes affect iridescent colour production in birds / C.M.Eliason, P.-P.Bitton, M.D.Shawkey // Proc. Biol. Sci. – 2013. – Vol. 280, № 1767. – P. 20131505.

5. Balmakov, A. P. Parametric modeling of photonic crystals in feathers of birds / A.P. Balmakov, S.A. Khakhomov, N.A. Aleshkevich, I.V. Semchenko, D.G. Stavenga, J. Wang // PFMT, – 2018, – Issue 3(36). – P. 23–27.

**А.П. Балмаков**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТРУКТУРНОГО ЦВЕТООБРАЗОВАНИЯ ПЕРЬЕВ ПТИЦ**

Фотонные кристаллы, которые естественным образом встречаются в перьях некоторых видов птиц со структурным типом окраски, исследуются в работе в целях выявления возможных оптических приложений. Разнообразие цветов природных систем обусловлено двумя основными оптическими механизмами, известными как пигментное и структурное цветообразование [1]. Широко распространенный пигментный тип цветообразования обусловлен отражением и рассеянием света объектом, содержащим пигмент, который поглощает свет в ограниченном диапазоне длин волн, в то время как излучение, не соответствующее этому диапазону, слабо взаимодействуют с пигментом. Совершенно иная картина наблюдается при структурном типе цветообразования, при котором цвета формируются как следствие интерференции света и его когерентного рассеяния на субмикрометровых структурах с периодически изменяющимися показателями преломления [2]. В природе оба эти механизма цветообразования часто реализуются одновременно в одном и том же объекте.

Структурный тип цветообразования распространен в перьях некоторых птиц связан с особой структурой перьев, обуславливающей образование фотонных кристаллов. Можно выделить два основных подтипа структур, результатом взаимодействия излучения с которыми является цветообразование в птичьих перьях: губчатые структуры перьев и упорядоченные решетки меланосом [3]. Только для нескольких видов птиц хорошо известны детали механизма структурного цветообразования. Например, окрас перьев голубей может быть хорошо описан с применением теории тонких пленок [4]. В перьях райских птиц содержатся слоистые стопки заполненных меланином цилиндрических структур с субмикрометровыми размерами (меланосомами), встроенных в кератиновый кортекс, которые действуют как многослойные отражатели [5, 6]. Структура с трехмерным расположением меланосом с воздушными каналами в кератиновом кортексе наблюдается в павлиньих перьях и действует как трехмерный фотонный кристалл [7].

Перья со структурным типом цветообразования подразделяют на два подтипа: перья с радужным окрасом и перья с отсутствием радужного окраса (рисунок 1).

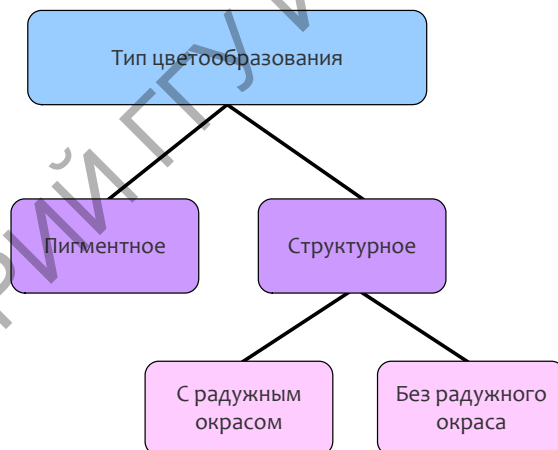


Рисунок 1 – Классификация цветообразования перьев птиц

Для перьев индюков характерно довольно сложное расположение полых меланосом, а именно: перья с полыми, заполненными воздухом меланосомами, плотно упакованные в гексагональную решетку, находятся в кератиновом кортексе, образуя двумерный фотонный кристалл [8]. На рисунке 2 приведены фотографии, иллюстрирующие радужный окрас перьев индюка, являющийся следствием структурного цветообразования. Различия цветов, имеющие место у птицы для пе-

рьев разных типов (рисунок 2(b,c)), обусловлены отличиями в геометрических размерах фотонных кристаллов, но не в структуре фотонного кристалла, и его материальных параметрах. Стоит также заметить, что цвет перьев меняется в зависимости от угла наблюдения, поэтому в соответствии с классификацией, приведенной на рисунке 1, их можно отнести к типу «структурные» и подтипу «с радужным окрасом». При отражении света под большим углом проявляются фиолетовый оттенок в окрасе хвостового пера и четко выраженный зеленый цвет – в окрасе покровного пера (рисунок 2(d,e)).

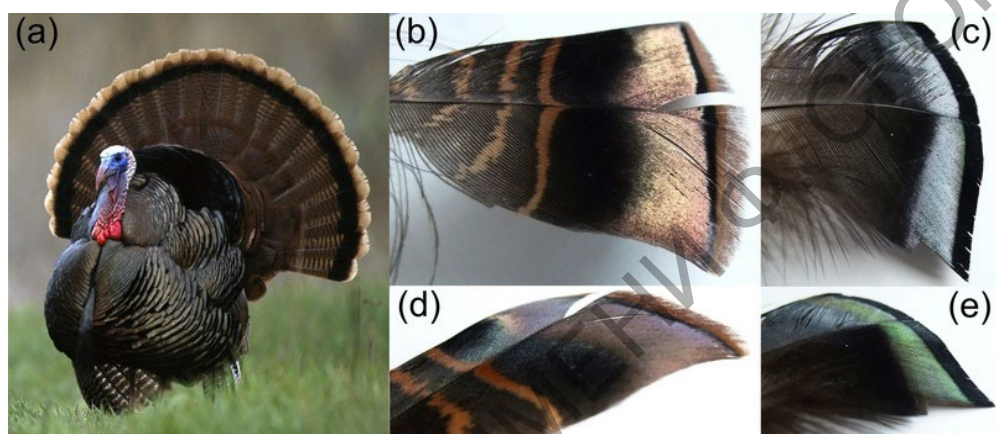


Рисунок 2 – Фото перьев индюка, обладающих структурным типом цветообразования. (a) – общий вид птицы, (b) – хвостовое перо, (c) – покровное перо, (d, e) – те же перья, что в (b,c) соответственно, но наблюдаемые при отражении под большим углом

На рисунке 3 иллюстрирован механизм появления радужного окраса птичьих перьев, которым характерен структурный тип цветообразования. Радужный окрас перьев имеет место, если спектр отражения пера зависит от угла отражения излучения от его поверхности (рисунок 3(a)). В этом случае меланосомы имеют форму цилиндрических блоков и упакованы рядами, как показано на рисунке 3(a). Если оттенок перьев остается одинаковым вне зависимости от того, под каким углом наблюдатель регистрирует спектр отражения, то имеет место структурное цветообразование без радужного окраса. В этом случае как правило в структуре перьев птиц имеются воздушные полости сферической формы, которые специфическим образом рассеивают падающий свет без образования радужного окраса. Голубой цвет перьев у птиц со структурным типом цветообразования, как правило, обусловлен рассеянием.

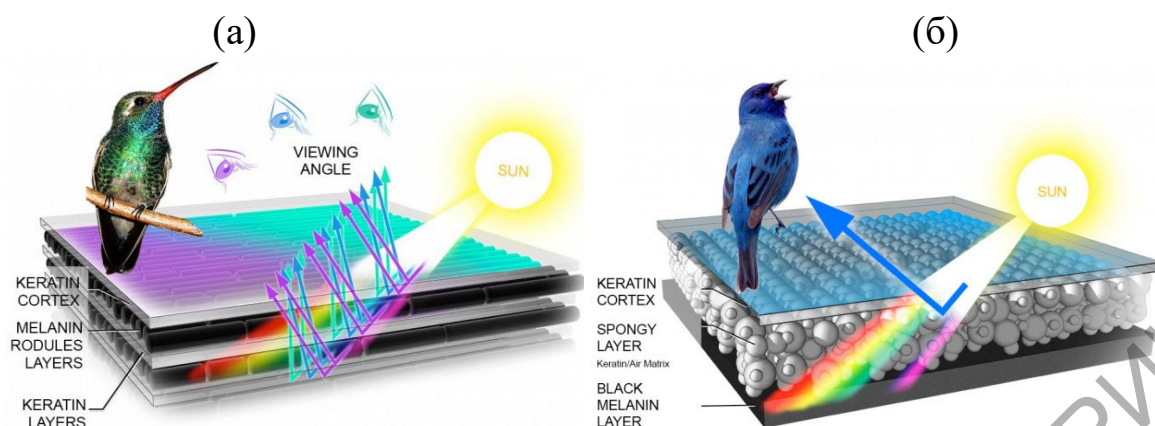


Рисунок 3 – Пояснение механизмов структурного цветообразования:  
 (а) – с радужным окрасом; (б) – без радужного окраса

В целях исследования характерных особенностей спектров отражения перьев индюка (со структурным типом цветообразования и радужным окрасом) от важнейших геометрических параметров фотонного кристалла автором статьи проведена разработка и параметризация компьютерной модели фотонного кристалла, предназначенной для описания спектров отражения. Параметризация осуществлялась по следующим ключевым параметрам фотонного кристалла: количеству слоев меланосом, интервалу между этими слоями, внешнему диаметру меланосом и диаметру воздушных полостей внутри них, типу пространственной структуры фотонного кристалла (кубическая, гексагональная решетки). Исследована зависимость спектров отражения от угла падения излучения на поверхность фотонного кристалла, а также от типа поляризации падающего излучения.

В работе были получены также экспериментальные спектры отражения перьев индюка для фотонных структур двух типов и произведено их сравнение со спектрами, полученными в результате моделирования. В диапазоне длин волн от 400 до 1600 нм спектры, полученные зондовым методом, очень хорошо соответствуют полученным в результате численного моделирования. Однако при регистрации спектров микроспектрофотометрическим методом в диапазоне от 400 до 1000 нм обнаружены осцилляции, характер которых сильно зависит от выбора конкретного микрометрического участка пера, выбранного для исследования, что объясняется естественной неоднородностью микроскопической структуры пера. Указанные осцилляции имеют интерференционную природу и могут быть описаны в рамках теории интерференции света в тонких пленках. Спектры, полученные с применением фотометрического шара Ульбрихта, в диапазоне длин волн

от 400 до 1000 нм имеют сглаженный, ровный характер (осцилляций нет) и очень хорошо соответствуют численно моделируемому спектру.

### Литература

1. Fox, H.M. The nature of animal colours / H.M. Fox, G. Vevers. – London: Sidgwick and Jackson, 1960. – 246 P.
2. Kinoshita, S. Structural colors in the realm of nature / S. Kinoshita. – World Scientific, 2008. – 368 p.
3. Prum, R.O. Anatomy, Physics, and Evolution of Structural Colors // Bird coloration volume 1: mechanisms and measurements / ed. G.E. Hill, K.J. McGraw; Harvard University Press, 2006. – 640 p.
4. Yoshioka, S. Origin of two-color iridescence in rock dove's feather / S.Yoshioka, E.Nakamura, S.Kinoshita // J. Phys. Soc. Japan. – 2007. – Vol. 76, № 1. – P. 013801 (4 pages).
5. Sparkling feather reflections of a bird-of-paradise explained by finite-difference time-domain modeling / B.D. Wilts [et al.] // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2014. – Vol. 111, № 12. – P. 4363–4368.
6. High refractive index of melanin in shiny occipital feathers of a bird of paradise / D.G.Stavenga [et al.] // Light Sci. Appl. – 2015. – Vol. 4, № 1. – P. e243.
7. Coloration strategies in peacock feathers / J. Zi [et al.] // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. – 2003. – Vol. 100, № 22. – P. 12576–12578.
8. Eliason, C.M. How hollow melanosomes affect iridescent colour production in birds / C.M. Eliason, P.-P. Bitton, M.D.Shawkey // Proc. Biol. Sci. – 2013. – Vol. 280, № 1767. – P. 20131505.

**В.Н. Белый, Н.С. Казак, А.П. Ропот, Н.А. Хило, П.И. Ропот**  
ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси,  
Минск, Беларусь

## **АКУСТООПТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ЭЙРИ С ПЕРЕСТРАИВАЕМОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ**

### **Введение**

В работе [1] предложен метод формирования и дано описание свойств нового типа световых полей Эйри [2]: динамических пучков



Эйри (ПЭ) с высокоскоростной перестройкой параметров (криволинейной траектории движения, поперечного смещения пучка, пространственной структуры, ускорения движения энергии и др.). Такие динамические пучки реализованы при рефракции света на стоячей акустической волне. Показано [1], что формируемое при этом поле является т.н. неполным пучком Эйри [3], параметр кривизны которого изменяется в широких пределах при изменении фазы стоячей акустической волны.

Изменение показателя преломления среды вследствие возбуждения в ней звука описывается формулой  $\Delta n(x, t) = \Delta n_0 \sin(k_a x) \cos(\omega_a t)$ , где  $k_a = 2\pi/\lambda_a$  и  $\omega_a = 2\pi f_a$  – соответственно волновое число и циклическая частота звука. Стоячая акустическая волна модулирует показатель преломления среды  $n$  и формирует периодическую фазовую решетку, функция пропускания которой описывается формулой  $\tau_S(x) = \exp\left(i\Delta\varphi_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)\right)$ , где  $\Delta\varphi_0 = k_0 \Delta n_0 h$ ,  $\Delta n_0$  – амплитуда модуляции показателя преломления,  $h$  – ширина акустического пучка,  $L = \lambda_a/2$  – период стоячей волны. Функция пропускания т.н.  $\sin$ -линзы, соответствующая данной формуле без учета временной модуляции, исследовалась в [1] и приведена на рисунке 1а.

Видно, что конфигурация  $\sin$ -линзы является пространственно несимметричной. Разлагая синусоидальную функцию в ряд и ограничиваясь двумя членами разложения можно описать функционирование  $\sin$ -линзы как действие последовательно расположенных призмы и кубической линзы. При этом именно кубическая линза ответственна за формирование перестраиваемых ПЭ.

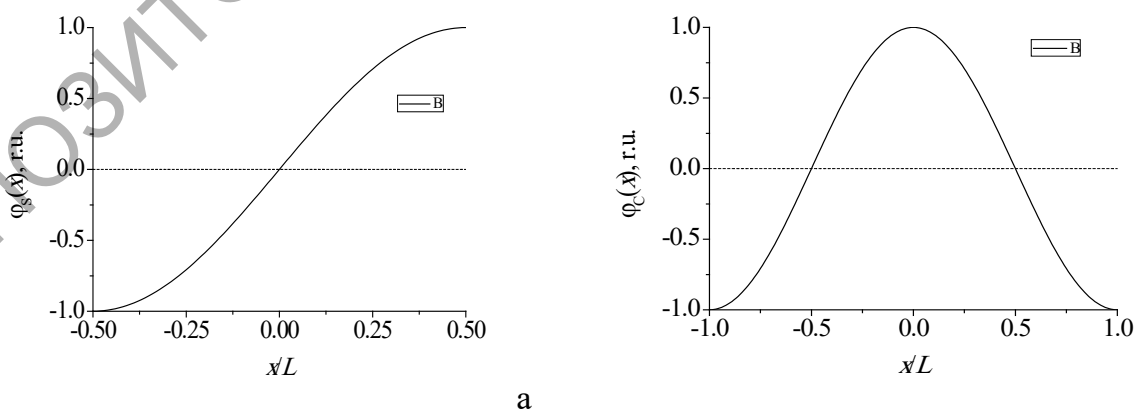


Рисунок 1 – Фазовая функция  $\sin$ -линзы (а) и  $\cos$ -линзы (б)

В настоящей работе продолжены исследования данного метода формирования перестраиваемых ПЭ и изучены особенности функционирования динамических cos-линз.

### 1. Акустооптическая генерация динамических пучков Эйри на основе косинус-линзы

На рисунке 1б изображена фазовая функция cos-линзы, функция пропускания которой описывается формулой

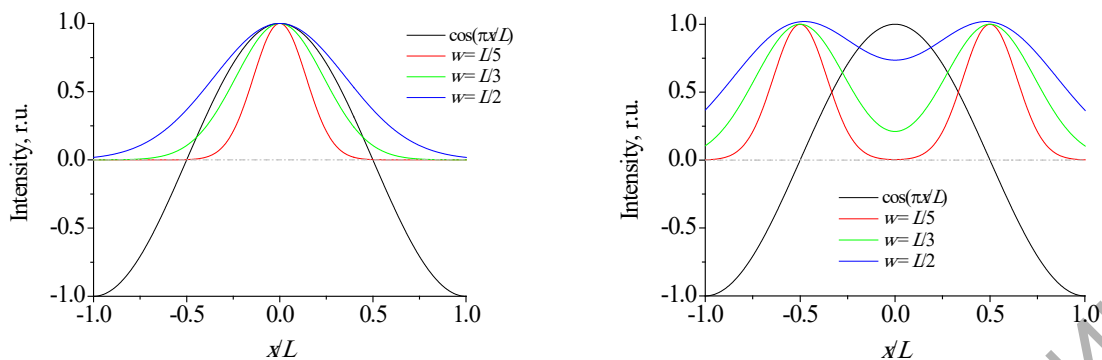
$$\tau_c(x) = \exp\left(i\Delta\varphi_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)\right)$$

в пределах изменения аргумента  $(-\pi \div \pi)$ . Очевидно, что cos-линза состоит из двух симметрично расположенных, пространственно смещенных sin-линз, показанных на рисунке 1а.

Рассмотрим две симметричные конфигурации освещения cos-линзы: 1) падающий пучок является гауссовым с центром на оптической оси, т.е. при  $x = 0$ ; 2) линза освещается двумя гауссовыми пучками (ГП) с центрами в точках  $x = \pm L/2$ .

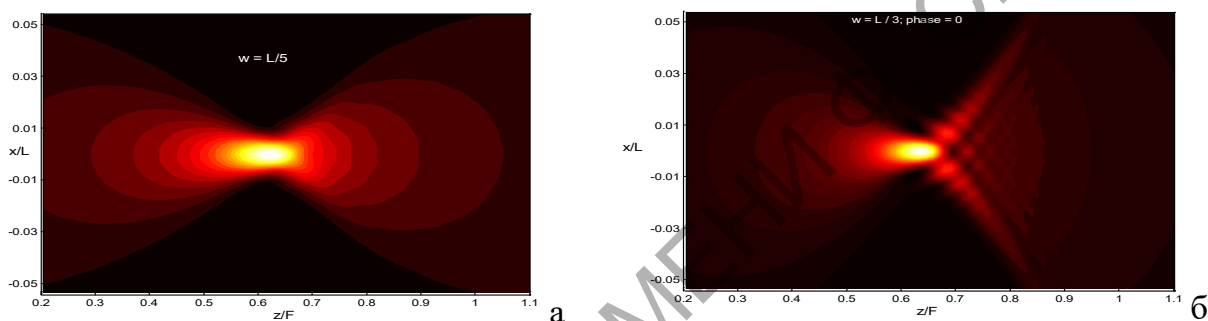
Оптическая схема устройства для изучения свойств cos-линзы состоит из акустооптической (АО) ячейки, в которой возбуждается стоячая волна, формирующая в среде фазовую функцию пропускания  $\tau_c(x)$  и Фурье-преобразующей цилиндрической линзы с фокусным расстоянием  $F$ . Для имитации схемы вместо АО ячейки можно использовать пространственный модулятор света (SLM).

Рассмотрим сначала случай, когда падающий ГП с амплитудой  $a_{in}(x) = \exp(-x^2/w^2)$  поперечно не смещен и временная фазовая функция равна единице. На рисунке 2а показано взаимное расположение падающего ГП и ограниченной областью  $x = (-L \div L)$  cos-линзы для трех значений полуширины пучка  $w$ . В первом случае, когда  $w=L/5$ , ГП почти целиком располагается в области положительного фазового пропускания (или отрицательного, если  $\cos(\omega t) = -1$ ). В этом случае поле на выходе будет иметь близкий к гауссову профиль с небольшой асимметрией относительно перетяжки (рисунок 3 а), расположенной при  $z = z_f = 0,62F$ . Следовательно, действие cos-линзы фактически эквивалентно действию обычной параболической линзы.



а б

Рисунок 2 – Две симметричные конфигурации освещения cos-линзы: а – ГП с центром на оптической оси; б – два ГП симметрично смещены относительно оси



а б

Рисунок 3 – Влияние диаметра падающего осевого ГП на поле за линзой

Для случаев, когда  $w$  увеличивается до значений  $L/3$  и далее до  $L/2$ , величина  $z_f$  соответственно становится равной приблизительно  $0,63F$  и  $0,64F$ . Увеличение  $z_f$  приводит к эффекту возрастания сферической аберрации. Однако, как показано при анализе распределения интенсивности пучка за пределами фокальной перетяжки, этот эффект относительно слабый в сравнении с эффектом искажения профиля пучка, наблюдаемым при увеличении  $w$ . Отметим, что поле за перетяжкой перестает быть гауссовым (рисунок 3б) и трансформируется в расходящийся пучок с минимумом интенсивности на оси и максимумами по краям. Данная трансформация поля обусловлена влиянием четвертого члена, пропорционального  $x^6$  в разложении косинуса, в то время как сферическая аберрация описывается третьим членом в разложении, т.е. пропорциональным  $x^4$ . Отсутствие в разложении функции, модулирующей проходящее световое поле, кубической составляющей ( $x^3$ ) при осевом освещении cos-линзы не приводит к формированию ПЭ.

Для проявления кубической модуляции, в принципе содержащейся в cos-линзе, ее необходимо освещать световыми пучками, центрированными в точках перегиба функции пропускания, т.е. при

$x_p = \pm L/2$ . Исследуем численно данную схему, выделяя несколько частных случаев, отличающихся полушириной падающих ГП (рисунок 2б). Аналогично [1], формируемые cos-линзами пучки могут быть отнесены к классу неполных ПЭ [3]. По определению, неполные ПЭ характеризуются ограниченной шириной пространственного спектра, в то время как идеальные ПЭ такого ограничения не имеют. При возрастании полуширины  $w$  неполные ПЭ становятся подобными идеальным ПЭ с тенденцией к увеличению подобия. Данное заключение следует из сравнительного анализа выходных полей Эйри-типа, формируемых cos-линзой при освещении смещенными ГП с разным значением полуширины  $w$ . В частности, отмечается, что длина интенсивного центрального максимума, характерного для ЭП, возрастает с ростом  $w$ . При этом возрастает и искривление траектории в пределах длины этого максимума. Растет и число вторичных максимумов, распределение интенсивности которых все более точно описывается математической функцией Эйри.

Результаты расчета, соответствующего второй конфигурации освещения cos-линзы (рисунок 2б), иллюстрированы на рисунке 4.

Здесь показаны 2D-распределения интенсивности при освещении одним смещенным ГП ((а) – при освещении с левой стороны относительно оси, (б) – при освещении с правой стороны относительно оси), при симметричном освещении двумя пучками с одинаковой поляризацией (в) и с ортогональными поляризациями (г). На фрагментах (д, е) графически отображено поперечное распределение интенсивности в нескольких характерных сечениях.

Анализируя рисунок 4 видим, что поля, формируемые оптической системой в рассматриваемых здесь условиях, являются полями Эйри. В частности, на фрагментах (а – г) очевидно характерное для ПЭ искривление траектории пучка. По мере увеличения ширины падающего ГП  $w$  протяженность области, в которой интенсивность излучения велика, возрастает.

Поперечные распределения интенсивности на рисунке 4(д, е) также имеют структуру, типичную для неполных ПЭ. Видно, что кривизна и коэффициент, характеризующий средний наклон траекторий, для обоих ПЭ, формируемых двумя ГП, имеют разные знаки. Интенсивные максимумы двух ПЭ зарождаются на оптической оси на одинаковом расстоянии от cos-линзы – порядка половины ее фокальной длины. В области пересечения парциальных ПЭ с одинаковой поляризацией проявляется их интерференция (рисунок 4а) с достижением

максимальной интенсивности (рисунок 4д), в то время как при освещении cos-линзы ГП с ортогональной поляризацией (рисунок 4г) интерференционные биения отсутствуют (рисунок 4е).

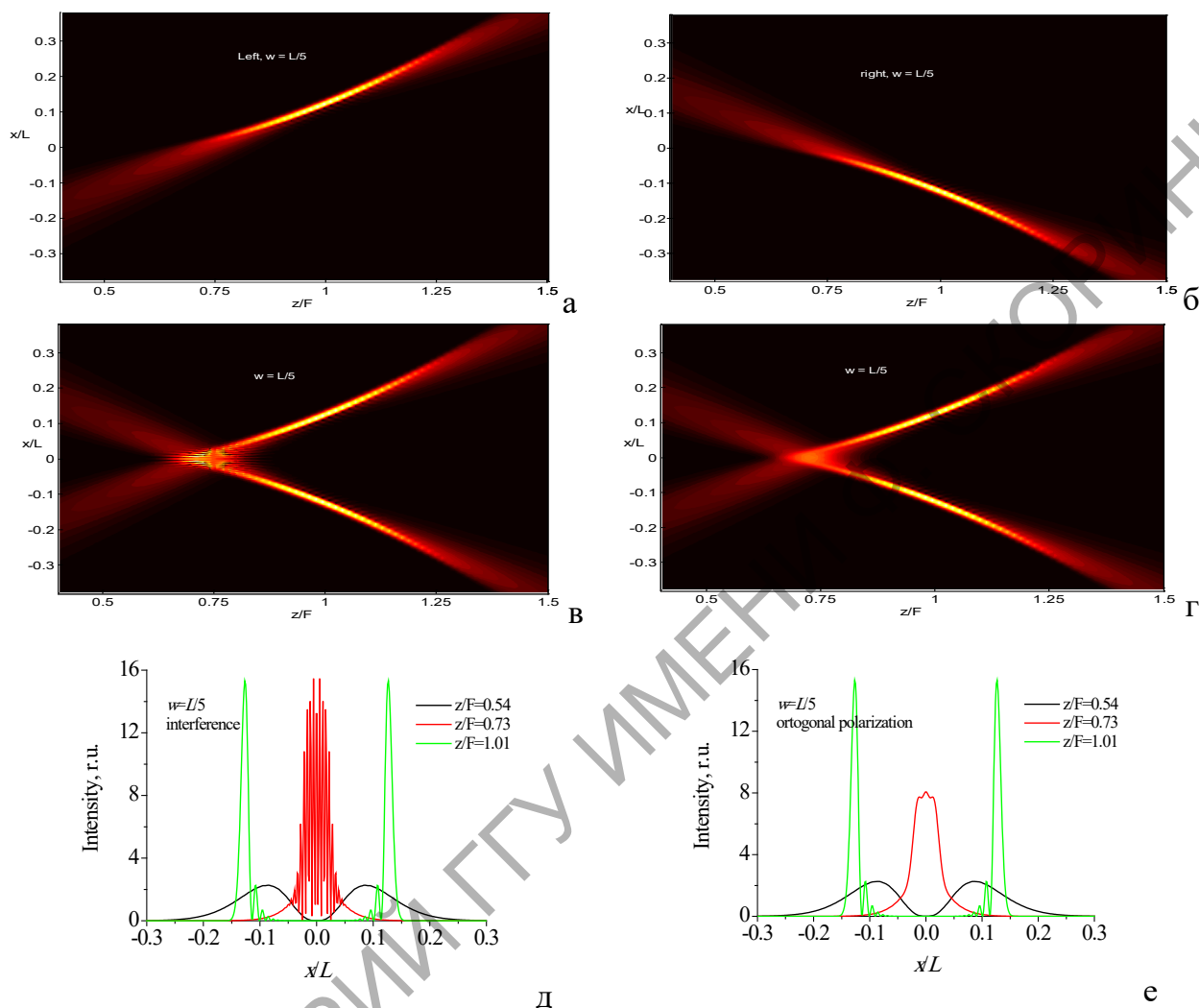


Рисунок 4 – Распределение поля, формируемого cos-линзой при её освещении поперечно смещенными относительно оси (одним) двумя ГП относительно малой ширины  $w$

Существенное отличие в структуре поля наблюдается при отрицательной по знаку фазовой модуляции. В результате расчетов показано, что поле, формируемое отрицательной cos-линзой, приближенно соответствует зеркальному отражению в фокальной плоскости линзы распределения поля, формируемого положительной линзой. При этом увеличение полуширины падающего ГП до значения  $L/2$  сопровождается ослаблением эффекта генерации ПЭ. Это связано с возрастающей ролью центральной части cos-линзы, которая выполняет функцию параболической линзы и не связана с формированием ПЭ.

Следовательно, если cos-линза бинарная, то ее переключение приводит к перестройке генерируемого поля между двумя указанными

выше типами ПЭ. При непрерывном изменении фазы, как это происходит при рефракции на стоячей акустической волне, структура поля плавно изменяется между двумя крайними вариантами. При изменении фазы в промежутке  $(0 \div \pi/2)$  протяженность основного интенсивного максимума ПЭ в области за фокусом уменьшается, энергия все в большей мере сосредоточивается в фокусе, который смещается до положения фокуса цилиндрической линзы. В предельном случае, когда фаза равна  $\pi/2$ , cos-линза вырождается в однородную фазовую пластинку и не изменяет падающего поля. После превышения фазой значения  $\pi/2$  cos-линза становится отрицательной и ПЭ постепенно восстанавливается.

### **Заключение**

Таким образом, в работе исследованы особенности формирования динамических ПЭ с применением фазовых cos-линз в двух режимах освещения. Показано, что при осевом падении ГП, диаметр которого значительно меньше поперечного размера cos-линзы, она действует как обычная параболическая линза. По мере роста диаметра падающего ГП начинают проявляться aberrации, пропорциональные четвертой и шестой степени координаты  $x$ , обуславливающие небольшое смещение фокуса. Наряду со смещением фокуса наблюдается и плавная трансформация ГП за фокусом в пучок с максимумами интенсивности, локализованными у краев его поперечного сечения. Освещение cos-линзы ГП, смещенными относительно центра линзы так, что оси пучков совпадают с положениями точек перегиба фазовой функции линзы, приводит к значительному усилению данных эффектов. В этом случае проявляется aberrация, пропорциональная третьей степени координаты  $x$ , что приводит к формированию двух пучков Эйри-типа, исходящих из одной точки (из фокуса) или сходящихся в одну точку – в зависимости от знака фазы. При плавном изменении фазы происходит перестройка ПЭ и на протяжении четверти периода изменения фазы он плавно трансформируется в ГП.

Интенсивные максимумы, локализованные у краев поперечных сечений ПЭ, формируют в пространстве два световых листа, сходящиеся к фокусу или расходящиеся из него. Такие световые поля могут найти применение в лазерной технологии, микроскопии на основе световых листов, в системах дистанционного зондирования сред.

## Литература

1. Khilo, N.A. Acoustooptic refraction-influenced generation of tunable incomplete Airy beams / N.A. Khilo, V.N. Belyi, N.S. Kazak, P.I. Ropot // J. Opt. – 2014. – Vol. 16. – P. 085702.
2. Siviloglou, G.A. Accelerating finite energy Airy beams / G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // Opt. Lett. – 2007. – Vol.32. – P. 979–981.
3. Ring, J.D. Incomplete Airy beams: energy from a sharp spectral cut-off / J.D. Ring, C.J. Howis, M.R. Dennis // Opt. Lett. – 2013. – Vol. 38. – 1639–1641.

**М.В. Бобкова, В.В. Пекаревич, Е.А. Мельникова, А.Л. Толстик**  
УО «Белорусский государственный университет», Минск, Беларусь

## **ФАЗОВО-ПОЛЯРИЗАЦИОННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННО СТРУКТУРИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМЫХ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ**

### **Введение**

В настоящее время анизотропные жидкокристаллические (ЖК) среды широко применяются как эффективные функциональные материалы в оптических системах отображения информации, а также в многочисленных устройствах для управления световыми пучками и их преобразования. Повышенный интерес к таким веществам связан с технологичностью их производства, низкими управляющими напряжениями, малой стоимостью и массогабаритными характеристиками.

Актуальными являются задачи формирования и преобразования световых полей с заданной поляризационной и фазовой структурой. Световые пучки со сложной топологией фазы и поляризации широко используются для лазерной обработки материалов [1, 2], эффективно применяются в оптических пинцетах [3] и в устройствах оптической обработки информации [4].

В настоящей работе показана возможность управления фазовой и поляризационной структурой световых пучков с использованием электрически управляемых пространственно структурированных ЖК элементов.

## 1. Структура жидкокристаллических элементов и технология их создания

Как известно, электрооптические свойства ЖК сред зависят от ориентации молекул на ограничивающих стенках подложек ЖК ячейки, а направление оптической оси в планарно ориентированном слое нематического жидкого кристалла определяется направлением директора молекул ЖК и может изменяться при воздействии внешнего электрического поля [5]. С применением современных методов ориентации ЖК молекул можно формировать сложное распределение ЖК директора на подложках ячейки, которое нельзя реализовать с помощью традиционных методов, таких как метод натирания полимеров.

В настоящей работе анизотропная жидкокристаллическая структура ЖК элементов образовывалась в результате пространственно-неоднородной ориентации ЖК молекул фотоориентирующим покрытием при экспонировании тонкой пленки ориентанта излучением с длиной волны  $\lambda$ , соответствующей синей области видимого спектра, с заданным пространственным распределением интенсивности и поляризации. Образец разбивался на 180 секторов, каждый сектор засвечивался излучением с заданной поляризацией, длиной волны 440 нм и интенсивностью 15 мВт/см<sup>2</sup> в течение 20 секунд. Время экспонирования всего элемента составило 1 час 20 минут. В качестве фотоориентирующего покрытия использовался азокраситель AtA-2, разработанный в институте химии новых материалов НАН Республики Беларусь. Этот азокраситель имеет высокую энергию сцепления с ЖК молекулами, обладает термо- и фотостабильностью [6]. Топология ориентации ЖК директора в элементах представлена на рисунке 1.

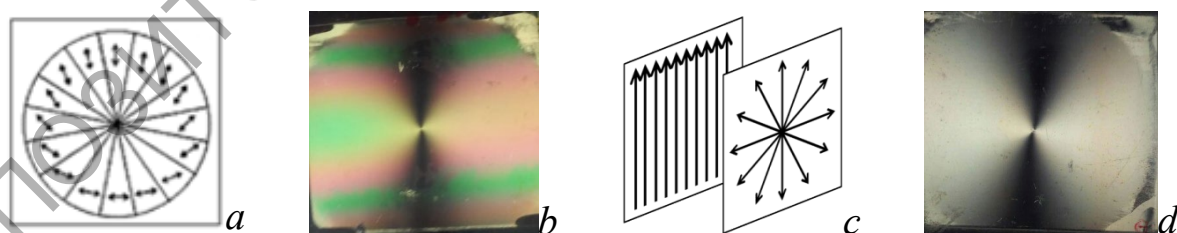


Рисунок 1 – Топология распределения ЖК директора (a – планарная структура, c – твист структура) и изображение соответствующих элементов при наблюдении в скрещенных поляризаторах (b, d)



В первом элементе (рисунок 1, *a, b*) в местах засветки фотоориентанта пространственно модулированным излучением создается соответствующая планарная ЖК структура (*S*-деформация ЖК молекул). Такой элемент при значениях набега фазы между обыкновенным и необыкновенным лучами равным  $\Delta\Phi = \pi(2m+1)$  функционирует как полуволновая пластинка с пространственно неоднородной ориентацией оптической оси. Управление величиной фазового набега производится посредством изменения внешнего напряжения. Во втором элементе ориентация молекул на двух подложках ячейки различна (рисунок 1, *c, d*), в результате чего в объеме ЖК среды формируется «твист»-структура (*T*-деформация) ЖК молекул.

## 2. Оптические свойства жидкокристаллических элементов

С использованием полученных элементов можно обеспечить формирование как азимутальной, так и радиальной поляризации – в зависимости от взаимной ориентации векторов, определяющих поляризацию входного излучения и ориентацию ЖК элемента.

Профиль распределения интенсивности в сечении линейно поляризованного светового пучка на выходе первого ЖК элемента (рисунок 1, *a, b*) может быть различным и зависит от приложенного к системе внешнего напряжения (рисунок 2, напряжение указано в вольтах).

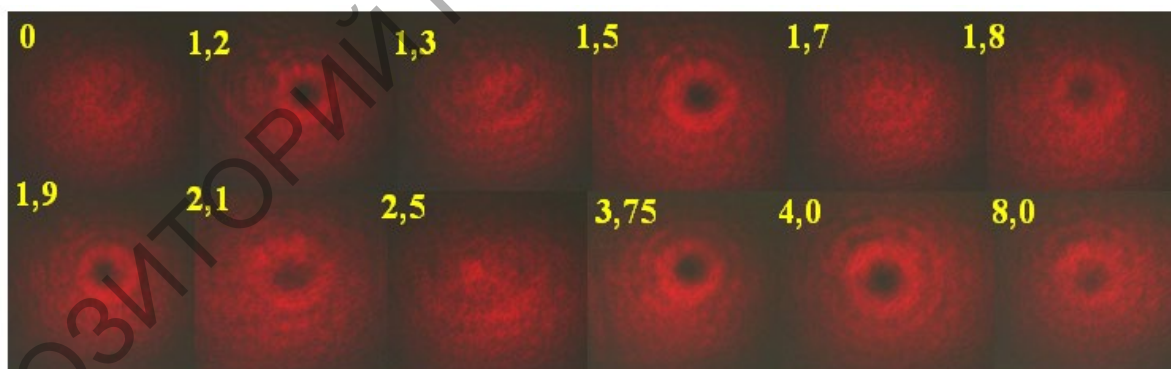


Рисунок 2 – Поперечное сечение линейно поляризованного гауссова светового пучка на выходе ЖК элемента при различных значениях напряжения

При значениях напряжения, которые соответствуют формированию азимутальной (или радиальной) поляризации светового поля, интерференционные картины исследуемого и гауссова пучков имеют «вилкоподобную» структуру, а расщепление интерференционной по-

лосы происходит в месте образования винтовой дислокации (рисунок 3). Топологический заряд оптического вихря равен +1.

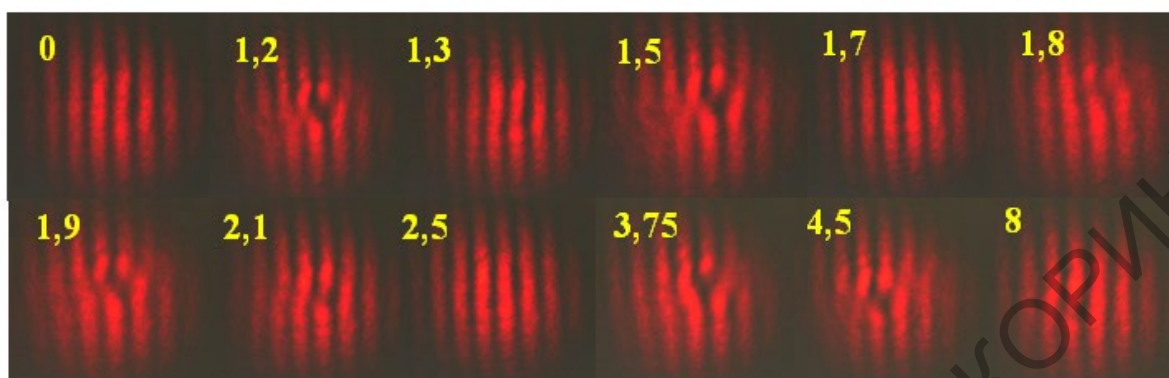


Рисунок 3 – Результаты исследования сингулярности линейно поляризованного светового пучка на выходе ЖК элемента

Твист-ЖК элемент (рисунок 1 *c, d*) преобразует линейно поляризованный входной пучок в пучок с радиальной (азимутальной) поляризацией вне зависимости от фазового набега. При подаче на такой элемент напряжения, соответствующего интервалу от 0 до 2,4 В, в профиле сечения как линейно поляризованного, так и циркулярно поляризованного гауссова пучка, на выходе ЖК ячейки наблюдаются черные полосы, обусловленные рассеянием света на дисклинациях (рисунок 4).

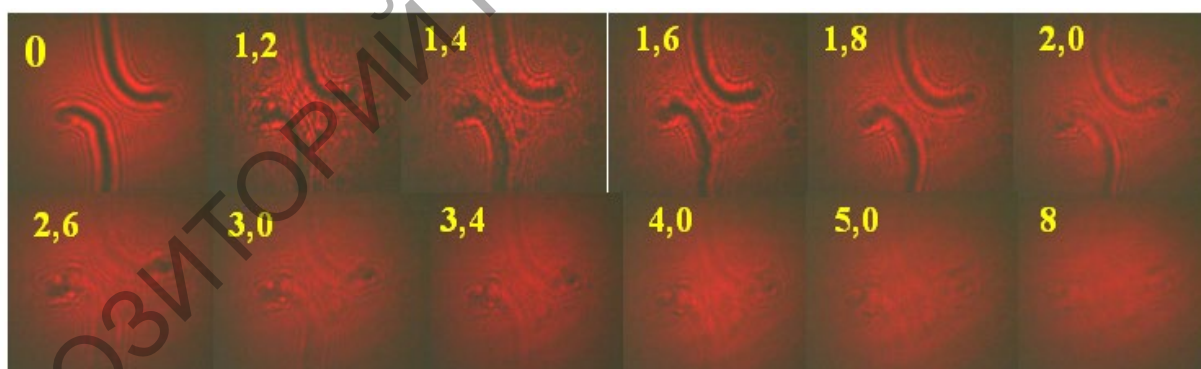


Рисунок 4 – Поперечное сечение циркулярно поляризованного гауссова светового пучка на выходе ЖК элемента при различных значениях напряжения

При напряжениях, соответствующих интервалу от 2,4 до 3,4 вольт в сечении пучков появляются два выраженных провала интенсивности. На интерферограммах наблюдается расщепление двух интерференционных линий – образование двух оптических вихрей, топологический заряд которых равен +1 (рисунок 5).

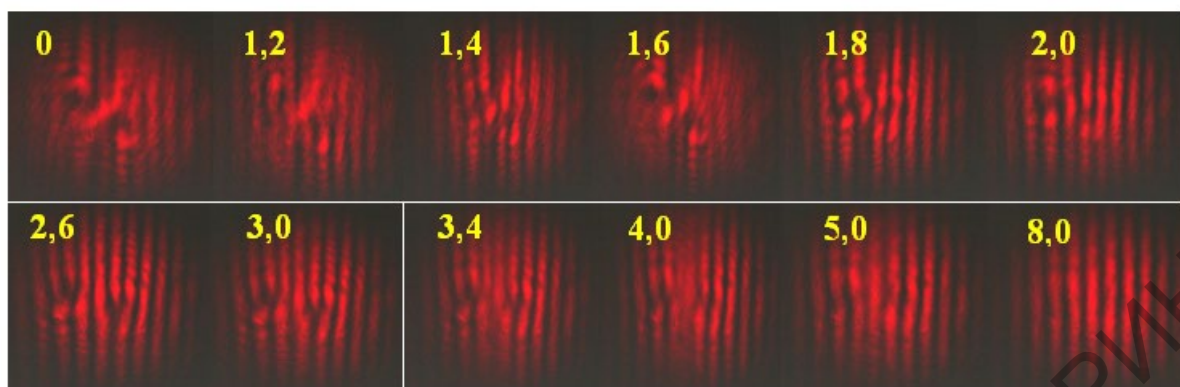


Рисунок 5 – Результаты исследования сингулярности циркулярно поляризованного светового пучка на выходе ЖК элемента

### Заключение

Таким образом, полученные жидкокристаллические элементы со сложным начальным распределением ЖК молекул могут применяться в целях электрически управляемого преобразования фазово-поляризационной структуры лазерного излучения.

### Литература

1. Niziev, V.G. Influence of beam polarization on laser cutting efficiency / V.G. Niziev, A.V. Nesterov // J. Phys. – 1999. – Vol. 32. – P. 1455–1461.
2. Nesterov, A.V. Laser beams with axially symmetric polarization / A.V. Nesterov, V.G. Niziev // J. Phys. – 2000. – Vol. 33. – P. 1817–1822.
3. Абраамян, В.К. Применение аксиально-симметричной фазовой и круговой дифракционной волновой пластин в оптических пинцетах / В.К. Абраамян // Известия НАН Армении, Физика. – 2015. – Т. 50, № 3. – С. 321–330.
4. Molina-Terriza G. Twisted photons / G. Molina-Terriza, J.P. Torres, L. Torner // Nat. Phys. 3(5). – 2007. – P. 305–310.
5. Блинов, Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов / Л.М. Блинов. – М.: Наука, 1928. – 384 с.
6. Mikulich, V.S. Influence of Methyl Substituents on Azo-Dye Photoalignment in Thin Films / V.S. Mikulich, An.A. Murauski, Al.A. Muravsky, V.E. Agabekov // J. Appl. Spectr. – 2016. – Vol. 83, № 1. – P. 115–120.

**А.Н. Василенко, И.У. Примак, А.Г. Старовойтов, А.В. Хомченко**  
ГУВПО «Белорусско-Российский университет»,  
Могилев, Беларусь

## **ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ В СРЕДАХ С БОЛЬШОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ**

### **Введение**

Интерес к исследованию распространения световых пучков в неоднородных анизотропных средах обусловлен широким спектром их практических применений в оптических устройствах. Примерами таких материалов являются градиентно-легированные лазерные среды и закаленное стекло. Для исследования их свойств определенным интерес представляют методы поляриметрии, основанные на эффекте фотоупругости. Поляризационно-оптический метод, предложенный в [1], пригоден для визуализации поля напряжений в большом фрагменте анализируемого объекта. При этом следует отметить, что, регистрируя распределение интенсивности света, можно анализировать и оценивать двулучепреломление в отдельной точке или контролируемой области исследуемого объекта. Настоящая работа представляет развитие исследований, целью которых является анализ распределения двулучепреломления в неоднородных анизотропных средах.

### **1. Поляризационная интерферометрия анизотропных сред**

Принципиальная схема установки, используемой для регистрации пространственного распределения интенсивности поляризованного света, приведена на рисунке 1.

Линейно поляризованный свет с длиной волны 532 нм, проходит через неоднородную анизотропную среду 3; при этом состояние его поляризации в каждой точке плоскости  $(x,y)$  изменяется в разной степени. После этого пучок проходит через анализатор 4, скрещенный с поляризатором 2, и попадает в фоторегистрирующее устройство 6, подключенное к компьютеру 7.

С использованием цифровых фоторегистрирующих устройств стало возможным сканирование образца в плоскости  $(x,y)$  в целях установления распределения интенсивности излучения в ней. При этом интенсивность света в точке с координатами  $(x, y)$  описывается выражением [2]

$$I(x, y) = I_p T (\cos^2 \chi - \sin 2\alpha \cdot \sin(2(\alpha - \chi)) \sin^2 \frac{\delta}{2}), \quad (1)$$

где  $I(x, y)$  – регистрируемое распределение интенсивности света, прошедшего через неоднородный анизотропный образец;  $I_p = I_p(x, y)$  – интенсивность света на выходе из поляризатора;  $T = T(x, y)$  – коэффициент, определяемый с учётом отражения света от поверхности образца;  $\alpha = \alpha(x, y)$  – угол между оптической осью образца в точке  $(x, y)$  и плоскостью пропускания поляризатора;  $\chi$  – угол между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора;  $\delta = \delta(x, y)$  – разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами.

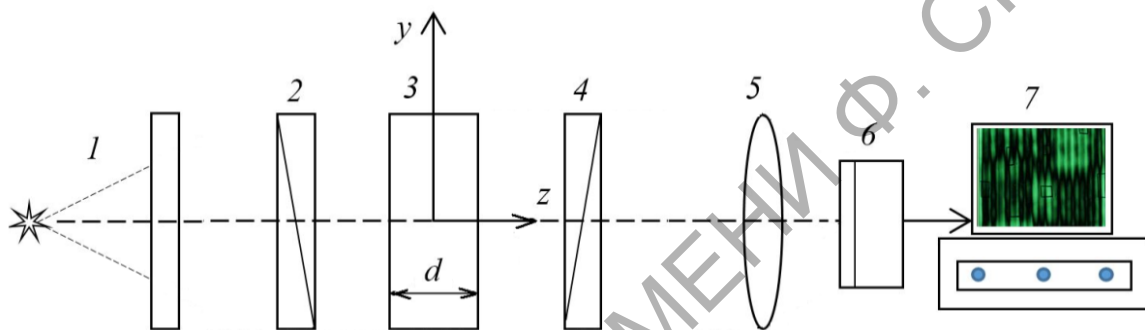


Рисунок 1 – Принципиальная оптическая схема установки, используемой для регистрации поляризационных интерферограмм:

1 – источник света, 2 – поляризатор, 3 – исследуемый объект, 4 – анализатор, 5 – фокусирующая линза, 6 – фоторегистрирующее устройство, 7 – компьютер

Обработывая регистрируемые распределения  $I(x, y)$ , можно восстановить разность фаз  $\delta$  в каждой точке образца.

$$\delta = 2 \left\{ \arcsin \left[ \frac{I_{\perp}^{(1)}}{(I_{\perp}^{(1)} + I_{\parallel}^{(1)})} + \frac{I_{\perp}^{(2)}}{(I_{\perp}^{(2)} + I_{\parallel}^{(2)})} \right]^{1/2} + m\pi \right\}, \quad (2)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $I_{\perp}^{(1)}$ ,  $I_{\perp}^{(2)}$ ,  $I_{\parallel}^{(1)}$ ,  $I_{\parallel}^{(2)}$  – экспериментально измеренные при определенных условиях распределения интенсивности в плоскости  $XOY$ .

Традиционно используемый компенсационный метод измерения разности фаз [3] также пригоден для измерения разности фаз  $\delta$  в отдельной точке образца, так как оптическая разность хода, связанная с  $\delta$ , определяется выражением

$$\Delta = \frac{\varphi \cdot \lambda}{180} \pm m\lambda, \quad (2)$$

где  $m$  – некоторое целое число,  $\lambda$  – длина волны излучения,  $\varphi$  – угол, на который надо повернуть анализатор, чтобы при измерении получить равное нулю значение интенсивности.

Известно, что методами поляриметрии оптическая разность хода измеряется в пределах, не превышающих длины волны применяемого излучения (т. е. измеряется только дробная часть разности хода), что ограничивает область применения поляриметрии.

### 1. Оценка полной разности хода методом компенсации

При измерении разности хода методами оптической поляриметрии составляющую  $m\lambda$  в выражении (2) можно определить, сравнивая ее дробные части, измеренные при использовании излучения различных длин волн. На рисунке 2 представлена принципиальная схема измерительной установки, содержащей источник 1, конденсор 2, модулятор 3, светофильтры 4 и 5, поляризатор 6, плоское зеркало 7, образец 8, четвертьволновые пластинки 9 и 10, анализатор 11, фотоприемник 12, селективный усилитель 13, аналогово-цифровой преобразователь 14, интерфейс 15, компьютер 16.

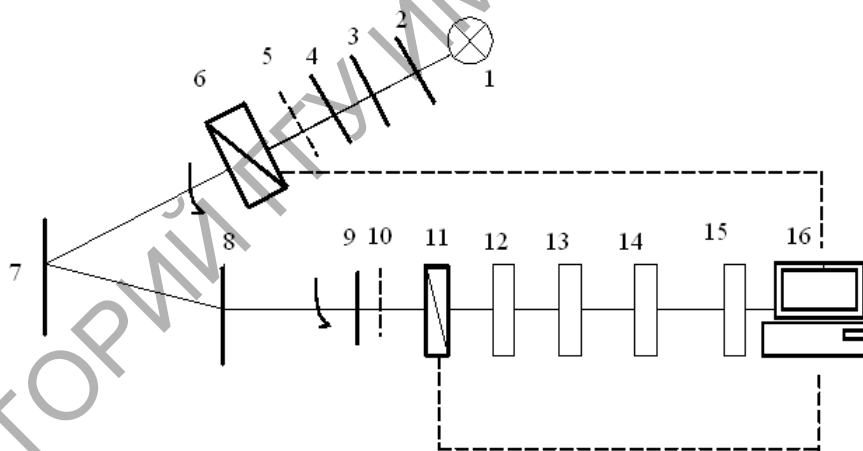


Рисунок 2 – Схема измерительной установки

При этом направления максимального пропускания обеих четвертьволновых пластинок 9 и 10 параллельны плоскости пропускания поляризатора 6. Синхронно вращая поляризатор и анализатор, четвертьволновую пластинку 9 (или 10), соответствующую длине волны зондирующего излучения  $\lambda_1$  (или  $\lambda_2$ ), поворачивают до получения на индикаторе 13 максимального сигнала. Устанавливают отсчетный лимб на ноль шкалы анализатора 11, затем вращают анализатор по часовой стрелке, и по лимбу снимают отсчет, соответствующий мини-

мальному сигналу на индикаторе 13. Описанные действия повторяют при каждой выбранной длине волны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и находят оптические разности хода:

$$\Delta_{\lambda_1} = \frac{\varphi_1 \lambda_1}{180} \text{ и } \Delta_{\lambda_2} = \frac{\varphi_2 \lambda_2}{180} .$$

Пусть интенсивность излучения, прошедшего через образец, минимальна, если разность хода лучей для излучения с длиной волны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  равна нулю или одному и тому же числу длин волн. Тогда отложим на прямой  $\lambda_1$  (рисунок 3) отрезок  $MQ$ , равный обусловленной двулучепреломлением анизотропного объекта разности хода  $\Delta_1$ , соответствующей значению  $m$  в выражении (2). На прямой  $\lambda_2$  отложим разность хода  $\Delta_2$ , соответствующую длине волны  $\lambda_2$ .

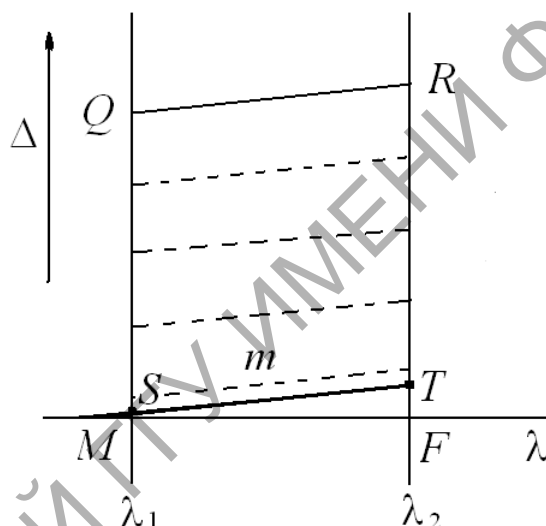


Рисунок 3 – Схема измерения разности хода

Для компенсатора, при помощи которого измеряется дробная часть разности хода, вносимой объектом, мы аналогичным образом получим два отрезка  $SM = \Delta_{\lambda_1}$  и  $FT = \Delta_{\lambda_2}$ . В общем случае прямые  $ST$  и  $QR$  не совпадают, тогда проведем ряд прямых, параллельных  $QR$  и отстоящих от нее на расстоянии, соответствующем разности хода в 1, 2, 3 и т.д. длин волн (пунктирные линии на рисунке 3). Если прямую  $ST$  можно при ее смещении параллельно самой себе совместить с одной из этих пунктирных прямых, то в этом случае разность хода, приобретенная волнами после прохождения через исследуемый образец и компенсатор, будет равна одному и тому же целому числу для обеих рассматриваемых линий  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Если  $ST$  не совпадает ни с одной из пунктирных линий, то мы найдем два положения компенсатора, соответствующие прямой  $ST$ , которую можно совместить с  $(m+1)$  пунк-

тирной линией на рисунке 3. В этом случае поворот компенсатора на  $180^\circ$  соответствует изменению дробной части на единицу. Из рисунка следует, что число точек пересечения пунктирных прямых с прямыми, соответствующими  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , в пределах отрезков  $QS$  и  $RT$  равно целому числу длин волн  $m$ , ближайшему к величине

$$m \approx \frac{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (3)$$

а полная разность хода определяется по формуле

$$\Delta = \left( \frac{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \lambda_1 + \Delta\lambda_1 \quad (4)$$

или

$$\Delta = \left( \frac{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \lambda_2 + \Delta\lambda_2. \quad (5)$$

Таким образом, используя описанную процедуру можно определить полную разность фаз.

### 3. Измерение разности фаз на основе регистрации рассеянного света

Для нахождения порядка  $m$  и определения полной разности фаз методом поляризационной интерферометрии были выполнены измерения пространственного распределения интенсивности рассеянного излучения при сканировании по толщине образца, поперечное сечение которого освещалось узким световым пучком, и произведен последующий анализ распределения интенсивности света, рассеянного на неоднородностях показателя преломления в стекле [4]. При таких наблюдениях можно визуализировать распространение света в анизотропном стекле. Рассмотрим процедуру измерений, используемую в данном подходе. Схема установки, предназначенной для регистрации распределения интенсивности рассеянного света, представлена на рисунке 4. Линейно поляризованный световой пучок диаметром 180 мкм от источника 1 направляется нормально к торцевой поверхности стеклянного образца 6 и распространяется в нем. В качестве источника света использован твердотельный лазер, генерирующий излучение с длиной волны 533 нм.

Рассеянный свет регистрируется фоторегистрирующим устройством 5 в плоскости, перпендикулярной первоначальному направлению его распространения. В результате интерференции обыкновенной



и необыкновенной волн изменяется состояние поляризации светового пучка при его распространении вдоль образца.

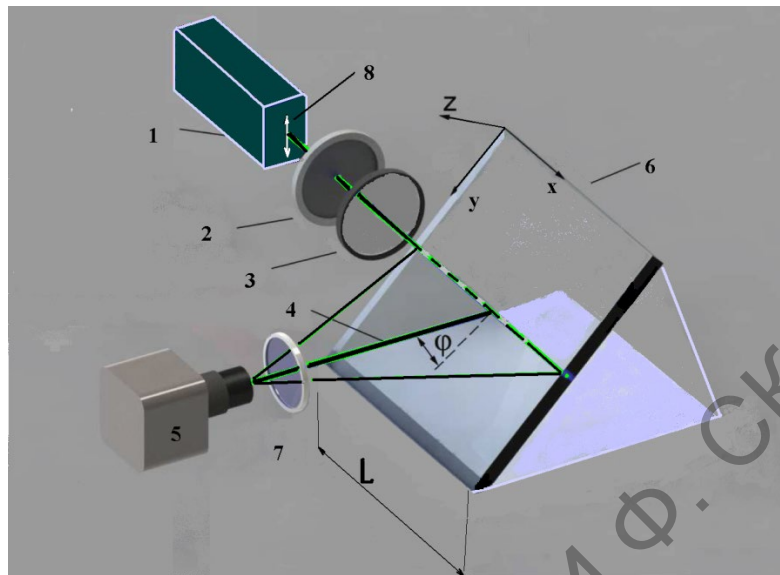


Рисунок 4 – Принципиальная схема измерительной установки:

1 – источник света, 2 – поляризатор, 3 – линза, 4 – регистрируемое излучение, 5 – фотокамера, 6 – исследуемый объект, 7 – фильтр, 8 – направление поляризации излучения, прошедшего через поляризатор

Пространственная модуляция рассеянного света надёжно (отношение сигнал/шум не менее 50) регистрируется в направлении, перпендикулярном направлению распространения зондирующего излучения в анизотропном образце (рисунок 5).

При этом набег фаз  $\delta = \pi$  возникает на отрезке длиной  $x$ , равной периоду регулярного распределения интенсивности рассеянного света, что можно использовать для определения параметра  $m$  в выражении (2) и избежать неоднозначного определения разности фаз в исследуемом образце.

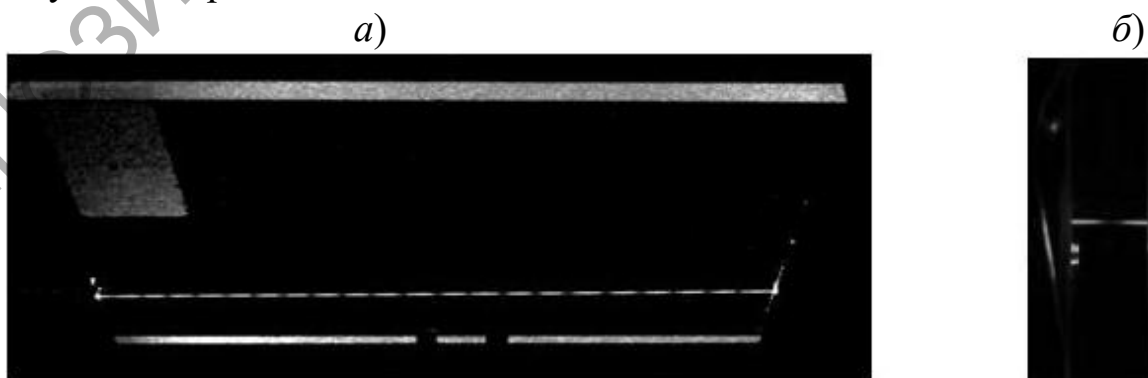


Рисунок 5 – Пространственная модуляция рассеянного света при его распространении вдоль образца (а) и в его поперечном сечении (б)

## Заключение

Таким образом, продемонстрирована возможность измерения двулучепреломления в средах с большой анизотропией методами поляриметрии. Рассмотрены особенности применения поляриметрии для измерения двулучепреломления в тонкопленочных анизотропных материалах. Выполнена оценка чувствительности метода при исследовании свойств анизотропных материалов большой толщины.

## Литература

1. Хомченко, А.В. Измерение распределения разности фаз при линейном двулучепреломлении в твердых телах с внутренними напряжениями / А.В. Хомченко, И.У. Примак, А.Н. Василенко // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2016. – Т. 96, № 3. – С. 124–130.
2. Оптические свойства кристаллов / А.Ф. Константинова, Б.Н. Гречушников, Б.В. Бокуть, Е.Г. Валяшко. – Мн.: Наука и техника. – 1995. – С. 88–94.
3. Park, В.К. Precision polarimetry with real-time mitigation on optical window birefringence / В.К. Park, А.О. Sushkov, D. Budker // Review of Scientific instruments. – 2009. – Vol. 79, № 013108. – P. 1–5.
4. Hödemann, S. Scattered laser light fringe patterns for stress profile measurement in tempered glass plates / S. Hödemann [et al.] // European Journal Glass Scientific Technology, A. – 2014. – Vol. 55, № 3. – P. 90–95.

**С.В. Васильев, А.Ю. Иванов, В.И. Недолугов**

УО «Гродненский государственный университет  
имени Янки Купалы», Гродно, Беларусь

## **РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕГИСТРАЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН, ФОРМИРУЮЩИХСЯ В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ОБРАЗЦЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТЬ ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА**

Целью данной работы является исследование формирования упругих волн при воздействии на металлический образец излучения импульсного лазера с плотностью потока  $\sim 10^6$  Вт/см<sup>2</sup>.

## 1. Методика исследований и экспериментальная установка

Нами проведены экспериментальные исследования акустических волн, возникающих при действии лазерного излучения на поверхность металлических образцов. В качестве источника излучения использовался лазер на этанольном растворе родамина 6Ж [1]. Энергия лазерного импульса измерялась калориметром ИМО-2Н. Для получения достаточно однородного пятна облучения диаметром  $\sim (3 \div 4)$  мм с резкими краями часть лазерного пучка выделялась с помощью диафрагмы, изображение которой формировалось на поверхности мишени двухлинзовой системой. Сигнал с датчика давления, прикрепленного к тыльной стороне мишени и расположенного на оптической оси системы, подавался на вход запоминающего осциллографа С8-13. Запуск осциллографа осуществлялся посредством лазерного импульса, часть энергии которого подавалась на коаксиальный фотоэлемент через блок временной задержки.

Следует отметить, что обычно в экспериментальных установках длина коаксиального кабеля между датчиком и регистрирующим прибором достигает нескольких десятков метров, т.е. суммарная электрическая ёмкость кабеля может обусловить искажение формы регистрируемого сигнала, особенно если это короткий импульс с широким спектром. Поэтому согласование датчика давления с коаксиальным кабелем при подобных исследованиях является весьма актуальной задачей.

В частности, для согласования традиционно используемого датчика на основе пьезокерамики ЦТС-19, имеющего большое внутреннее сопротивление (порядка 1 МОм), с коаксиальной линией (коаксиальный широкополосный кабель типа РК-75, имеющий погонную электрическую ёмкость 70 пФ/м), необходим буферный усилитель с высокоомным входом и низкоомным выходом.

При длине линии равной 5м (реальная длина кабеля в экспериментальной установке) верхняя граничная частота полосы пропускания системы «датчик – регистратор» может быть оценена на основе формулы  $F_B = 1 / (R_d \times C_L)$ , где  $R_d$  – внутреннее сопротивление датчика, равное в нашем случае 1МОм,  $C_L$  – суммарная электрическая емкость коаксиального кабеля (1000пФ). При указанных значениях параметров находим  $F_B = 1 / (1 \times 10^6 \text{ Ом} \times 1000 \times 10^{-12} \text{ Ф}) = 1$  кГц, что явно недостаточно для регистрации широкополосных сигналов.

Следовательно, между датчиком и регистратором должно быть установлено согласующее устройство с высокоомным входом и низ-

коомным выходом, обеспечивающее с минимальными искажениями передачу формы сигнала от датчика к регистратору (запоминающему осциллографу С8-13).

Поэтому нами в качестве элемента, предназначенного для регистрации давления в акустической волне, использовалось беспроводное устройство регистрации физических величин (БУРФВ) [2]. При этом обеспечивалась дальность связи до 50 м и трансляция регистрируемой упругой волны без искажений.

В качестве резервного (контролирующего) элемента для регистрации давления в акустической волне использовался упомянутый выше датчик на основе пьезокерамики ЦТС-19 в сочетании с устройством, предназначенным для компенсации отражения [3]. Выбор типа датчика производился с учётом значительного (более чем в 2 раза) отличия пьезомодулей  $d_{31}$  и  $d_{33}$ , следствием которого была преимущественная регистрация составляющей упругого напряжения, нормальной к рабочему срезу. Полоса пропускания датчика была приемлемой для регистрации сигналов, частота которых не превышала 1 МГц.

## 2. Результаты экспериментов и их обсуждение

В результате исследований показано, что временная зависимость составляющей тензора упругих напряжений  $\sigma_{zz}$ , регистрируемой на расстоянии  $l_p \geq 20$  см от облучаемой поверхности (указанное расстояние определялось толщиной мишени), имеет вид единичного импульса; при этом длительности акустического и падающего на образец лазерного импульсов практически совпадают.

Выявленная зависимость в указанных условиях хорошо соотносится с результатами, приведенными в работах [4, 5], а также с результатами расчетов  $\sigma_{zz}$  в объемной продольной волне, опубликованными в работе [6].

При действии лазерного излучения на металлический образец толщиной  $\sim (0,1 \div 1)$  см временная зависимость  $\sigma_{zz}(t)$  имела осциллирующий вид (рисунок 1). При этом длительность первого полупериода колебаний определялась длительностью лазерного импульса  $2\tau_1$ . Длительность следующих полупериодов не зависела от  $\tau$  и определялась диаметром пятна фокусировки лазерного излучения  $2\rho_1$  и глубиной  $h_f$  кратера, образовавшегося на поверхности мишени. При этом длина зарегистрированной акустической волны  $\lambda_1$  во много раз превышала как  $h_f$ , так и  $\rho_1$ , но была  $\sim \frac{\rho_1^2}{2h_f}$ . Очевидно, наличие осцилля-

ций в зависимости  $\sigma_{zz}(t)$  связано с колебаниями в поверхностной волне [6]; именно поэтому при  $l \gg \frac{\rho_1^2}{2h_f}$  функция  $\sigma_{zz}(t)$  имеет вид одиночного импульса.

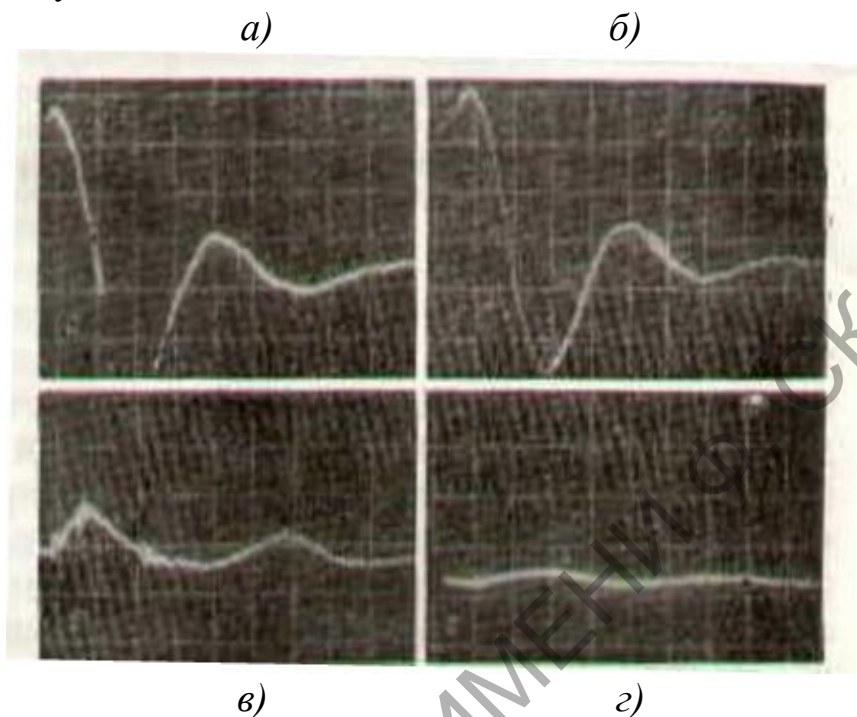
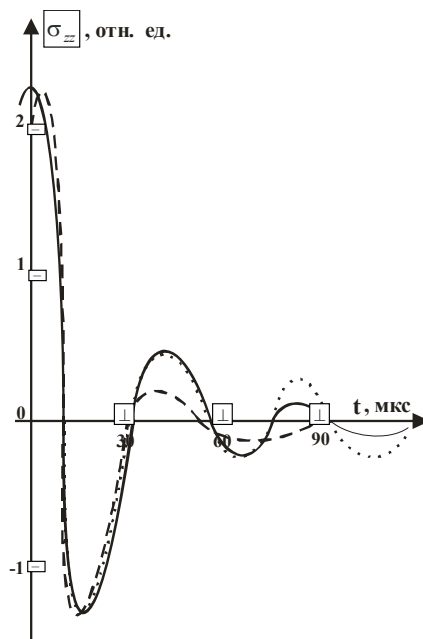


Рисунок 1 – Временные зависимости давления в акустической волне, зарегистрированной при действии лазерного импульса с энергией 25 Дж и длительностью 15 мкс (плотность потока мощности излучения 25 МВт/см<sup>2</sup>) на образцы из: а) алюминия (масса вынесенного металла  $m = 0,5$  мг); б) цинка ( $m = 0,7$  мг); в) висмута ( $m = 1,1$  мг) и з) меди ( $m = 0,3$  мг), зарегистрированные при помощи БУРФВ. На всех осциллограммах вдоль соответствующих осей масштаб одинаков: одно деление вдоль горизонтальной оси соответствует 5 мкс, вдоль вертикальной оси – 50 кПа

На рисунке 2 представлена временная зависимость давления в упругой волне, экспериментально зарегистрированной с использованием БУРФВ при действии на медный образец излучения лазера на этанольном растворе родамина 6Ж при следующих параметрах процесса:  $\tau \sim 15$  мкс,  $r_1 \sim 1,7$  мм,  $l_p \approx 0,9$  см. На этом же рисунке представлена временная зависимость давления в акустической волне, рассчитанная по методике, описанной в работе [6], при тех же значениях параметров  $\tau$ ,  $r_1$ ,  $l_p$  и при  $d = 0,2$  мм и  $T = 650$  °С.



- — эксперимент  
 - - - - - — расчет в линейном приближении,  
 ..... — расчет с учетом нелинейно – упругих эффектов

Рисунок 2 – Временные зависимости давления в акустической волне при действии лазерного импульса длительностью 10 мкс на образцы из меди

### Выводы

В результате проведенных исследований показано, что основным механизмом инициирования упругих волн при действии лазерного излучения на поверхность твердого образца является затухание ударной волны, сформировавшейся при плазмообразовании. Генерация акустических колебаний в таких условиях может быть описана в рамках модели нагруженной области, излучающей гиперзвуковые волны в упругую среду. Указанная область имеет форму сферического сегмента с основанием, совпадающим с основанием кратера, который формируется при действии лазерного излучения на поверхность твердого тела. Временная зависимость давления в возбужденной упругой волне соответствует последовательности затухающих осцилляций, амплитуда и период которых определяются отношением радиуса кривизны неупругой области  $R = r_1^2 / 2d$  к скорости продольного звука в облучаемом образце, а также температурой вещества  $T$  на границе зоны, в которой взаимодействие излучения с веществом является неупругим. Вследствие этого при известном радиусе кратера  $r_1$  можно по виду временной зависимости давления в акустической волне, сформировавшейся при действии лазерного излучения на твердое

тело, одновременно определять глубину неупруго деформированной области  $d$  и температуру  $T$ .

### Литература

1.Барихин, Б. А. Скоростная голографическая киносъемка лазерной плазмы / Б.А.Барихин, А.Ю.Иванов, В.И.Недолугов // Квантовая электроника. – 1990. – Т. 17, № 11 – С. 1477–1480.

2.Григуть, В.В. Компонентная база беспроводного устройства регистрации физических величин, применяемого в учебном эксперименте / В.В. Григуть // Современные информационные технологии в системе научного и учебного эксперимента: опыт, проблемы, перспективы : материалы III Межд. науч.-метод. конф. (Гродно, 14 – 15 мая 2015 г.) / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: В.Г. Барсуков (гл. ред.) [и др.]. – Гродно, 2015. – С. 71–73.

3.Воронель, Е.С. Измерение импульсного давления на мишень при образовании светоэрозионного факела / Е.С.Воронель, Л.П.Кирюшин. // Известия СО АН СССР. Сер. технических наук. – 1991. – № 2. – С. 75–79.

4.Минько, Л.Я. О первоначальном плазмообразовании при воздействии лазерного излучения на поглощающие материалы в условиях плоской геометрии разлета образующейся плазмы / Л.Я.Минько, Ю.А.Чивель, А.Н.Чумаков // ЖПС. – 1985. – Т. 42, № 1. – С. 55–61.

5.Лямшев, Л.М. Лазеры в акустике / Л.М.Лямшев. // УФН. – 1987. – Т. 151, № 3. – С. 479–528.

6.Иванов, А.Ю. Акустическая диагностика процесса лазерной обработки материалов / А.Ю.Иванов. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 280 с.

### С.С. Гиргель

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## СВОЙСТВА ЦИРКУЛЯРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ КУММЕРА – ГАУССА С НЕПРЕРЫВНЫМ УГЛОВЫМ ИНДЕКСОМ

### Введение

Исследование известных и поиск новых решений для оптических полей всегда актуальны. В настоящее время наибольший интерес

представляют решения в виде узконаправленных пучков, реализуемые экспериментально [1-3]. Такие пучки часто можно считать параксиальными. К ним относят пучки Гаусса, Эрмита – Гаусса, Лагерра – Гаусса, Бесселя – Гаусса и многие другие [1-10]. В работах [8-10] нами были введены в рассмотрение пучки Бесселя и Бесселя – Гаусса непрерывного порядка. В настоящей работе развитый в [8-10] подход распространен на другие решения параболического уравнения в цилиндрической системе координат. Получены выражения, описывающие циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса (K-G) с непрерывным угловым индексом, и обсуждаются физически приемлемые значения их свободных параметров.

### 1. Циркулярные 3D пучки K-G

Для монохроматических волн вида  $f(\mathbf{r}, t) = \psi \exp(-i\omega t)$  скалярное параболическое уравнение, подлежащее решению относительно амплитуды  $\psi$  параксиальных световых пучков, имеет вид [2]

$$(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 2ik\partial_z)\psi = 0, \quad (1)$$

где  $k = k_0 n$ ,  $k_0 = \omega/c$ . Целесообразно предварительно перейти к безразмерным переменным

$$X = x/x_0, \quad Y = y/x_0, \quad Z = z/z_0. \quad (2)$$

Здесь  $x_0$  и  $z = kx_0^2/2$  – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям  $OX$  и  $OY$  соответственно.

После указанной замены переменных и дополнительного перехода  $Z \rightarrow Q$  параболическое уравнение (1) в цилиндрической системе координат  $(R, \varphi, Z)$ , где безразмерный радиус  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , преобразуется к известной форме:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4i \frac{\partial}{\partial Q} \right] \psi(R, \varphi, Q), \quad (3)$$

где  $Q$  – безразмерный комплексный параметр пучка:  $Q = Z - Q_0$ , при этом  $Q_0 = Q_0' + iQ_0''$ . Здесь и далее одним и двумя штрихами отмечаем соответственно вещественные и мнимые части различных величин. Чтобы найти достаточно общее решение уравнения (3), выполним подстановку  $R = R_1 \sqrt{-iQ}$  в (3). Тогда получим уравнение

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial R_1^2} + \left( \frac{1}{R_1} - 2R_1 \right) \frac{\partial}{\partial R_1} + \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4Q \frac{\partial}{\partial Q} \right] \psi_1(R_1, \varphi, Q) = 0, \quad (4)$$

решением которого является функция



$$\psi = (R_1^2)^{m/2} M(-\nu, m+1; R_1^2)(\cos m\varphi + ib \sin m\varphi) Q^{m/2+\nu}. \quad (5)$$

Здесь  $M(\dots)$  – специальная функция Куммера, или, иначе, вырожденная гипергеометрическая функция  ${}_1F_1$  [11-13]. Для получения гауссовоподобных решений по отношению к функции (5) произведём обобщенное преобразование Аппеля [4] в форме:

$$\psi(R, \varphi, Q) \rightarrow G \psi\left(\frac{iR}{Q}, \varphi, Q^{-2}\left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{P}\right)^{-1}\right). \quad \text{Здесь } G(R, Z) = \frac{1}{Q} \exp\left(i \frac{R^2}{Q}\right)$$

3D-гауссиан и введен второй комплексный параметр пучка  $P = Z - P_0$ , где комплексная константа  $P_0 = P_0' + iP_0''$ . Получаем, с точностью до постоянной,

$$\psi = G\left(\frac{P}{Q}\right)^{\nu} \left(\frac{R}{Q}\right)^m M(-\nu, m+1; R_2^2)(\cos m\varphi + ib \sin m\varphi), \quad (6)$$

где  $R_2^2 = iR^2\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)$ . Итак, выражение (6) характеризует гауссовоподобные 3D пучки, обладающие цилиндрической (или циркулярной) симметрией. Свойства этих пучков зависят от переменных  $(R, \varphi, Z)$  и четырех свободных параметров  $(m, \nu, P_0, Q_0)$ . М.А. Бэндрес [4] называет пучки (6) циркулярными пучками.

## 2. Условия физической реализуемости циркулярных 3D пучков К-Г

Сначала обсудим ограничения на диапазон значений параметра  $m$ . Обычно полагают, что  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Однако это правильно только для связанных состояний, какие описываются, например, в квантовой механике. Рассматриваемый нами пучок распространяется в свободном пространстве, поэтому угловой индекс  $m$  может быть непрерывным. Поэтому в (1.6) можно использовать  $m \geq 0$ . Обсуждаемые нами циркулярные 3D световые пучки К-Г с непрерывным угловым индексом  $m \geq 0$  являются также фракционными [15-18] и имеют спиральный волновой фронт.

Наибольший практический интерес представляют физически реализуемые пучки конечной мощности. При  $|R| \rightarrow \infty$  амплитуда  $\psi$  должна стремиться к нулю и интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dXdY$  должен сходиться, т.е. функция  $\psi$  должна удовлетворять условиям квадратичной интегрируемости (КИ). Произведем анализ условий КИ для циркулярных

3D световых пучков  $K-G$ . Для этого исследуем поведение функций  $\Psi$  при  $R \rightarrow \infty$ , следуя методике [8]. Заметим, что в статьях Бэндрэса [5, 6] за условия КИ принимается только выполнение неравенств ( $Q_0'' > 0, P_0'' > 0$ ) и не рассматриваются возможные важные случаи  $P_0'' \rightarrow \pm\infty, Q_0'' \rightarrow \pm\infty$ . Поэтому в настоящем сообщении заново проанализированы и уточнены (по сравнению с работами [4-7]) условия физической реализуемости 3D циркулярных пучков  $K-G$  непрерывного углового индекса  $m$ , которые характеризуются конечной переносимой мощностью и являются устойчивыми. Для удобства полученные результаты представлены в таблице 1, где  $N = 1, 2, 3 \dots$ .

Таблица 1 – Условия КИ для 3D циркулярных световых пучков  $K-G$  с непрерывным угловым индексом  $m$

	Ограничения на параметры $Q_0''$	Ограничения на параметры $P_0''$	Ограничения на индекс $\nu = \nu' + i\nu''$ ( $m \geq 0$ )
1	$Q_0'' > 0$	$P_0'' > 0$	НЕТ
2	$Q_0'' > 0$	$P_0'' < 0$	$\square - 1$
3	$Q_0'' < 0$	$P_0'' > 0$	$-m - \square$
4	$Q_0'' > 0$	$ P_0''  \rightarrow \infty$	$\nu' > -(1+m)/2$
5	$ Q_0''  \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' < -(1+m)/2$

### 3. Графическое моделирование распределения интенсивности в поперечном сечении 3D циркулярных пучков $K-G$ непрерывного углового индекса $m$

На рисунках 1 и 2 представлены результаты графического моделирования распределения интенсивности циркулярных пучков  $K-G$  непрерывного углового индекса  $m$  в их поперечном сечении.

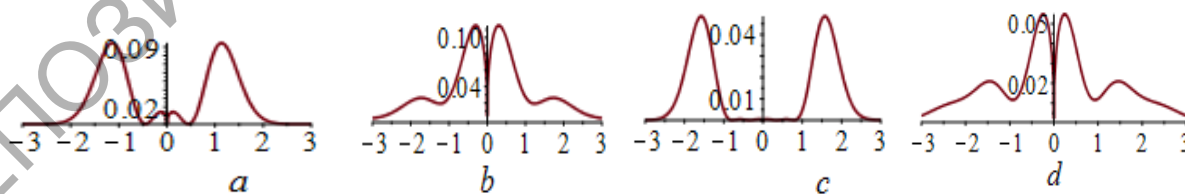


Рисунок 1 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка: вариант  $a - Z = 0; \nu = 1$ ; вариант  $b - Z = 1; \nu = 1$ ; вариант  $c - Z = 1; \nu = 2$ ; вариант  $d - Z = 0; \nu = 2$ . Во всех случаях  $Q_0'' = 1; P_0'' = -0,2$

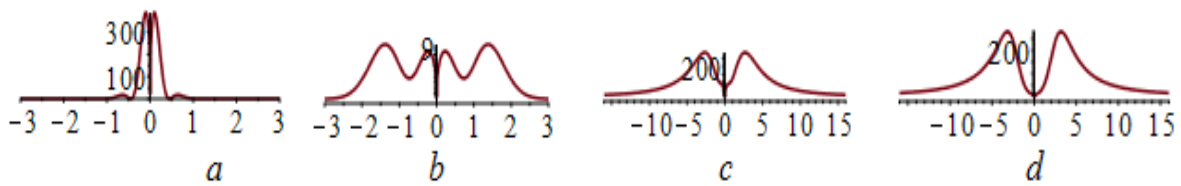


Рисунок 2 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка: вариант  $a$  –  $Z = 0$ ;  $Q_0'' = -1$ ;  $P_0'' = 0,2$ ;  $\nu = -2,2$ ;  
 вариант  $b$  –  $Z = 0,5$ ;  $Q_0'' = -1$ ;  $P_0'' = 0,2$ ;  $\nu = -2,2$ ; вариант  $c$  –  $Z = 0$ ;  $Q_0'' = 1$ ;  
 $P_0'' \rightarrow -\infty$ ;  $\nu = -0,5 - 2i$ ; вариант  $d$  –  $Z = 0,5$ ;  $Q_0'' = 1$ ;  $P_0'' \rightarrow -\infty$ ;  $\nu = -0,5 - 2i$

Для простоты, азимутальный параметр модуляции выбран равным единице:  $b = 1$ . При таком условии график интенсивности пучка не зависит от азимута, поэтому на рисунках изображены только сечения пучка плоскостями, содержащими ось  $z$ . Во всех случаях свободные параметры  $P_0' = Q_0' = 0$  и  $m = 0,2$ . Геометрические места точек, соответствующих равной интенсивности в поперечных сечениях пучка (картины интенсивности) представляют концентрические кольца; разным кольцам соответствуют разные значения интенсивности. На рисунке 1 иллюстрированы различные частные случаи, соответствующие варианту 2 в таблице 1. При сравнении фрагментов  $a$  и  $b$  рисунка 2 с выводами, относящимися к варианту 3 в таблице 1, убеждаемся в их полном соответствии. Такое же заключение можно сделать при сравнении фрагментов  $c$  и  $d$  рисунка 2 с выводами, соответствующими варианту 4 в таблице 1.

### Заключение

В данной работе для описания новых типов пучков – 3D циркулярные световые пучки Куммера-Гаусса с непрерывным угловым индексом  $m$  – предложены аналитические выражения в замкнутой форме и произведен их анализ. Они характеризуются тремя свободными параметрами: тремя вещественными непрерывными –  $(Q_0'', P_0'', m)$  и комплексным параметром  $\nu$ . Частными случаями введенных здесь пучков являются известные циркулярные пучки и пучки Лагерра – Гаусса [1-6] с дискретными целочисленными индексами  $\nu$ .

Сформулированы физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков во всем пространстве; их правомочность подтверждена при графическом моделировании амплитуд.

Произведено графическое моделирование циркулярных пучков  $K-G$  и показано, что использование непрерывного спектра значений углового индекса  $m$  и комплексных значений свободного параметра  $V$  физически приемлемо.

При одновременном переходе от дискретных значений  $m$  к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям  $V$  существенно расширяется класс известных в настоящее время пучков с цилиндрической симметрией. При варьировании новых свободных параметров таких пучков, несомненно, появляются новые дополнительные возможности для формирования и исследования пучков с заданными свойствами в целях последующего их практического применения.

### Литература

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М.: Наука, 1990. – 264 с. Gori, F. Bessel-Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, and C. Padovani // Opt. Commun. – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.
2. Киселев, А.П. Новые структуры параксиальных гауссовых пучков / А. П. Киселев // Опт. и спектр. – 2004. – Т. 96, № 4. – С. 533–535.
3. Гончаренко, А.М. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 142 с.
4. Bandres, Miguel A. Circular beams / Miguel A. Bandres and Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.
5. Bandres, Miguel A. Higher-order moments and overlaps of rotationally symmetric beams / Miguel A. Bandres, Dorilian Lopez-Mago and Julio C. Gutierrez-Vega // J. Opt. – 2010. – Vol. 12. – 015706 (10pp).
6. Lopez-Mago, Dorilian. Propagation of Whittaker-Gaussian Beams / Dorilian Lopez-Mago, Miguel A. Bandres and Julio C. Gutierrez-Vega // Proc. of SPIE. – 2011. – Vol. 7430, 743013, P.1–8.
7. Vallone, Giuseppe. On the properties of Circular-Beams: normalization, Laguerre-Gauss expansion and free-space divergence апрель / Giuseppe Vallone // Optics Letters. – 2015. – Vol.40, № 8. – P.1717–1720.
8. Гиргель, С.С. Бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1(30). – С. 13–16.
9. Гиргель, С.С. Обобщенные асимметричные волновые пучки Бесселя-Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2(31). – С. 10–14.

10. Гиргель, С. С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С. С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2015. – № 3(24). – С. 7–9.
11. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике. Т.2 / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.
12. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
13. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
14. Миллер, У. Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – М.: Мир, 1981. – 342 с.
15. Tao, S.H. Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, and Xiacong Yuan // Applied Optics. – 2004. – V. 43, №1. – P. 122–126.
16. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: I. Planar Analysis / Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 11. – P. 1521–1523.
17. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, № 10. – P. 6300–6313.
18. Gutierrez-Vega, J.C. Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / Julio C. Gutierrez-Vega and C. Lopez-Mariscal // J. Opt. A. Pure Appl. Opt. – 2008. – 10015009 (8pp).

**С.С. Гиргель**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ ВЕБЕРА – ГАУССА С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОМПЛЕКСНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

### **Введение**

В настоящее время по-прежнему актуальны поиск и исследование новых типов световых пучков [1-6]. Вместе с тем решения волнового уравнения в параболической системе координат, описывающие волновые поля Вебера [2] и пучки Вебера – Гаусса ( $W-G$ ) (иначе: параболические гауссовы пучки) [2-5], изучены недостаточно. Поэтому в настоящей работе получены аналитические выражения в замкнутой

форме, описывающие пучки  $W-G$ . Установлены физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков. Проведено графическое моделирование пучков  $W-G$  и показано, что комплексные значения свободного параметра  $a$  являются физически приемлемыми.

## 1. Нормированные пучки Вебера – Гаусса

Для монохроматических волн вида  $f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}) \exp(ik_z z - i\omega t)$  скалярное параболическое уравнение для огибающей  $f(\mathbf{r})$ , описывающее параксиальные световые пучки, имеет вид  $(\Delta_{\perp} + 2ik_z \partial_z) f(\mathbf{r}) = 0$ . Перейдем к параболической цилиндрической системе координат, производя подстановку  $[x = (\eta^2 - \xi^2)/2; y = \xi\eta]$  [7, 2]. Решая затем параболическое уравнение, получим выражения для параксиальных пучков Вебера.

Поперечные картины распределения интенсивности в полученных параксиальных пучках Вебера представляют наложение системы софокусных парабол. Поэтому такие пучки называются параболическими. Эти поля, как и поля Бесселя, являются бездифракционными [1, 2, 6], так как их амплитуды в поперечной плоскости не зависят от продольной координаты  $z$ . Как и поля Бесселя, параболические поля обладают свойством самовосстановления после взаимодействия с препятствием.

Параболические пучки или, что то же самое, пучки Вебера переносят бесконечную энергию и поэтому физически не реализуемы во всём пространстве. Пучки Вебера – Гаусса ( $W-G$ ), энергия которых конечна, проще всего получить из параксиальных пучков Вебера, применяя преобразование Аппеля [7] в форме [6]  $f(x, y, q) \rightarrow G f(x/(\beta q), y/(\beta q), -1/(\beta^2 q))$ , где  $G$  – гауссиан,  $\beta = i/z_0$ .

Чтобы уменьшить число свободных параметров и записать выражения в более общем виде, перейдем к безразмерным величинам, используя характерные продольный и поперечный линейные размеры пучка: рэлеевскую длину  $z_0 = kw_0^2/2$  и размер перетяжки  $w_0$ . Далее введём безразмерные переменные и параметры:  $X = x/w_0$ ;  $Y = y/w_0$ ;  $Z = z/z_0$ ;  $Q = Z - iQ_0$ ;  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .

Явные выражения в безразмерной замкнутой форме для четных и нечетных пучков  $W-G$  соответственно имеют вид:

$$f_e = \frac{1}{Q} M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{K_{\perp}(R+X)}{Q}\right) \cdot M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{K_{\perp}(R-X)}{Q}\right) \exp\left[\frac{i}{Q}\left(R + \frac{iK_{\perp}}{2}\right)^2\right], \quad (1)$$

$$f_o = \frac{Y}{Q^2} M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{K_{\perp}(R+X)}{Q}\right) \cdot M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{K_{\perp}(R-X)}{Q}\right) \exp\left[\frac{i}{Q}\left(R + \frac{iK_{\perp}}{2}\right)^2\right] \quad (2)$$

Здесь  $K_{\perp}$  и  $a$  – соответственно безразмерные поперечная составляющая волнового вектора и постоянная разделения переменных. М.А. Бэндрес и др. [2] предложили использовать вещественные решения уравнения Гельмгольца в параболических координатах; такие решения представимы в виде рядов с вещественными членами. Однако явные замкнутые аналитические выражения для функций Бэндреса  $P_e$  и  $P_o$  и для пучков  $W-G$  в литературе, насколько нам известно [3-5], не приводятся. Уравнения пучков  $W-G$  в безразмерной форме являются функциями трех пространственных переменных  $(X, Y, Z)$  и только трех свободных параметров  $(K_{\perp}, a, Q_0)$ . Такие пучки должны быть физически реализуемыми, т.е. переносить конечную мощность. Используя подход [6] для нахождения ограничений на параметры пучков Бесселя – Гаусса, нетрудно показать, что условием конечности переносимой мощности для пучков  $W-G$  является неравенство  $Q_0 > 0$ . При этом на параметры  $K_{\perp}$  и  $a$  не накладываются никакие ограничения – эти параметры могут быть произвольными непрерывными комплексными константами.

## 2. Графическое моделирование распределения интенсивности в поперечном сечении пучков Вебера-Гаусса

Пучки  $W-G$  принадлежат семейству пучков Гельмгольца – Гаусса ( $Hl-G$ ), введенных Бэндресом и др. [3]. При значении параметра  $\gamma = k_{\perp} w_0 / 2 > 1$ , в соответствии с [1], пучок  $Hl-G$  остаётся бездифракционным до расстояния  $z_{\max} = k w_0 / k_{\perp}$ , а затем расходится; при этом формируется кольцеобразная картина распределения интенсивности. Произведем численные оценки различных величин, характерных для пучков  $W-G$ . Как и в работе [3], полагаем, что длина волны  $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-6}$  м, размер перетяжки гауссиана  $w_0 \approx 2 \cdot 10^{-3}$  м. Тогда волновое число  $k \approx 10^7$  м и при параметре  $k_{\perp} = 10^4$  м<sup>-1</sup> имеем  $z_{\max} \approx 2$  м. При использовании введенных нами безразмерных обозначений находим:  $K_{\perp} \approx 20$ ,  $\gamma = K_{\perp} / 2 \approx 10$ . Безразмерное расстояние  $Z_{\max} = z_{\max} / z_0 = 2 / K_{\perp}$ ,

до которого пучок  $W-G$  всё еще сохраняет свое квазибездифракционное поведение, равно  $Z_{\max} \approx 0,1$ . При графическом моделировании подтверждена правильность этих оценок.

Картины распределения интенсивности могут быть самыми разнообразными – в зависимости от задаваемых параметров  $a$ ,  $K_{\perp}$  и расстояния  $Z$ . Они инвариантны относительно преобразований ( $a \rightarrow -a$ ) и ( $x \rightarrow -x$ ) и симметричны относительно оси  $OX$ . На рисунке 1 изображены распределения интенсивности в поперечных сечениях пучков  $W-G$  при  $a=0$  и различных расстояниях  $Z$  в области бездифракционного распространения. Геометрические места точек, соответствующих определенным значениям интенсивности, представляют семейство софокусных парабол, которое при возрастании  $Z$  остается практически неизменным. На параболы накладывается гауссиан, поперечное сечение которого увеличивается с увеличением  $Z$ .

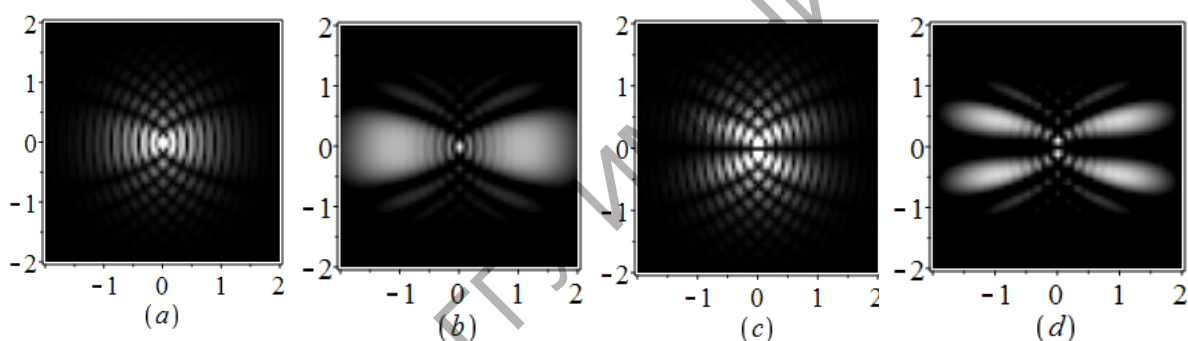


Рисунок 1 – Распределение интенсивности  $I_e$  четных и  $I_o$  нечетных пучков  $W-G$  (a):  $I_e, a=0, Z=0$ ; (b):  $I_e, a=0, Z=0,06$ ; (c):  $I_o, a=0, Z=0$ . (d):  $I_o, a=0, Z=0,12$

До настоящего времени параметры  $a$  предполагались только вещественными [3-5]. Однако они могут быть и комплексными. Пучки  $W-G$  при комплексных  $a$  до настоящего времени не изучались. Тем не менее, они обладают свойствами, представляющими практический интерес. Например, при  $a = i/2$  четный пучок  $W-G$  редуцируется к децентрированному (смещенному) гауссову пучку. Анализируя иллюстрации, представленные на рисунке 2, где изображены картины распределения интенсивности  $I_o$  четных и  $I_e$  нечетных пучков  $W-G$  при чисто мнимых значениях параметра  $a$ , убеждаемся в правильности этого утверждения.



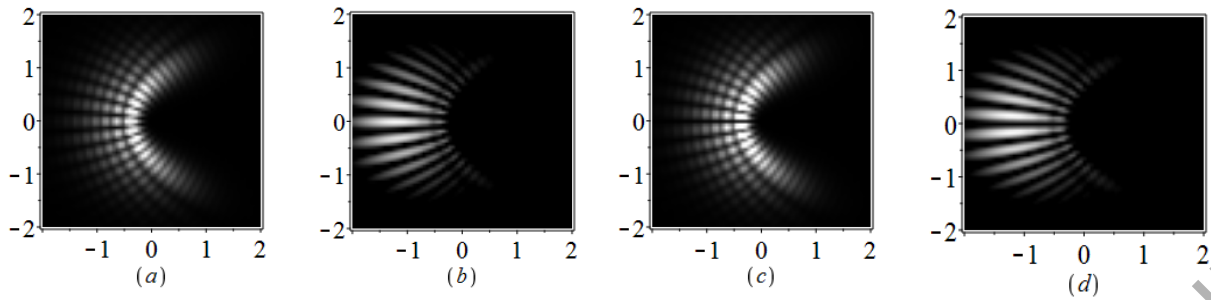


Рисунок 2 – Распределение интенсивности  $I_e$  четных и  $I_o$  нечетных пучков  $W-G$  при чисто мнимых значениях параметра  $a$   
 (a):  $I_e, a = i/2, Z = 0$ ; (b):  $I_e, a = i/2, Z = 0,06$ ; (c):  $I_o, a = i/2, Z = 0$ ;  
 (d):  $I_o, a = i/2, Z = 0,06$

На рисунке 2 видно, что с увеличением расстояния  $Z$  в области бездифракционности для пучков обоих типов форма парабол остается практически неизменной, а гауссово пятно смещается влево вдоль оси  $OX$ .

На рисунке 3 иллюстрированы распределения интенсивности  $I_o$  четных и  $I_e$  нечетных пучков  $W-G$  при комплексном параметре  $a$ .

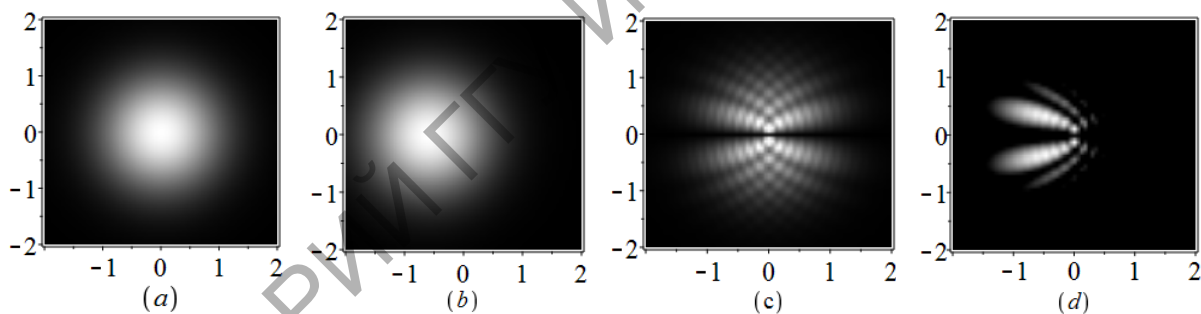


Рисунок 3 – Картины интенсивности  $I_e$  четных и  $I_o$  нечетных пучков  $W-G$  при комплексных значениях параметра  $a$ . (a):  $I_e, a = i/2 + 6, Z = 0$ ;  
 (b):  $I_e, a = i/2 + 6, Z = 0,12$ ; (c):  $I_o, a = i/2, Z = 0$ ; (d):  $I_o, a = i/2, Z = 0,12$

Видно, что с увеличением расстояния  $Z$  в области бездифракционности пучков форма парабол остается практически неизменной, а гауссово пятно смещается влево вдоль оси  $OX$ , как и в случае пучков, характеризующихся чисто мнимым значением параметра  $a$ .

### Заключение

В статье получены явные выражения пучков  $W-G$  в безразмерной замкнутой форме. Показано, что свойства пучков  $W-G$  зависят от трех

пространственных переменных  $(X, Y, Z)$  и только от трех свободных параметров  $(K_{\perp}, a, Q_0)$ . Установлено условие конечности переносимой мощности этих пучков:  $Q_0 > 0$ . При этом на параметры  $K_{\perp}$  и  $a$  не накладывается никаких ограничений; эти параметры могут быть произвольными непрерывными комплексными константами, что подтверждено в результате анализа распределения интенсивности, построенного при графическом моделировании его для пучков  $W-G$  с различными значениями свободного параметра  $a$  (включая комплексные).

Варьируя комплексные свободные параметры  $a$  и  $K_{\perp}$  таких пучков, можно создавать и исследовать пучки с заданными свойствами, целесообразными для конкретных практических приложений.

### Литература

1. Gori, F. Bessel-Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Opt. Commun. – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.
2. Bandres, M.A. Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cedra // Optics Letters. – 2004. – Vol. 29, Issue 1. – P. 44–46.
3. Gutierrez-Vega, Julio C. Helmholtz-Gauss waves / C. Julio Gutierrez-Vega and Miguel A. Bandres. // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol. 25, № 2. – P. 289–298.
4. Rodriguez-Lara, B. M. Dynamical constants of structured photons with parabolic-cylindrical symmetry / B. M. Rodriguez-Lara and R. Jauregui // Phys. Rev. A. – 2009. – Vol. 79, №5. – P.055806(4).
5. Rodriguez-Lara, B. M. Normalization of optical Weber waves and Weber-Gauss beams / B. M. Rodriguez-Lara // JOSA A. – 2010. – Vol. 27, № 2. – P. 327–332.
6. Гиргель, С.С. Обобщенные пучки Бесселя-Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 11–15.
7. Миллер, У. Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – М.: Мир, 1981. – 342 с.
8. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

Г.В. Кулак<sup>1</sup>, Г.В. Крох<sup>1</sup>, Г.С. Митюрин<sup>2</sup>, П.И. Ропот<sup>3</sup>

<sup>1</sup>УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П.Шамякина», Мозырь, Беларусь,

<sup>2</sup>УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь,

<sup>3</sup>ГНУ «Институт физики имени Б.И.Степанова» НАН Беларуси, Минск, Беларусь

## АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЧНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПОЛИХРОМАТИЧЕСКИХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В КРИСТАЛЛАХ

### Введение

Многие лазерные источники, например, CO<sub>2</sub>-лазеры [1], инжекционные лазеры [2] при определенных условиях генерируют частично поляризованное излучение (ЧПИ), степень поляризации которого существенно зависит от анизотропии резонатора, его поляризационной селективности, свойств и состояния активной среды. В одноосных кристаллах реализуется широкоапертурная геометрия взаимодействия света и ультразвука [3], применяемая для создания неколлинеарных акустооптических (АО) фильтров. В этих целях в акустооптике при работе в дальнем инфракрасном диапазоне спектра применяют кубический кристалл германия (Ge) [4]. В работе [5] особенности АО дифракции квазимонохроматического ЧПИ исследованы на основе формализма матрицы Мюллера.

### Теоретические результаты и обсуждение

В настоящей работе рассмотрены особенности брэгговской АО дифракции частично поляризованных полихроматических световых пучков на ультразвуковых (УЗ) волнах в кристаллах парателлурита и германия на основе иного формализма: с использованием матрицы когерентности. При численных расчетах предполагалось, что распределение интенсивности падающего полихроматического излучения имеет гауссову форму  $I(\lambda) = \exp\left[-4 \ln 2 (\lambda - \lambda_0)^2 / \Delta\lambda_0^2\right]$ , где  $\Delta\lambda_0$  – полная ширина распределения интенсивности по уровню 0,5 от её максимального значения;  $\lambda_0$  – центральная длина волны в распределении  $I(\lambda)$ . Такое распределение интенсивности излучения может быть характерно, например, для полупроводникового светодиода.

Геометрическая схема АО взаимодействия представлена на рисунке 1 для кристаллов  $TeO_2$  (фрагмент а) и  $Ge$  (фрагмент б).

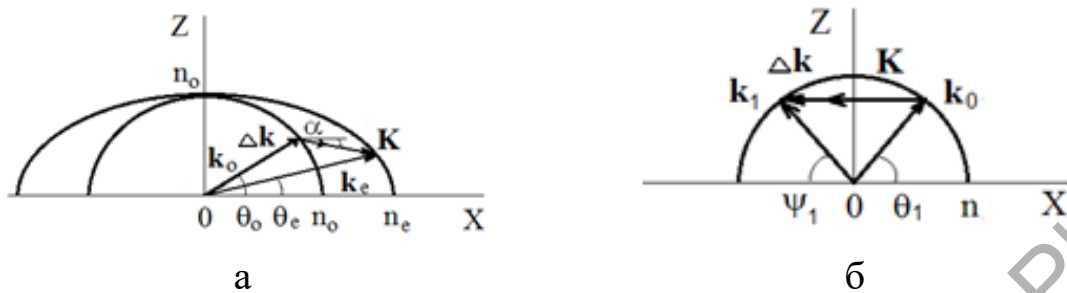


Рисунок 1 – Геометрия широкополосной брэгговской АО дифракции в одноосных кристаллах  $TeO_2$  (а) и кубических кристаллах  $Ge$  (б)

Поляризационные и энергетические характеристики дифрагированного пучка определяются элементами  $2 \times 2$ -матрицы когерентности

$$J = \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} (L_1 J_0 L_1^+) d\lambda, \quad (1)$$

где  $J_0$  – матрица когерентности падающего частично эллиптически поляризованного полихроматического излучения;  $L_1$  – матрица Джонса акустооптической ячейки для дифрагированного пучка и  $L_1^+$  – эрмитово-сопряженная с ней матрица. Матрица  $J_0$  имеет вид

$$J_0 = \frac{1}{2} I(\lambda) \begin{pmatrix} 1 + P_0 \cos(2\psi_0) \cos 2\varepsilon_0 & \cos(2\varepsilon_0) \sin(2\psi_0) + i \sin 2\varepsilon_0 \\ \cos(2\varepsilon_0) \sin(2\psi_0) - i \sin(2\varepsilon_0) & 1 - P_0 \cos(2\psi_0) \cos 2\varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $P_0$  – степень поляризации;  $\psi_0$  – угол между направлением преимущественной поляризации падающего света и плоскостью рассеяния  $XZ$ ;  $\varepsilon_0 = \arctg \tau_0$  – угол эллиптичности;  $\tau_0$  – параметр эллиптичности (отношение величин малой и большой осей эллипса поляризации эллиптически поляризованной составляющей падающего света).

Элементы матрицы  $L_{ij}$  находим с учетом особенностей дифракции света, длина волны которого  $\lambda$  отлична от брэгговской длины волны  $\lambda_0$ . Эти элементы определяются на основе выражений

$$L_{ij} = \chi_{ij} \frac{\sin l_d \sqrt{\chi_{ij}^2 + \delta(\lambda - \lambda_0)^2}}{\sqrt{\chi_{ij}^2 + \delta(\lambda - \lambda_0)^2}}, \quad (i, j = 1, 2). \quad (3)$$

где  $l_d$  – длина АО взаимодействия с учетом сноса групповой скорости УЗ волны относительно фазовой [3]; постоянные связи ( $\chi_{ij}$ ) находятся из соотношений

$$\chi_{ij} = \left( \frac{\pi n_{эф}^3 \Delta b_{ij} g_m}{\lambda_0 \sin \theta_1 \sin \psi_1} \right) \sqrt{\frac{2P_a}{l_1 l_2 \rho v^3}},$$

где  $l_1 \times l_2$  – поперечный размер УЗ пучка,  $n_{эф}(\rho)$  – эффективный показатель преломления (плотность) кристалла,  $P_a$  – мощность УЗ волны,  $v$  – фазовая скорость УЗ волны,  $\Delta b_{ij}$  – компоненты тензора фотоупругих постоянных;  $g_m$  – параметр, учитывающий степень пространственного пересечения дифрагированных световых пучков (интеграл перекрытия,  $g_m \leq 1$ );  $\theta_1 = \theta_o + \alpha$ ,  $\psi_1 = \theta_e + \alpha$  – углы, дополнительные к углу дифракции.

1) АО дифракции в кристалле  $TeO_2$  соответствует коэффициент  $\delta$ , определяемый по формуле

$$\delta = \left( -\frac{2\pi n_o}{\lambda_0^2} \right) \left\{ \sqrt{[(\xi(\theta_o) - \eta)^2 + 2\eta\xi(\theta_o)(1 - \cos(\theta_o + \alpha))] - 1} \right\},$$

где

$$\xi(\theta_1) = \frac{n_e}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 \theta_o + n_e^2 \sin^2 \theta_o}}, \eta = \frac{\lambda_0 f}{n_o v}.$$

$\Delta b_{11} = \Delta b_{22} = 0$ ,  $\Delta b_{12} = \Delta b_{21} = (p_{12} - p_{11}) - p_{44} \sin(2\alpha)/8$  – эффективная фотоупругая постоянная ( $p_{11}, p_{12}, p_{44}$  – фотоупругие постоянные [4]);  $\alpha$  – угол ориентации волнового вектора ультразвука по отношению к оси X в полярной плоскости;  $n_o$  ( $n_e$ ) – показатели преломления кристалла для обыкновенной (необыкновенной) световых волн;  $f$  – частота УЗ волны.

2) АО дифракции в кристалле  $Ge$  соответствует следующее выражение для коэффициента  $\delta$ :

$$\delta = \left( \frac{\pi f^2}{n v^2} \right),$$

где  $n_{эф} = n$  – показатель преломления кристалла;  $\Delta b_{11} = p_{11}, \Delta b_{22} = p_{12}, \Delta b_{12} = \Delta b_{21} = 0$ .

Подставляя формулы (2) и (3) в (1), получим следующие выражения для элементов матрицы когерентности дифрагированного пучка:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} (L_{11}^2 + L_{12}^2) I(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2} P_0 \cos(2\varepsilon_0) \times \\
&\times \left[ \cos(2\psi_0) \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} (L_{12}^2 - L_{11}^2) I(\lambda) d\lambda - \sin(2\psi_0) \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} (L_{12} L_{11}) I(\lambda) d\lambda \right], \\
J_{22} &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} (L_{22}^2 + L_{12}^2) I(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} P_0 \cos(2\varepsilon_0) \times \\
&\times \left[ \cos(2\psi_0) \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} (L_{12}^2 - L_{22}^2) I(\lambda) d\lambda - \sin(2\psi_0) \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} (L_{12} L_{22}) I(\lambda) d\lambda \right], \\
J_{12} &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} L_{12} (L_{11} + L_{22}) I(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} P_0 \cos(2\varepsilon_0) \cos(2\psi_0) \times \\
&\frac{1}{2} \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} L_{12} (L_{11} - L_{22}) I(\lambda) d\lambda + i \frac{1}{2} P_0 \sin(2\varepsilon_0) \times \\
&\times \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} (L_{12}^2 - L_{11} L_{12}) I(\lambda) d\lambda, J_{21} = J_{12}^*.
\end{aligned} \tag{4}$$

Эффективность дифракции  $\eta$  и степень поляризации  $P$  дифрагированного излучения связаны с элементами матрицы (4) соотношениями:

$$\eta = \frac{1}{k} (J_{11} + J_{22}), \quad P = \left[ 1 - \frac{4(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21})}{(J_{11} + J_{22})^2} \right]^{1/2}, \tag{5}$$

где  $k = \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} I(\lambda) d\lambda / 2$ .

С использованием полученных соотношений (1) – (5) производились численные расчеты дифракционной эффективности брэгговской дифракции излучения в диапазоне 0,4÷1,1 мкм с центральной длиной волны  $\lambda_0 = 0,75$  мкм на медленной сдвиговой УЗ волне, частота которой  $f = 257$  МГц, в кристалле  $TeO_2$ ; а также излучения с центральной длиной волны  $\lambda_0 = 10,6$  мкм и частотой  $f = 200$  МГц – в кристалле  $Ge$ .

На рисунке 2 представлена зависимость дифракционной эффективности  $\eta$  от мощности  $P_a$  ультразвука при различных значениях ширины спектра  $\Delta\lambda$  падающего линейно поляризованного излучения.

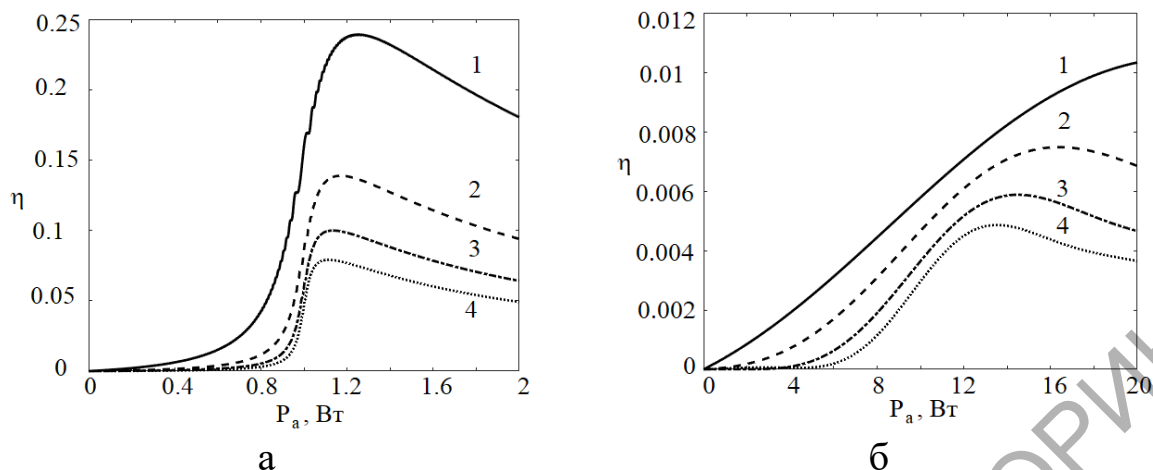


Рисунок 2 – Зависимость дифракционной эффективности  $\eta$  падающего линейно поляризованного полихроматического гауссова светового пучка от мощности УЗ волны  $P_a$  для падающего пучка с различной шириной спектра:

- а)  $\Delta\lambda = 0,02$  (1);  $0,04$  (2);  $0,06$  (3) и  $0,08$  мкм (4) ( $\Delta\lambda_0 = 0,4$  мкм,  $l_1 = 1$  см,  $l_2 = 0,5$  см,  $P_0 = 1$ ,  $\psi_0 = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = 0,75$  мкм,  $v = 719$  м/с,  $g_m = 1$ ,  $\alpha = 10^0$ ,  $TeO_2$ ); б)  $\Delta\lambda = 0,2$  (1),  $0,4$  (2),  $0,6$  (3) и  $0,8$  мкм (4) ( $\Delta\lambda_0 = 3,6$  мкм,  $l_1 = 1$  см,  $l_2 = 0,5$  см,  $P_0 = 1$ ,  $\psi_0 = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = 10,6$  мкм,  $v = 4990$  м/с,  $g_m = 1$ ,  $Ge$ )

Анализируя информацию, отображенную на рисунке 2, заметим, что с увеличением ширины спектра падающего излучения  $\Delta\lambda$  эффективность дифракции уменьшается. Данный эффект объясняется уменьшением интенсивности дифрагированного света при отстройке длины волны падающего света  $\lambda$  от центральной  $\lambda_0$ . Эффективность АО дифракции на продольной УЗ волне в кристалле германия значительно ниже, чем в кристалле парателлуриата. Это обусловлено тем, что фазовая скорость медленной сдвиговой УЗ волны в кристалле парателлуриата значительно меньше фазовой скорости продольной УЗ волны в кристалле германия. Как следует из выражений (5), даже если падающий свет полностью линейно поляризован ( $P_0 = 1$ ), дифрагированный свет поляризован частично ( $P < 1$ ).

### Заключение

Таким образом, при акустооптической дифракции полихроматических световых пучков эффективность дифракции в одноосных и кубических кристаллах при увеличении ширины спектра падающего излучения уменьшается. При этом даже при полной поляризации падающего светового пучка дифрагированный пучок частично поляризован. Эти особенности акустооптической дифракции необходимо

учитывать при конструировании неколлинеарных перестраиваемых акустооптических фильтров.

### Литература

1. Поляризация  $\text{CO}_2$  лазера с анизотропным резонатором / В. П. Кабашников [и др.] // ЖПС. – 1978. – Т. 29, № 3. – С. 436–441.

2. Кандратьев, В.А. Влияние поляризации инжекционных лазеров на эффективность акустооптического взаимодействия в анизотропных кристаллах / В. А. Кандратьев, В. Н. Морозов, Ю. Н. Попов, Г. Н. Семенов // Квант. электрон. 1983. – Т. 10, № 3. – С. 638–639.

3. Спектральное пропускание широкоапертурного брэгговского акустооптического фильтра на парателлурите / В.Б. Волошинов [и др.] // ЖПС. – 1990. – Т.52, В. 2. – С. 284–289.

4. Акустические кристаллы: Справочник / А.А. Блистанов, В.С. Бондаренко, В.В. Чирков [и др.]; под ред. М.П. Шаскольской. – М.: Наука, 1986. – 629 с.

5. Белый, В.Н. Дифракция частично поляризованного света на ультразвуке в поглощающих гиротропных кристаллах / В.Н. Белый, Г.С. Митюрин, В.В. Шепелевич, препринт Института физики АН БССР № 347. Минск. – 1984. – 32 с.

**Г.С. Митюрин<sup>1</sup>, В.П. Велещук<sup>2</sup>, С.С. Гиргель<sup>1</sup>, Е.В. Лебедева<sup>3</sup>,  
А.И. Власенко<sup>2</sup>, С.Н. Левицкий<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет  
имени Ф. Скорины», Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Институт физики полупроводников имени В.Е. Лашкарева  
НАН Украины, Киев, Украина

<sup>3</sup>УО «Белорусский торгово-экономический университет  
потребительской кооперации», Гомель, Беларусь

### **ФОТОТЕРМОАКУСТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КУММЕР-ГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СЕНСОРНЫХ СТРУКТУРАХ НА ОСНОВЕ CdTe**

Лазерное фототермоакустическое (ФТА) формирование сенсорных структур на основе CdTe с высоким энергетическим разрешением гамма-излучения является одной из актуальных задач систем радиа-



ционного контроля [1]. В этой связи возникает интерес к поиску новых решений для оптических полей, посредством которых можно реализовать управляемое лазерное облучение полупроводниковых сенсорных структур.

### 1. Теоретическая модель

Достаточно эффективными, наряду с бесселевыми световыми пучками, представляются узконаправленные циркулярные лазерные пучки Куммера – Гаусса [2, 3], амплитуда которых с точностью до постоянной может быть представлена в виде [4]

$$E = G \left( \frac{P}{Q_B} \right)^{\nu} \left( \frac{R}{Q_B} \right)^m {}_1F_1(-\nu, m+1, R_2^2) \cdot e^{im\varphi}, \quad (1)$$

где  $G(R, Z) = \frac{1}{Q_B} \exp\left(i \frac{R^2}{Q_B}\right)$  – гауссиан,  ${}_1F_1(-\nu, m+1, R_2^2)$  – вырожденная гипергеометрическая функция, часто называемая функцией Куммера,  $Q_B = Z - Q_0$  – безразмерный комплексный параметр светового пучка;  $Q_0 = iQ_0''$  – комплексная величина;  $P = Z - P_0$ ;  $X = x/x_0, Y = y/y_0, Z = z/z_0$ ;  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  – безразмерный радиус;  $R_2^2 = iR^2 \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{Q} \right)$ ;  $z_0 = k'x_0^2/2$ ,  $x_0$  – характерный линейный поперечный размер пучка. Множитель  $\exp(kz - \omega t)$  в выражении (1) опущен.

Таким образом, выражение (1) характеризует гауссовоподобные 3D световые пучки, обладающие цилиндрической (или циркулярной) симметрией. Характеристики этих пучков при их описании в цилиндрической системе координат являются функциями переменных  $R, z, \varphi$  и четырёх свободных параметров:  $m, \nu, P_0, Q_0$ .

Исходя из соотношения (1) для циркулярных пучков Куммера-Гаусса несложно найти скорость диссипации энергии

$Q = \operatorname{div} \langle \vec{S} \rangle = \frac{\omega}{8\pi} |E|^2$  в выбранной системе координат:

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} \frac{e^{-2k''z}}{Z^2 + Q_0^2} \cdot \exp \left[ -2R^2 \frac{Q_0 + Z \frac{k''}{k'}}{Z^2 + Q_0^2} \right] \left| \left( \frac{P}{Q} \right)^{\nu} \right|^2 \times \left| {}_1F_1 \left( -\nu, 1, i \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{Q_B} \right) R^2 \left( 1 + i \frac{k''}{k'} \right) \right) \right|^2, \quad (2)$$

где  $k'$  и  $k''$  – действительная и мнимая части волнового числа,  $k = k_0 \cdot n$ ,  $k_0 = \omega/c$ ,  $m=1$ ,  $n$  – показатель преломления среды, в которой распространяется пучок.

Плотность мощности тепловых источников (2) учтём в правой части уравнения теплопроводности [5]

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\beta_S} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{k_S} Q \cdot f(\Omega),$$

где  $f(\Omega)$  – импульсная функция модуляции. В результате решения этого уравнения можно определить распределение температурного поля в исследуемой полупроводниковой структуре. Если для всех гармоник импульсного акустического сигнала длина дифракции звука  $L_D$  значительно меньше длины затухания упругой волны  $L_3$  ( $L_D \ll L_3$ ), то из уравнения Хохлова – Заболотской, описывающего эволюцию ультразвукового отклика, который возбуждается наносекундным лазерным импульсом с Куммер-Гауссовым распределением интенсивности, выражение для импульса давления [6] можно представить в виде

$$P(z, \tau, r_1 = 0) = P_0(\tau) - \int_{-\infty}^{\tau} \omega_D Q \exp(-\omega_D(\tau - t)P_0(t)) dt, \quad (4)$$

где  $\omega_D = \frac{2v_n z}{a_0^2}$ ,  $a_0$  – радиус лазерного пучка,  $v_n$  – скорость продольной акустической моды. Характерная частота  $\omega_D$  растет с увеличением координаты  $z$  и с уменьшением площади поперечного сечения светового пучка.

Если поглощение света однородное ( $k'' = \text{const}$ ), а лазерный импульс короткий ( $k'' v_n \tau_n \ll 1$ ), интеграл (4) несложно выразить в элементарных функциях [6]:

$$P(\tau) = \frac{k'' \beta E_0 c_0^2 Q_A}{2C_p} \begin{cases} \frac{\exp(\omega_a \tau)}{1 + D}, \tau < 0 \\ \frac{\exp(-\omega_a \tau)}{D - 1} - \frac{2D \exp(-\omega_D \tau)}{D^2 - 1}, \tau > 0 \end{cases}, \quad (5)$$

где  $D = \frac{\omega_D}{k''} = \frac{2z}{k'' a_0^2}$  – безразмерное расстояние, выраженное в длинах

дифракции  $L_0 = k'' a_0^2 / 2$  на частоте  $\omega_a = k'' v_n$ ;  $\tau = t - z/v_n$  – время в сопро­вождающей системе координат,  $Q_A$  – амплитудный множитель скорости диссипации энергии без бугеровской  $z$ -компоненты,  $\omega_a = k'' v_n$  характерная частота спектра фотоакустического сигнала При  $\tau > 0$

амплитуда сигнала определяется коэффициентом поглощения света  $k''$  и характерной частотой, соответствующей длине дифракции  $\omega_D$ . При  $D \ll 1$  профиль фотоакустического отклика определяется поглощением света, а дифракционная составляющая является существенной только при значениях  $k''\tau \geq (3 \div 5)$ . В том случае, когда  $D \geq 3$ , наоборот, при малых  $\tau$  ( $k''\tau < (1 \div 2)$ ) сигнал изменяется экспоненциально с показателем степени равным  $\omega_D$ , а при  $k''\tau \geq 1$  – с показателем степени равным  $k''$ .

Следовательно, первоначально симметричный импульс сжатия по мере распространения приобретает вид следующих друг за другом импульсов сжатия и разрежения.

Зависимость пространственного распределения интенсивности световых пучков Куммера – Гаусса от координаты  $X$  при  $m = 0$  графически иллюстрирована на рисунках 1–2, в результате анализа которых ясно, что варьируя параметры  $P$ ,  $Q$ ,  $\nu$ ,  $t$  можно добиться равномерной засветки исследуемой полупроводниковой сенсорной структуры при её облучении световым импульсом (рисунок 2а). При этом можно максимально эффективно реализовать бародиффузионный механизм введения примеси индия In в CdTe.

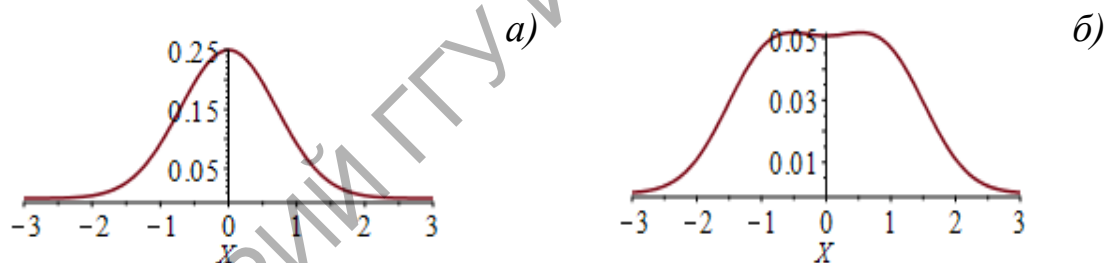


Рисунок 1 – Профили интенсивности пучков Куммера – Гаусса  
а)  $\nu = 0$ ; б)  $\nu = 1,15$

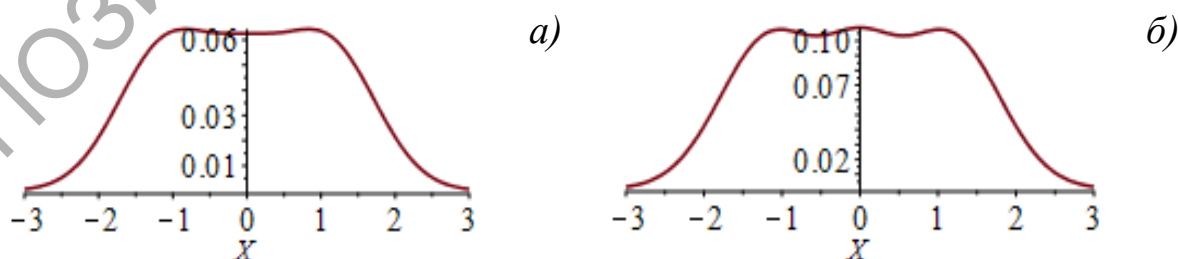


Рисунок 2 – Профили интенсивности пучков Куммера – Гаусса  
а)  $\nu = 1 + 2 \cdot i$ ; б)  $\nu = 0,6 - 3 \cdot i$

Для формирования необходимого профиля пучков Куммера – Гаусса следует использовать, как и в работе [7], бинарные дифракционные оптические элементы.

Следует также учесть, что облучение импульсами, длительность которых соответствует диапазону (7÷20) нс, может быть причиной образования дефектов в зоне лазерного легирования полупроводника, чем осложняется практическое применение описанной методики в обычных условиях, т.е. при формировании пучков Куммера – Гаусса в возбужденной среде. При облучении полупроводниковых структур, погруженных в жидкость, возникновение резких градиентов в импульсе возможно при меньших значениях его полной энергии – без значительного нагрева образца CdTe и нежелательного дефектообразования.

## 2. Эксперимент

При облучении в воде важно контролировать величину давления  $P$ , изменение которого обусловлено лазерно-стимулированными при воздействии наносекундных импульсов процессами нагрева, плавления, газо- и плазмообразования в окрестности границы раздела вода/In. По мере повышения энергии импульса  $E$  – при условии достижения температуры плавления плёнки In – может иметь место значительное скачкообразное возрастание давления  $P$ . При этом температура плавления индия при облучении In/CdTe в условиях «зажатой» поверхности может смещаться в направлении бóльших значений вследствие её зависимости от давления [6]. Кроме того, может происходить вскипание воды и генерация дополнительного импульса давления, обусловленная парообразованием. Поэтому задача определения порога плавления In является важной и достаточно сложной, и для её решения требуется применение ФТА метода.

При исследовании воздействия на полупроводниковую структуру In/CdTe гауссовоподобных импульсов наносекундной длительности использовались кристаллы  $p$ -CdTe (111) с площадью торцевой поверхности  $5 \times 5$  мм<sup>2</sup> и толщиной 0,5 мм, характеризующиеся удельным сопротивлением  $(2 \div 4) \cdot 10^9$  Ом·см. Пленка In толщиной 400 нм наносилась путём термического напыления в вакууме при давлении  $10^{-5}$  атм. Облучение образца лазерными импульсами второй гармоники YAG:Nd-лазера ( $\lambda = 532$  нм,  $\tau_{\text{imp}} = 7$  нс) производилось на воздухе и в кювете с дистиллированной водой. Диаметр облучаемой зоны был

равен 1 мм, а распределение энергии по площади – достаточно равномерным.

Акустический отклик при лазерном воздействии детектировался пьезоэлектрическим преобразователем за стороной образца, противоположной входной грани кристалла. Пьезодатчик (тип П-113 из комплекта акустического прибора АФ-15) – пьезоэлемент ЦТС-18 в форме усеченного конуса, установленного в металлическом корпусе с керамическим протектором (для акустического контакта). Резонансная частота – 400 кГц. Электрические сигналы пьезодатчика регистрировались в частотном диапазоне 200...2000 кГц. Коэффициент аппаратного усиления ( $A_{in}/A_{out}$ ) сигналов находился в пределах линейности динамического диапазона усилительного тракта и изменялся в диапазоне 50...74 дБ. Образец на подложке из плексигласа (толщина 1 см, диаметр 10 см) и пьезоэлектрический преобразователь устанавливались в медной ячейке с водой (рисунок 3).

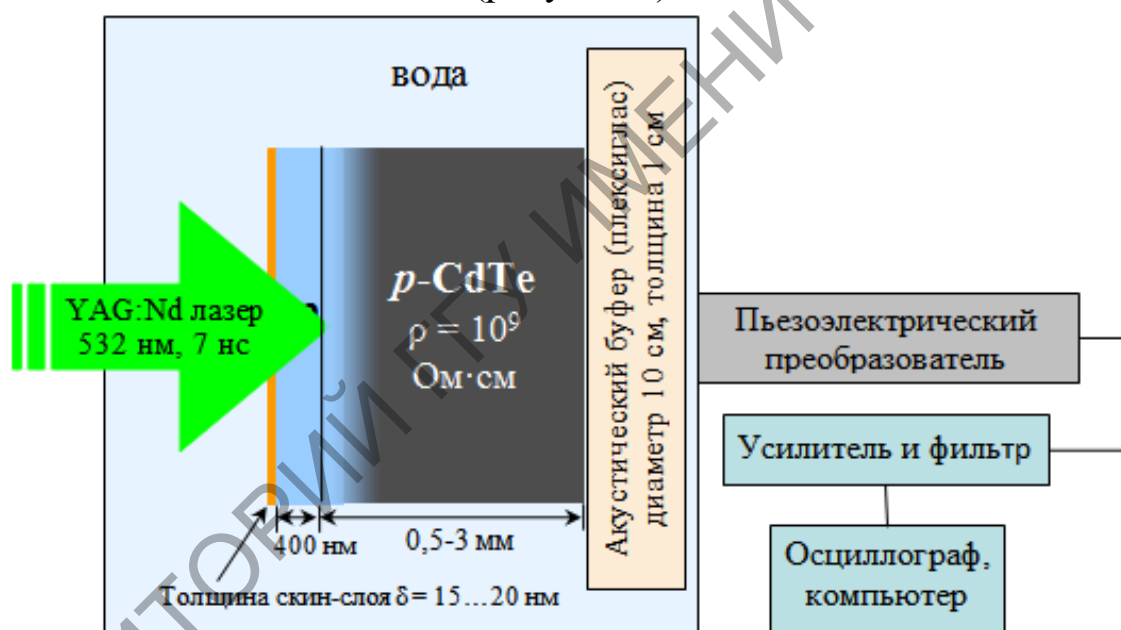


Рисунок 3 – Схема эксперимента при облучении в воде с применением фототермоакустического метода

Измеренный коэффициент поглощения входного стекла и воды по отношению к излучению с длиной волны 532 нм был равен 11 %.

### 3. Результаты

На рисунке 4 приведены типичные сигналы, зарегистрированные при облучении системы In/CdTe в воде и на воздухе неодимовым лазером при двух значениях энергии [8]. Видно, что при облучении

в воде вследствие демпфирования водой поверхности образца сигнал модулирован: так как грань зажата, импульс отдачи очень мал, поскольку очень мал коэффициент всестороннего изотермического сжатия воды  $-1/V \cdot (dV/dP) = 51,1 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$  (при  $0^\circ\text{C}$ ). На рисунке 4(в) видно, что начальный (первый положительный) импульс разгрузки отсутствует, а импульс сжатия сформирован. Четыре группы импульсов обусловлены многократным отражением от боковых (на рисунке 3 они ограничивают образец сверху и снизу) граней акустического буфера.

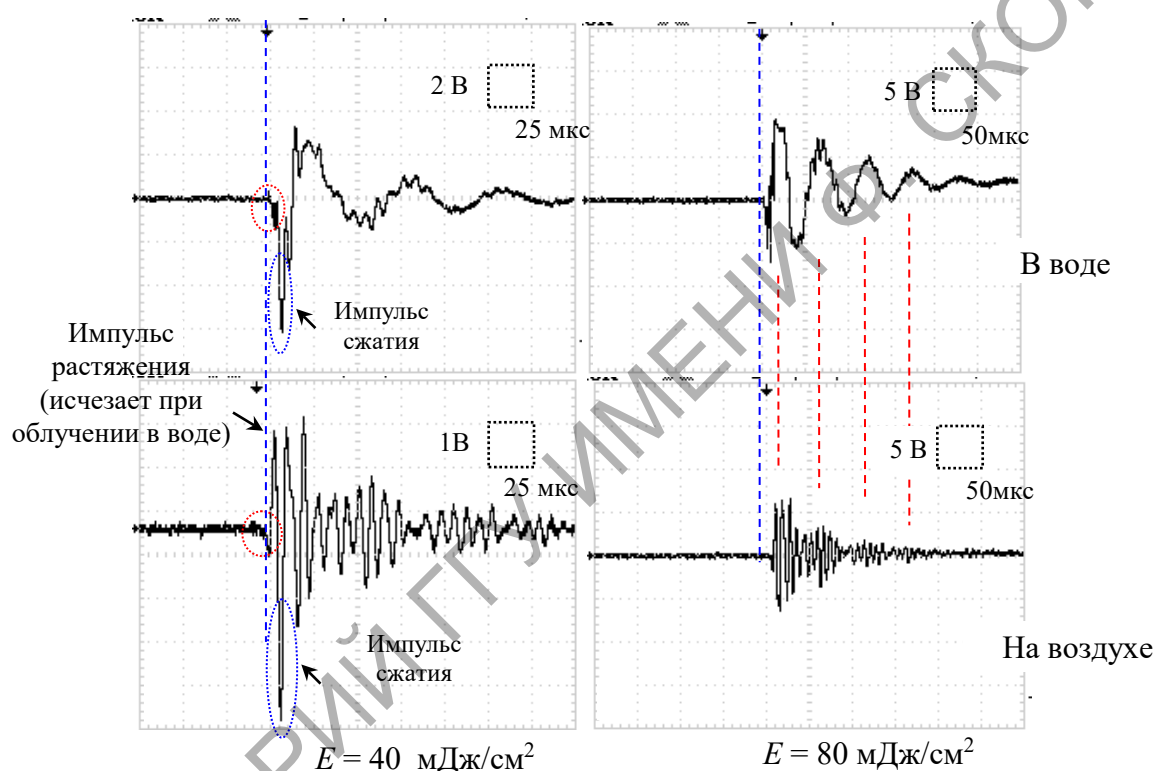


Рисунок 4 – Акустический отклик при облучении полупроводниковой структуры In / CdTe наносекундным лазером в воде (а, б) и на воздухе (в, г)

На зависимости амплитуды акустического отклика от плотности энергии лазерного импульса  $A(E)$ , иллюстрированной на рисунке 5, наблюдается линейный участок ФТА-сигнала и участок с другим наклоном. Энергия  $E$ , при которой меняется наклон кривой, соответствует порогу плавления пленки индия, так как с началом плавления происходит резкий прирост объема. При облучении в воде смена наклона начинается при  $80 \text{ мДж/см}^2$ , при облучении на воздухе – при  $115 \text{ мДж/см}^2$ . Механизмы генерации дополнительного давления нами проанализированы ранее.

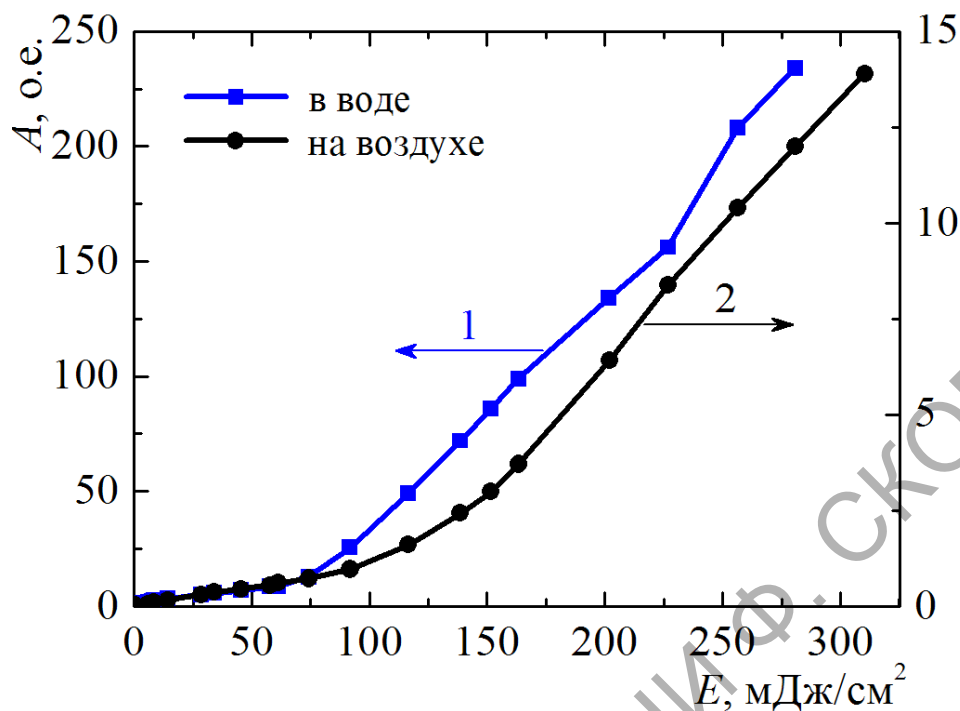


Рисунок 5 – Зависимость амплитуды акустического отклика от энергии облучения гетероструктуры In/CdTe в воде (1) и на воздухе (2)

При облучении изучаемой структуры в воде и на воздухе следует учитывать следующие физические процессы: плавление индия, которое будет протекать в указанных условиях по-разному; так называемое взрывное вскипание воды при воздействии на образец импульсного (наносекундной длительности) лазерного излучения; лазерно-индуцированное испарение атомов индия, которое интенсивно протекает на воздухе и подавлено в воде.

Таким образом, установлено, что при облучении в воде полупроводниковой структуры In/CdTe гауссовоподобными лазерными импульсами ( $\tau = 7$  нс) давление в области энерговыделения существенно выше, чем при облучении на воздухе. До достижения порога плавления индия, когда имеет место фототермоакустический эффект, значения давления при расположении образца в указанных средах различаются в 17 раз; при двукратном превышении порога плавления In давления различаются в 30 раз.

Определён порог плавления индия при облучении структуры In/CdTe в воде неодимовым лазером; он равен  $E_{inc} = 80$  мДж/см<sup>2</sup> и меньше, чем при облучении на воздухе (115 мДж/см<sup>2</sup>) вследствие подавления в воде испарения атомов индия. Показано также, что с использованием гипергеометрических световых пучков (пучков Кумме-

ра – Гаусса) можно эффективно управлять фототермоакустическим преобразованием лазерных импульсов в полупроводниковых структурах, применяемых для создания высокочувствительных детекторов ионизирующего излучения.

### Литература

1. Gnatyuk, V.A. Formation of doped nano-layers in CdTe semiconductor crystals by laser irradiation with nanosecond pulses / V.A. Gnatyuk [et. al.] // Thai Journal of Nanoscience and Nanotechnology. – 2016. – Vol. 1, № 2. – P. 7–16.

2. Гиргель, С.С. Бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики, техники. – 2017. – № 1(30). – С.13–16.

3. Гиргель, С.С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики, техники. – 2015. – № 3(24). – С.7–9.

4. Гиргель, С.С. Циркулярные 3D световые пучки Куммера-Гаусса с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики, техники. – 2018. – № 1(34). – С.1–5.

5. Mityurich, G.S. Photoacoustic transformation of Bessel light beams in magnetoactive superlattices / G.S. Mityurich, E.V. Chernenok, V.V. Sviridova, A.N. Serdyukov // Crystallography Reports. – 2015. – Vol. 60, № 2. – P. 273–279.

6. Карабутов, А.А. Лазерная оптоакустика / А.А. Карабутов, В.Э. Гусев. – М.: Наука. – 1991. – 304 с.

7. Котляр, В.В. Некоторые типы гипергеометрических лазерных пучков для оптического микроманипулирования / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, Р.В. Скидальков, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2008. – Т. 32, № 2. – С. 180–186.

8. Власенко, А.И. Акустический отклик при воздействии наносекундных лазерных импульсов на тонкопленочную гетеросистему In/CdTe / А.И. Власенко [и др.] // ФТТ. – 2015. – Т.57, № 6. – С. 1073–1078.



**Г.С. Митюрин<sup>1</sup>, В.В. Кожушко<sup>2</sup>, В.Н. Мышковец<sup>1</sup>,  
Д.Г. Митюрин<sup>3</sup>, И.А. Яшин<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь,

<sup>2</sup>ГНУ «Институт механики металлополимерных систем  
имени В.А. Белого», Гомель, Беларусь,

<sup>3</sup>РУП «Производственное объединение «Белоруснефть»  
БелНИПИнефть, Гомель, Беларусь

## **ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН ГАУССОВЫМИ И БЕССЕЛЕВЫМИ СЕТОВЫМИ ПУЧКАМИ В ОБРАЗЦАХ ГОРНЫХ ПОРОД (КЕРНАХ)**

### **Введение**

Проблемы исследования образцов минералов из глубоких геологических отложений – одно из востребованных современных направлений при решении многих задач по разведке и добыче трудноизвлекаемых запасов нефти и газа. Как утверждается в [1], анализ керна производится для оценки пористости, проницаемости, флюидонасыщенности, плотности минерального скелета (зерен), литологического состава и структуры породы. Однако существующие методы изучения емкостных и прочностных свойств геоматериалов достаточно трудоемки и связаны со значительными временными затратами, а такие как компьютерная рентгеновская томография, ЯМР-спектроскопия, трековая радиография, программа «цифровой керн» – с существенными финансовыми затратами. Поэтому развитие других, более оперативных и менее затратных методов, конкурентоспособных по сравнению с традиционными методами изучения микроструктуры горных пород, их упругих и фильтрационно-емкостных свойств, представляется перспективным.

Воздействие лазерного импульсного излучения на поглощающие среды может приводить к возбуждению акустических поверхностных, продольных и поперечных волн [2]. Эффективность фототермоакустического (ФТА) преобразования определяется, как известно [2], оптическими, диссипативными, теплофизическими, упругими, линейными и нелинейными свойствами исследуемых образцов, а также поляризационными и энергетическими параметрами лазерного излучения [3].

В последние несколько десятилетий импульсная оптико-акустическая диагностика интенсивно развивается и успешно применяется для исследования металлических композитов [4, 5], композиционных материалов [6], графито-эпоксидных композитов [7], нанокompозитных структур [8], хиральных метаматериалов и кластеров наноспиралей [9], а также геоматериалов [10].

## 1. Схема эксперимента

Цель данной работы – исследование возможности лазерного импульсного возбуждения упругих волн, определение скорости распространения продольных и сдвиговых мод в керновых материалах, облучаемых гауссовыми и бесселевыми световыми пучками, а также расчет (в рамках двухфазной модели среды) емкостных и прочностных параметров образцов горных пород (кернов) на основании результатов экспериментального измерения амплитуды ФТА сигналов.

В данной работе в целях импульсного возбуждения ультразвука использовалось излучение YAG:Nd<sup>3+</sup> лазера модели LS-2134У, генерирующего в режиме модулируемой добротности на длине волны 1064 нм и на частоте второй гармоники (532 нм) – с энергией в импульсе порядка 15÷20 мДж при длительности импульсов около 10 нс и частоте следования импульсов 10÷12 Гц. Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 1.

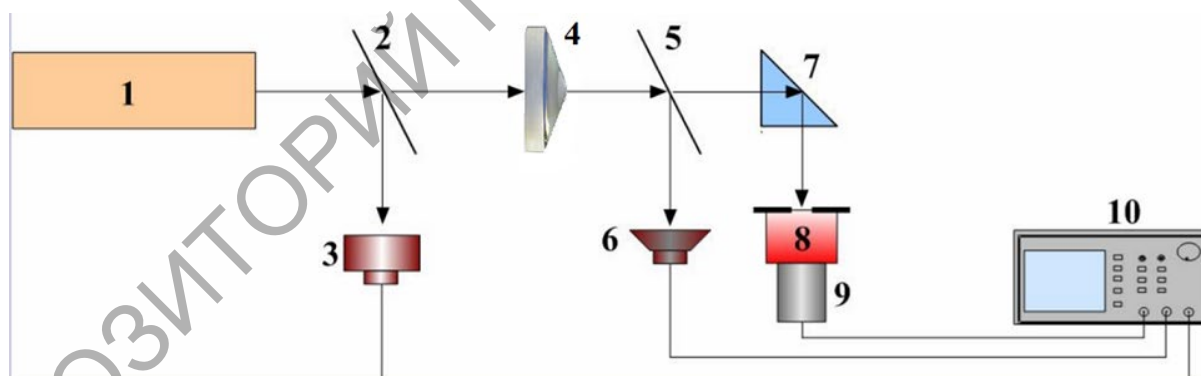


Рисунок 1 – Схема лазерной импульсной фотоакустической спектроскопии: 1 – лазер; 2 – делительная пластина; 3 – фотодиод; 4 – аксион; 5 – делительная пластина; 6 – измеритель плотности лазерной энергии; 7 – стеклянная поворотная призма; 8 – исследуемый образец керна; 9 – пьезоэлектрический преобразователь; 10 – цифровой осциллограф

Регистрация возбуждаемых акустических импульсов осуществлялась пьезопреобразователем на основе поляризованной керамики

ЦТС-5, толщиной 0,2 мм, который работал без усилителя с максимальной частотой 15 МГц. В указанных целях использовался также широкополосный пьезоприемник на основе ПВДФ-пленки толщиной 25 мкм с предварительным усилителем, работающим в режиме «холодного хода», ограничивающим рабочую полосу частот сверхчастотой 15 МГц. Сигнал с пьезопреобразователя регистрировался цифровым двухканальным осциллографом типа TektronixTDS220 с аналоговой полосой 60 МГц при частоте дискретизации 1 ГГц. Для регистрации времени воздействия лазерного импульса на поверхность кернового цилиндрического образца использовался фотодиод Hamamatsu S5971-1. Формирование бесселевых световых пучков осуществлялось с использованием конической линзы с углом конусности  $\alpha = 1^\circ$ ; линза устанавливалась между выходным окном лазерной системы и поворотным зеркалом, на поверхность которого был напылен тонкий слой золота. Керновые образцы различных горных пород (известняк, доломит, алевролит, глина, мергель, песчаник) цилиндрической формы, толщиной от 8 до 16 мм с указанием основных физико-технических параметров были предоставлены Центром исследования, обработки и хранения керна РУП «ПО «Белоруснефть».

## 2. Модель, результаты исследований и обсуждение

Результаты экспериментального измерения профилей акустических импульсов при возбуждении звука гауссовыми и бесселевыми световыми пучками представлены на рисунках 2–5.

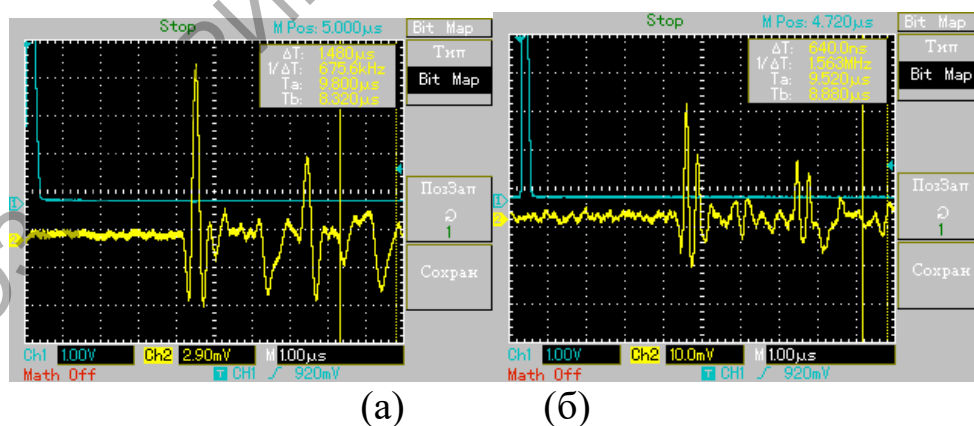
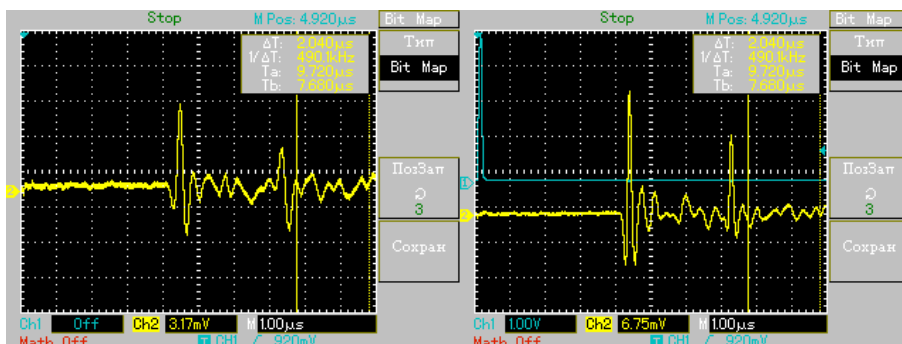


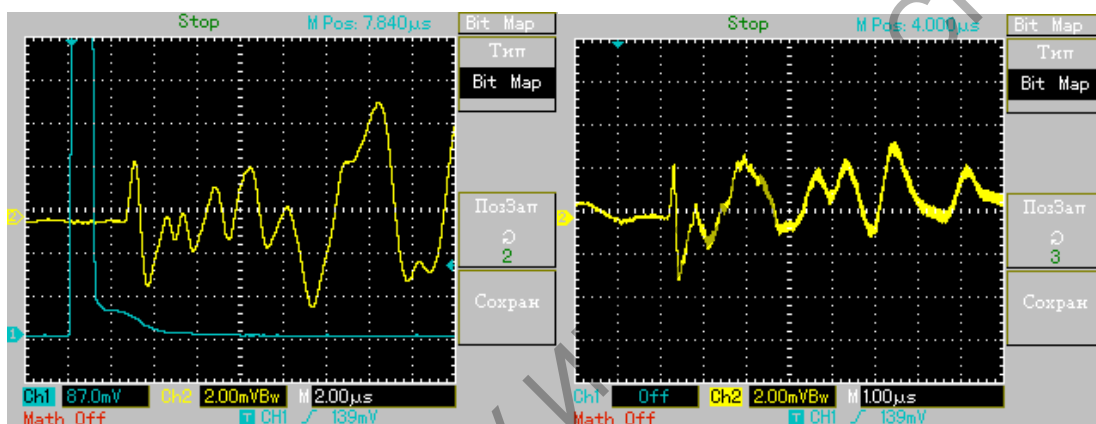
Рисунок 2 – Профиль акустического импульса, индуцированного в керне гауссовым световым пучком  
(а) доломит, (б) известняк



(а) (б)

Рисунок 3 – Профиль акустического импульса, индуцированного в керне бesselевым световым пучком

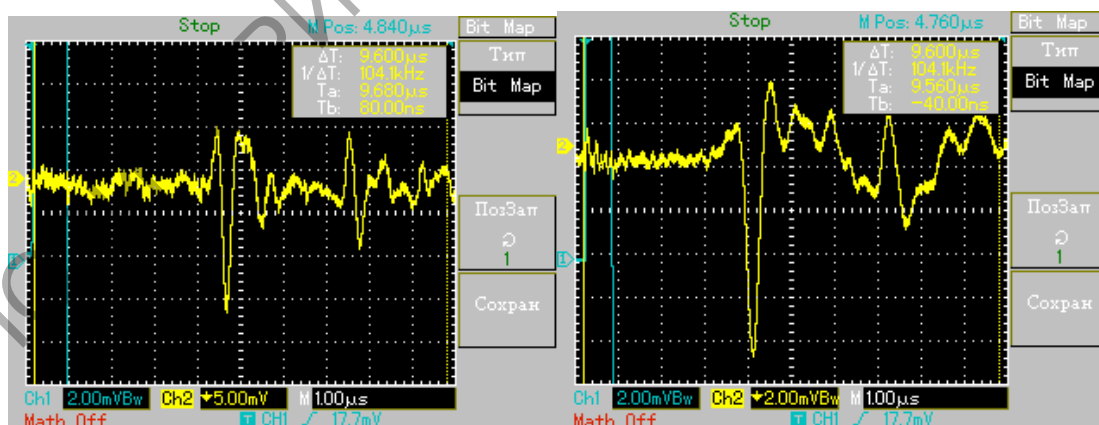
(а) доломит, (б) известняк



(а) (б)

Рисунок 4 – Профиль акустического импульса, индуцированного в керне гауссовым световым пучком

(а) глина, (б) известняк слабоглинистый



(а) (б)

Рисунок 5 – Профиль акустического импульса, индуцированного в керне бesselевым световым пучком

(а) глина, (б) известняк слабоглинистый

Временная развертка продольных ультразвуковых импульсов (рисунок 2) соответствует типичным спектрам [1], возбуждаемым лазерными пучками с гауссовым распределением интенсивности. В случае использования бесселевых световых пучков возбуждаются как продольная, так и поперечная акустическая мода (рисунок 3), что обусловлено особенностью механизма ФТА преобразования импульсов с бесселевым распределением энергии. После нахождения (по графикам) значений скоростей продольных и сдвиговых волн можно определить полный набор упругих параметров исследуемых кернов (модуль сдвига, коэффициент Пуассона, модуль Юнга, модуль объемной упругости (коэффициент всестороннего сжатия)), которые представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты определения прочностных параметров керновых образцов

Номер образца	Горизонт	Литология	Модуль сдвига, Па 10 <sup>9</sup>	Коэффициент Пуассона	Модуль Юнга, Па 10 <sup>9</sup>	Модуль объемной упругости, Па 10 <sup>9</sup>
5768	D <sub>3</sub> ln	Песчаник	7,96	0,29	20,54	16,3
5712	D <sub>3</sub> ln	Глина	12,34	0,29	31,83	25,25
1358	D <sub>3</sub> zd(ton)	Доломит	19,28	0,30	49,75	39,47
8465	D <sub>3</sub> sr	Известняк	23,71	0,30	61,18	48,53
6016	D <sub>3</sub> vr(pch)	Известняк слабоглинистый	19,98	0,29	48,98	38,85
3493	D <sub>3</sub> lb	Известняк слабоглинистый	22,08	0,30	57,6	48,3
3814	D <sub>3</sub> ln	Глина	5,379	0,30	14	1,19

При определении пористости керновых образцов воспользуемся, аналогично [11], моделью двухфазной среды – «пористый образец – метанол». Скорость звуковой волны в пористом образце можно выразить из формулы

$$V_{н.обр.}^2 = \frac{1}{(\rho_{н.обр.} (m / \rho_{кern} V_{кern}^2 + (1 - m) / \rho_{эт} V_{эт}^2))}, \quad (1)$$

где  $V_{н.обр.}$  определяется соотношением

$$V_{н.обр.} = \frac{hV_{кern}}{h + V_{кern} \Delta t}, \quad (2)$$

$\Delta t$  – время задержки акустического импульса относительно опорного сигнала;

$$\rho_{н.обр.} = m\rho_{керна} + (1 - m)\rho_{эт}, \quad (3)$$

$\rho_{н.обр.}$  – плотность двухфазной среды «образец керна – этанол».

Объединяя (1) – (3) получим квадратное уравнение относительно  $m$ , корни которого

$$m = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma}}{2\alpha}, \quad (4)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  соответственно вычисляются по формулам:

$$\alpha = \frac{1}{V_{керна}^2} + \frac{1}{V_{эт}^2} - \frac{\rho_{керна}}{\rho_{эт}V_{эт}^2} - \frac{\rho_{эт}}{\rho_{керна}V_{керна}^2}, \quad (5)$$

$$\beta = \frac{\rho_{керна}}{\rho_{эт}V_{эт}^2} + \frac{\rho_{эт}}{\rho_{керна}V_{керна}^2} - \frac{1}{V_{эт}^2}, \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{1}{V_{эт}^2} - \frac{1}{V_{н.обр}^2}. \quad (7)$$

После нахождения параметров, определенных в формулах (1) – (7) несложно определить пористость материала исследуемых образцов, вырезанных из керна. Вычисление значений  $m$  реализовано с использованием пакета программ ПО Mathcad 15; полученные при этом результаты сведены в таблицу 2.

Таблица 2 – Результаты определения пористости керновых образцов

Номер образца	Горизонт	Литология	Коэффициент открытой пористости, %, определенный методом	
			гидростатического взвешивания	лазерной фотоакустики
5768	D <sub>3</sub> ln	Песчаник	–	14,476
5712	D <sub>3</sub> ln	Глина	–	8,664
1358	D <sub>3</sub> zd(ton)	Доломит	6,4	5,285
8465	D <sub>3</sub> sr	Известняк	4,6	4,282
6016	D <sub>3</sub> vr(pch)	Известняк слабобоглинистый	4,11	5,429
3493	D <sub>3</sub> lb	Известняк слабобоглинистый	1,78	1,013
3814	D <sub>3</sub> ln	Глина	7,38	6,023

**Заключение.** Таким образом, в данной работе представлены результаты экспериментального измерения скоростей продольных и поперечных звуковых волн, возбуждаемых в образцах горных пород (кернах) лазерными импульсами с гауссовым и бесселевым пространственным распределением интенсивности. В рамках модели двухфазной среды продемонстрирована возможность определения пористости исследуемых образцов керна с погрешностью не более 5%, а также вычислены все упругие модули образцов, необходимые для характеристики их прочностных свойств.

### Литература

1.Андерсон, М.А. Анализ керна: Истина в последней инстанции при оценке характеристик пласта / М.А. Андерсон, Б. Дункан, Р. МакЛин // Нефтегазовое обозрение. –Schlumberger. –2013-2014. – Сб. II. –С. 4–17.

2.Гусев, В.Э. Лазерная оптоакустика / В.Э. Гусев, А.А. Карабутов.– М.: Наука, 1994. –304 с.

3.Пятницкий Л.Н. Волновые бесселевые пучки / Л.Н. Пятницкий. – М.: Физматлит. –2012. –406 с

4.Кожушко, В.В. Определение модулей металлических композитов бесконтактной регистрацией оптико-акустических импульсов / В.В. Кожушко, В.П. Сергеев, В.Н. Мышкова // Ученые записки физического факультета МГУ. –2017. – № 5. – С. 1251001-1–1251001-4.

5.Карабутов, А.А. Влияние пористости на дисперсию фазовой скорости продольных акустических волн в изотропных металломатричных композитах / А.А. Карабутов, Н.Б. Подымова // Акустический журнал. –2017. –Т. 63, № 3. –С. 265–274.

6.Калашников, И.Е. Применение оптико-акустического метода для определения упругих модулей металломатричных композиционных материалов, модифицированных тугоплавкими наночастицами / И.Е. Калашников, Л.К. Болотова, Л.И. Кобелева, Н.Б. Подымова, А.А. Карабутов // Ученые записки ЗабГУ. – 2014. – № 3(56). – С. 52–60.

7.Карабутов, А.А. Распространение продольных и сдвиговых акустических видеоимпульсов в графито-эпоксидных композитах / А.А. Карабутов, И.М. Керштейн, И.М. Пеливанов, Н.Б. Подымова // Акустический журнал. – 1999. – Т. 45, № 1. – С. 86–91.

8. Andrusenko, D. Photoacoustic effect in nanocomposite structure porous silicon–liquid / D. Andrusenko, M. Isaev, A. Kuzmich, V. Lysenko, R. Burbello // *Nanoscale Research Letters*. – 2012. – Vol. 7. – P. 411–416.

9. Beneditti, A. Precise detection of circular dichroism in a cluster of nano-helical by photoacoustic measurements / A. Beneditti, B. Alam, M. Esposito, V. Tasco, G. Leahu, A. Belardini, R. LiVoti, A. Passaseo, C. Sibia // *Scientific reports*. – 2017. |7:5257| DOI: 10.1038/s41598-017-05193-4.

10. Карабутов, А.А. Лазерная ультразвуковая спектроскопия / А.А. Карабутов, В.А. Макаров, Е.Б. Черепецкая, В.А. Шкуратник. – М.: Горная книга, 2008. – 175 с.

11. Жаркий, С.М. Исследование слоев пористого кремния лазерным ультразвуковым методом / С.М. Жаркий [и др.] // *ФТП*. – 2003. – Т. 37. – Вып. 4. – С. 485–489.

**Е.В. Тимощенко<sup>1</sup>, Ю.В. Юревич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Могилёвский государственный университет имени А.А. Кулешова», Могилёв, Беларусь,

<sup>2</sup>УО «Могилёвский государственный университет продовольствия», Могилёв, Беларусь

## **РАСЧЁТ ЭФФЕКТИВНОСТИ БИСТАБИЛЬНОГО ТОНКОПЛЁНОЧНОГО ОТРАЖАТЕЛЯ**

### **Введение**

В настоящее время широко востребованными в фотонике и оптоэлектронике являются устройства управления светом. Наибольший интерес проявляется к тем из них, у которых основные функциональные элементы представляют планарные структуры тонких плёнок, изготовленных на основе активных сред с нелинейностью в области оптического резонанса. Внедрение в структуру оптического устройства резонансных слоёв с высокой плотностью активных центров может обусловить изменение реакции всей системы на излучение, не нарушая при этом компактности [1]. Полупроводниковые наноструктуры, которые активно исследуются в настоящее время, обладают необходимыми свойствами плотных резонансных сред [2]. В этих объектах нелинейный отклик на когерентное излучение особо выражен в спектральной области, соответствующей экситонным перехо-



дам [3, 4]. При отражении света тонким слоем активной среды в условиях оптического резонанса наряду с френелевской составляющей существенное влияние на отражение (преломление) может оказывать нелинейный компонент, обусловленный резонансной поверхностной поляризацией [5]. В плотной резонансной среде из-за взаимного влияния ближних полей диполей, вызывающего сдвиг резонансной линии поглощения, значение этого компонента в нелинейном отклике среды возрастает [6]. Существенным оказывается также смещение резонансной частоты под влиянием поглощения в квазирезонансных переходах. В расчетах его учитывают, вводя в рассмотрение разность поляризуемостей активных центров в основном и возбужденном состояниях.

В настоящей работе изучена зависимость бистабильных свойств, проявляющихся при отражении, от материальных параметров планарной плёнки плотной резонансной среды. Анализ произведен с учётом возникающих по мере насыщения поглощения взаимосвязанных нелинейных фазовых эффектов, перечисленных выше.

### 1. Расчётные соотношения

В основу схемы расчёта резонансного отражения плёнок положено приближение сверхтонкого слоя [7]. Система соотношений для однородного поля и материальных квантовомеханических уравнений представляет согласованную динамическую модель взаимодействия при постоянном уровне возбуждения внешним полем  $E_i(t) = E_0$ , для которой характерны определенные равновесные состояния. Количественно эти состояния описываются нелинейными соотношениями, связывающими стационарные значения переменных с уровнем возбуждения и материальными параметрами.

В работе [8] авторами получен конкретный вид этих соотношений для плотной резонансной среды, в пределах ширины спектральной линии и с учётом смещения частоты резонанса рассчитаны дисперсионные зависимости характеристик равновесных состояний. При анализе результатов расчёта обнаружена возможность бистабильности равновесных состояний, степень проявления которой зависит от уровня возбуждения и частотной отстройки от резонанса. Соответственно, для слоя в области бистабильности можно ожидать гистерезисного переключения нелинейного пропускания или отражения. В приведенных далее уточнённых расчётах аналогично [9] использу-

ется обобщённая двухуровневая схема и представление комплексной поверхностной поляризованности в форме

$$P(t) = Nl \left[ i\mu\rho(t) - 2\pi \Delta\alpha\varepsilon_0(1-n(t))E(t) \right]. \quad (1)$$

Здесь  $E(t)$  – квазистационарная амплитуда напряжённости действующего на активные центры светового поля,  $\rho(t)$  и  $n(t)$  – вероятностные переменные резонансной поляризованности и разности населённостей соответственно,  $\mu$  – средняя величина дипольного момента активных центров,  $\Delta\alpha$  – разность их поляризуемостей в основном и возбуждённом состояниях,  $Nl$  – плотность центров ( $l$  – толщина слоя, которая считается значительно меньшей длины волны). С применением формулы (1) при определении условий бистабильности равновесных состояний имеется возможность характеризовать взаимодействие нелинейных эффектов насыщения поглощения, сдвига резонансной частоты  $\omega$  (обусловленного действием ближних полей) и автомодуляционного уширения линии поглощения.

Аналогично работам [8, 10] формулируются следующие соотношения для нормированных величин уровня возбуждения  $e_0 = \mu E_0 \sqrt{T_1 T_2} / \hbar$  (он соответствует интенсивности насыщения резонансного поглощения) и частотной отстройки  $\Delta\omega = (\omega - \omega_0)T_2$ , определяющих стационарную разность населённости  $n_s$  и амплитудный нелинейный коэффициент отражения слоя  $r$ :

$$\frac{1-n_s}{n_s} \left[ 1 + \beta^2(1-n_s)^2 \right] = \frac{e_0^2}{(1+\kappa n_s)^2 + \Delta^2}, \quad \Delta = \Delta\omega + \gamma\kappa n_s - \beta(1-n_s), \quad (2)$$

$$r = r_0 + \frac{2\kappa n_s}{(\eta+1) \left[ 1 + \beta^2(1-n_s)^2 \right]} \frac{1 + (1+n_s)\Delta^2 + \kappa n_s}{(1+\Delta^2 + \kappa n_s)^2 + (\kappa n_s \Delta)^2},$$

где  $\kappa = \mu^2 \omega T_2 Nl / \hbar c \varepsilon_0$  – параметр резонансной нелинейности поглощения приповерхностного слоя, которым характеризуют также его резонансный (в отсутствие насыщения) показатель поглощения,  $\beta = 2\pi \Delta\alpha \varepsilon_0 \hbar / \mu^2 T_2$  – параметр резонансной нелинейности рефракции, обусловленной влиянием квазирезонансной поляризации,  $T_1$  и  $T_2$  – времена продольной и поперечной (фазовой) релаксации,  $\gamma$  – нормировочный коэффициент в локальной поправке Лорентца к действующему полю, пропорциональный отношению длины волны внешнего поля и толщины  $l$ ,  $r$  – френелев коэффициент отражения, определяемый  $\eta$  – нерезонансным показателем преломления слоя.

## 2. Расчёт гистерезисных характеристик резонансного отражения

Вычисления, необходимые для получения зависимости  $r$  от величины нормированной мощности  $e_0^2$  (не имеющей размерности) на основе решений (2), удобно проводить методом параметрического расчёта – значения вероятностной переменной  $n_s$  лежат в пределах (0, 1). На рисунке 1 приведены типичные бистабильные кривые – на фрагменте *а* демонстрируется возникновение гистерезисного изгиба по мере изменения параметра  $\kappa$ , на фрагменте *б* указано направление гистерезисных скачков и обозначены характерные размеры гистерезисной петли. Гистерезис при бистабильной (неоднозначной) зависимости коэффициента отражения от уровня мощности должен проявляться при циклическом изменении  $e_0^2$ .

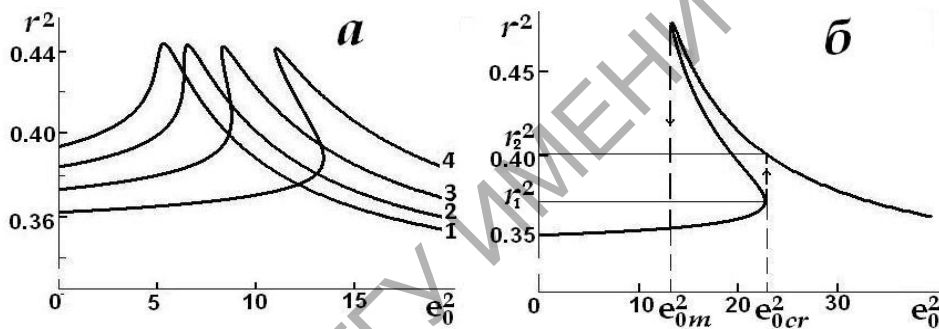


Рисунок 1 – Зависимость резонансного отражения от интенсивности (в относительных единицах):  $\kappa = 1,3$  (кривая 1); 1,5 (2); 1,8 (3); 2,2 (4);  $\Delta\omega = -0,5$  (а),  $\kappa = 2,5$ ,  $\Delta\omega = -1,0$  (б);  $\beta = 0,25$ ,  $\gamma = 3,17$

В результате расчёта показано, что точки поворота гистерезисных зависимостей  $r^2(e_0^2)$  и  $n_s(e_0^2)$  на шкале мощности совпадают. Поэтому положение точек поворота  $e_{0cr}^2$  и  $e_{0m}^2$  (рисунок 1, б) определяется при элементарном исследовании на экстремумы функции  $e_0^2(n_s)$ , выражаемой явно первым из соотношений (2). Можно сформулировать соответствующее уравнение относительно  $n_s$ , и нетрудно показать, что величины экстремумов  $e_{0cr}^2$  и  $e_{0m}^2$ , а также критическое значение  $r_1 = r(e_{0cr}^2)$  и максимальное значение резонансного отражения  $r = r(e_{0m}^2)$ , определяются его неотрицательными корнями:

$$n_{s1,2} = \frac{A+B}{2} \pm \sqrt{\frac{(A-B)^2}{4} - B^2}, \quad A = 0.5 - \frac{\kappa - CD}{\kappa^2 + C^2}, \quad B = \sqrt{\frac{1+D^2}{\kappa^2 + C^2 - 2(\kappa - CD)}}, \quad (3)$$

где  $C = \kappa\gamma + \beta$ ,  $D = \Delta\omega + \beta$ .

Применяя выражения (3) в сочетании с (2) можно непосредственно рассчитать такие характеристики бистабильного отражения как пороговую мощность его проявления ( $e_{0cr}^2$ ), относительную величину «кинка» отражения при гистерезисном переключении ( $\Delta r = (r_2/r_1)^2 - 1$ ), размер области гистерезиса на шкале мощности ( $\Delta e_0^2 = e_{0cr}^2 - e_{0m}^2$ ). Масштаб явлений, включая диапазон изменения коэффициентов (2), (3), в расчётах, в основном, определялся с учётом известных из литературы (например [2-4]) параметров сред полупроводниковых квантоворазмерных структур для слоёв субмикронной толщины. Значения насыщающей мощности по порядку величины могут быть не менее  $10^3 \text{ Вт/см}^2$  – в диапазоне длин волн  $\sim (1,25 \dots 1,30) \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

### 3. Обсуждение результатов и заключение

Результаты, полученные при численном расчёте дисперсионных зависимостей в условиях гистерезисного отражения, иллюстрированы на рисунке 2.

Анализируя зависимости, иллюстрированные на рисунке 2, а, можно сделать вывод о значимости эффекта, обусловленного автомодуляционным смещением частоты светового поля, – от его наличия существенно зависит ширина гистерезиса. Кривые, изображенные на рисунке 2, б, отображают зависимость пороговой мощности от линейной отстройки частоты – проявление гистерезиса имеет более низкий порог по мощности на частотах, близких к центру резонансной линии поглощения, смещённому в длинноволновую область спектра из-за диполь-дипольного взаимодействия. В этой же области, судя по ходу кривых на рисунке 2, в, бóльшим оказывается гистерезисный скачок отражения. Степень выраженности гистерезиса сильно зависит от показателя поглощения, хотя положение частоты, которой определяется оптимум ширины гистерезисной петли, от этого параметра зависит слабо (рисунок 2, г).

Посредством гистерезисного переключения в схеме обратной связи генерирующего устройства можно без применения в его схеме внешних модулирующих элементов перевести лазерную систему в режим автоколебаний. Поэтому в последующих исследованиях представляется важным анализ условий бистабильности пассивного элемента.

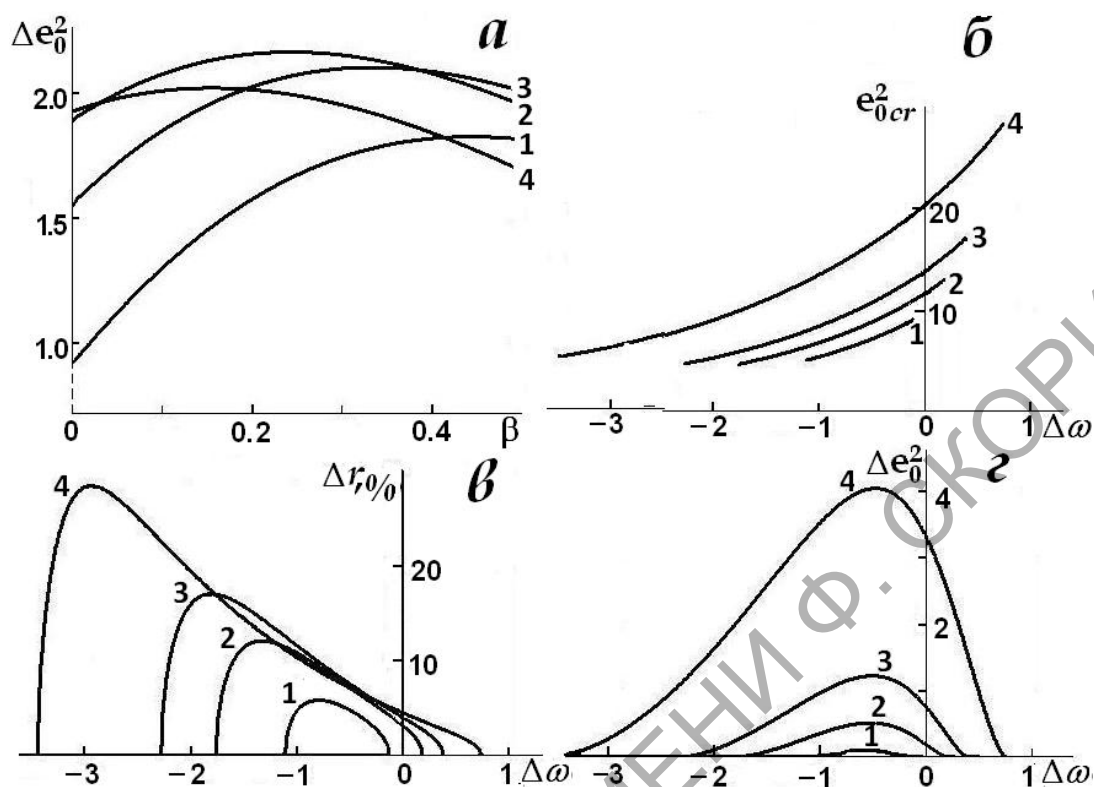


Рисунок 2 – Дисперсионные зависимости характеристик гистерезисного отражения тонкого слоя:  $\kappa = 2,0$ ,  $\Delta\omega = 0$  (кривая 1);  $-0,25$  (2);  $-0,5$  (3);  $-0,8$  (4) (а);  $\kappa = 1,6$  (1);  $1,8$  (2);  $2,0$  (3);  $2,5$  (4);  $\beta = 0,25$  (б – в);  $\gamma = 3,17$

### Литература

1. Танин, Л.В. Резонансные, голографические и спекл-оптические исследования фазовых, диффузных и зеркальных объектов: автореф. дисс. ... доктора физ.-мат. наук: 01.04.05 / Минск, БГУ. – 2014. – 64 с.
2. Каплан, А.Е. Поведение локальных полей в нанорешётках из сильно взаимодействующих атомов: наностраты, гигантские резонансы, «магические» числа и оптическая бистабильность / А.Е. Каплан, С.Н. Волков // УФН. – 2009. – Т. 179, вып. 5. – С. 539–547.
3. Borri, P. Rabi oscillations in the excitonic ground-state transition of InGaAs quantum dots / P. Borri [et al.] // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 66. – P. 081306–(1–4).
4. Optical Stark effect in a quantum dot: Ultrafast control of single exciton polarizations / T. Unold [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 92, № 15. – P. 157401–1–157401–4.
5. Гадамский, О.Н. Эхо-спектроскопия поверхности / О.Н. Гадамский, Р.А. Власов. – Мн.: Навука і тэхніка, 1990. – 216 с.

6. Boyd, R.W. Local field effects in enhancing the nonlinear susceptibility of optical materials / R.W. Boyd, J.J. Maki, J.E. Sipeb // *Nonlinear Optics: Fundamentals, Materials and Devices*. – 1992. – P. 63–76.

7. Юдсон, В.И. Нелинейная резонансная оптика тонких плёнок: метод обратной задачи / В.И.Юдсон, В.И.Рупасов // *ЖЭТФ* – 1987. – Т. 93. – С. 494–501.

8. Тимощенко, Е.В. Резонансное отражение света тонким слоем плотной нелинейной среды / Е.В. Тимощенко, Ю.В. Юревич, В.А. Юревич // *ЖТФ*. – 2013. – Т.83, вып.2. – С.103–106.

9. Апанасевич, П.А. Основы теории взаимодействия света с веществом / П.А. Апанасевич. – Мн.: Навука і тэхніка, 1977. – 496 с.

10. Тимощенко, Е.В. Нелинейная восприимчивость тонкой плёнки плотной резонансной среды / Ю.В. Юревич, Е.В. Тимощенко // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2015. – №1 (22). – С.27–31.

**А.И. Толкачѳв, В.Н. Капшай, А.А. Шамына**  
УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ-СУММАРНОЙ ЧАСТОТЫ В ТОНКОМ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ**

### **Введение**

В последние десятилетия для изучения поверхностей малых частиц используются нелинейные оптические явления, такие как генерация второй гармоники (ГВГ) [1] и генерация суммарной частоты (ГСЧ) [2-3]. Объектами исследования являются наноантенны и нанообъекты различной формы, плоские и объемные наноструктуры, но одним из наиболее простых для описания и создания объектов является диэлектрическая шарообразная наночастица, покрытая тонким слоем вещества, обладающего нелинейными оптическими свойствами. В дипольном приближении нелинейные оптические эффекты второго порядка в центросимметричных средах запрещены. На поверхности частиц условие центросимметричности нарушается, и этим обусловлена возможность экспериментально обнаруживать генерируемое излучение.

В настоящей работе мы предлагаем для изучения нелинейной генерации использовать два когерентных источника одинаковой частоты. В этом случае частота второй гармоники совпадает с суммарной частотой. Будем называть это параметрическое явление генерацией второй гармоники-суммарной частоты (ГВГ-СЧ). Для его теоретического анализа необходимо учитывать ГВГ от каждого из источников в отдельности, и интерференционные эффекты, которые, по существу, определяют ГСЧ.

## 1. Аналитическое решение

В данной работе генерируемые поля второй гармоники-суммарной частоты рассчитываются в рамках нелинейной модели Рэлея – Ганса – Дебая. В этой модели предполагается, что рассеяние и преломление вносят малый вклад в результирующее поле первой гармоники, и этим вкладом можно пренебречь. В дипольной модели генерация поля второй гармоники-суммарной частоты обусловлена нелинейной частью вектора поляризации среды, компоненты которого имеют вид

$$P_i^{(2)} = \chi_{ijk}^{(2)} \left( \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} \right)_j \left( \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} \right)_k = \chi_{ijk}^{(2)} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 E_j^{(\alpha)} E_k^{(\beta)}. \quad (1)$$

Поле первой гармоники представляется в виде суперпозиции создаваемых источниками 1 и 2 полей  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{E}^{(2)}$ ,  $E_j^{(\alpha)}$ ,  $E_k^{(\beta)}$  – их компоненты,  $\chi_{ijk}^{(2)}$  – тензор диэлектрической восприимчивости второго порядка. Индексами  $\alpha$  и  $\beta$  здесь и далее отмечена принадлежность величины к соответствующему источнику (они принимают значения 1 или 2), при этом подразумевается суммирование по повторяющимся латинским индексам.

Электрические поля источников задаются следующим образом:

$$\mathbf{E}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) = E_\alpha \mathbf{e}^{(\alpha)} \exp(i\mathbf{k}^{(\alpha)} \mathbf{x} - i\omega t), \quad (2)$$

где  $E_\alpha$  – комплексная амплитуда волны,  $\mathbf{e}^{(\alpha)}$  – единичный комплексный вектор поляризации,  $\mathbf{k}^{(\alpha)}$  – волновой вектор,  $\omega$  – циклическая частота (рисунок 1).

Проводя рассуждения аналогично работе [1], напряженность генерируемого электрического поля в дальней зоне получим (опуская множитель  $\exp(-i\omega t)$ ) в виде

$$\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) \approx k_{2\omega}^2 \frac{\exp(i\mathbf{k}_{2\omega} r)}{\varepsilon_{2\omega} r} (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \int_V \exp(-i\mathbf{k}^{(2\omega)} \mathbf{x}') \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{k}^{(2\omega)} = k_{2\omega} \mathbf{e}_r$ ,  $k_{2\omega} = \sqrt{\varepsilon_{2\omega} \mu_{2\omega}} 2\omega / c$  – волновой вектор генерируемого поля и его модуль,  $\varepsilon_{2\omega}$ ,  $\mu_{2\omega}$  – электрическая и магнитная проницаемости на частоте  $2\omega$ , символ  $\otimes$  означает тензорное произведение векторов. Интегрирование производится по объему  $V$  (т.е. по нелинейному слою толщины  $d_0$ , малой по сравнению с радиусом слоя  $a$ ).

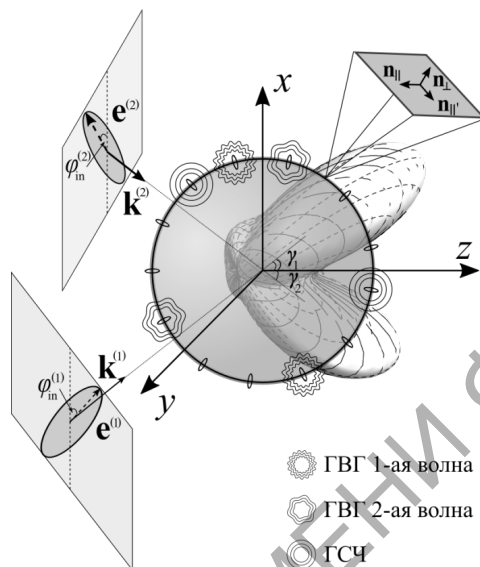


Рисунок 1 – Схема задачи о ГВГ-СЧ от сферического нелинейного слоя

Тензор третьего ранга  $\chi_{ijk}^{(2)}$  (4 независимых компоненты) в рассматриваемой задаче совпадает с аналогичным тензором, используемым в задаче о ГВГ [1], но отличается количеством независимых компонент от тензора, учитываемого при решении задачи о ГСЧ (7 компонент) [2], и имеет вид

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_1^{(2)} n_i n_j n_k + \chi_2^{(2)} n_i \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} (n_j \delta_{ki} + n_k \delta_{ij}) + \chi_4^{(2)} n_m (n_k \varepsilon_{ijm} - n_j \varepsilon_{imk}). \quad (4)$$

Здесь  $n_i$  – компоненты вектора нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности,  $\delta_{ij}$  – дельта-символ Кронекера,  $\varepsilon_{ijk}$  – символ Леви-Чивита,  $\chi_{1-4}^{(2)}$  – значения независимых компонент тензора диэлектрической восприимчивости (последний коэффициент  $\chi_4^{(2)}$  называют киральным).

Начало сферической и декартовой (ось  $Oz$  направим вдоль суммы векторов  $\mathbf{k}^{(1)}$  и  $\mathbf{k}^{(2)}$ ) систем координат совместим с центром частицы (рисунок 1). Подставляя напряженности исходных волн (2) в (1), а полученный при этом результат – в (3), после интегрирования в сферических координатах получаем искомую напряженность генерируемого электрического поля [4]:



$$\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = 4\pi\mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2 \exp(ik_{2\omega}r)}{c^2 r} d_0 a^2 (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 E_\alpha E_\beta \mathbf{f}^{(\alpha\beta)}, \quad (5)$$

где векторы  $\mathbf{f}^{(\alpha\beta)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(\alpha\beta)} = & i\chi_1^{(2)} \left( -j_3(q^{(\alpha\beta)}a) \mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)}) + \frac{1}{5} (j_1(q^{(\alpha\beta)}a) + j_3(q^{(\alpha\beta)}a)) \times \right. \\ & \times \left( \mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{e}^{(\alpha)} \mathbf{e}^{(\beta)}) + \mathbf{e}^{(\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) + \mathbf{e}^{(\alpha)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)}) \right) \Big) + \\ & + ij_1(q^{(\alpha\beta)}a) \left( \chi_2^{(2)} \mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{e}^{(\alpha)} \mathbf{e}^{(\beta)}) + \chi_3^{(2)} \mathbf{e}^{(\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) + \chi_3^{(2)} \mathbf{e}^{(\alpha)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)}) \right) - \\ & - \chi_4^{(2)} j_2(q^{(\alpha\beta)}a) \left( [\mathbf{e}^{(\alpha)} \times \mathbf{v}^{(\alpha\beta)}] (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)}) + [\mathbf{e}^{(\beta)} \times \mathbf{v}^{(\alpha\beta)}] (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{q}^{(\alpha\beta)} = \mathbf{k}^{(\alpha)} + \mathbf{k}^{(\beta)} - \mathbf{k}^{(2\omega)}$ ,  $q^{(\alpha\beta)} = |\mathbf{q}^{(\alpha\beta)}|$  – векторы рассеяния и их модули соответственно,  $\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}$  – единичные векторы вдоль  $\mathbf{q}^{(\alpha\beta)}$ ;  $j_m(q^{(\alpha\beta)}a)$  – сферическая функция Бесселя порядка  $m$ .

Экспериментально измеряемой величиной является интенсивность излучения, поэтому в дальнейшем будем анализировать радиальную составляющую вектора Умова-Пойнтинга:

$$S_r^{(2\omega)}(r, \theta, \varphi) = \frac{c}{8\pi \mu_{2\omega}} n_{2\omega} |\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x})|^2. \quad (7)$$

## 2. Анализ параметров задачи

ГВГ-СЧ существенно отличается от ГВГ количеством варьируемых параметров. Приведем наиболее важные из них.

Угол между волновыми векторами  $\mathbf{k}^{(1)}$  и  $\mathbf{k}^{(2)}$ , который также называют углом раскрытия, обозначим символом  $\gamma$ . Он связан с углами, указанными на рисунке 1, следующим соотношением:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}\gamma, \quad \gamma \in [0; \pi]. \quad (8)$$

Параметры  $\sigma_\alpha$  ( $\sigma_\alpha \in [-1; 1]$ ) характеризуют степени эллиптичности падающих волн; при  $\sigma_\alpha > 0$  – правая поляризация,  $\sigma_\alpha < 0$  – левая поляризация,  $\sigma_\alpha = 0$  – линейная поляризация. Углы  $\varphi_{in}^{(\alpha)}$ , указанные на рисунке 1, – это углы между осью  $Ox$  и большими полуосями эллипсов поляризации соответствующих падающих электромагнитных волн. Относительный размер частицы характеризует величина  $k_\omega a$ , равная изменению фазы исходной волны при смещении вдоль волнового вектора на расстояние, равное радиусу частицы. Введем также величину  $\eta = E_2/E_1$ , которая в общем случае комплексна, поэтому бу-

дем представлять ее в виде  $\eta = |\eta| \exp(i \arg \eta)$ , где  $\arg \eta \in (-\pi; \pi]$  является аналогом разности фаз падающих волн в центре частицы.

Для анализа влияния параметров  $\eta$  и  $\gamma$  на эффективность ГВГ-СЧ зафиксируем суммарную мощность исходных волн; для этого выражение (5) необходимо разделить на «нормирующий» множитель  $(1+|\eta|^2)$ . Зададим следующие значения характеристик частицы и параметры падающих волн:

$$k_{\omega} a = 0,1; \sigma_1 = 1; \sigma_2 = -0,5; \varphi_{in}^{(1)} = 0,5 \text{ рад}; \varphi_{in}^{(2)} = 0,5 \text{ рад}. \quad (9)$$

Количественной характеристикой эффективности генерации является максимальная по направлению наблюдения  $\theta, \varphi$  плотность мощности излучения  $S_{r, \max}^{(2\omega)}$ . При заданных значениях параметров произведем численную максимизацию указанной плотности мощности отдельно для каждого типа анизотропии  $\chi_{1-4}^{(2)}$ . При первом типе анизотропии  $\chi_1^{(2)}$  подразумевается  $\chi_1^{(2)} \neq 0, \chi_{2,3,4}^{(2)} = 0$ , при втором ( $\chi_2^{(2)}$ ) имеем  $\chi_2^{(2)} \neq 0, \chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$ , при третьем ( $\chi_3^{(2)}$ ) –  $\chi_3^{(2)} \neq 0, \chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$ , при четвертом ( $\chi_4^{(2)}$ ) –  $\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1,2,3}^{(2)} = 0$ . Результаты максимизации плотности мощности  $S_{r, \max}^{(2\omega)}$  представлены в таблице 1, значения параметров, при которых достигаются максимумы – в таблице 2.

Таблица 1 – Значения максимальной плотности мощности ГВГ-СЧ

Вычисляемая величина	Тип анизотропии			
	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$
$S_{r, \max}^{(2\omega)} / (10^{-3} S_0)$	0,93	7,3	20	0,09
$S_{r, \max}^{(2\omega)} / S_{SHG}^{(2\omega)}$ при $ \sigma  = 1$	5,2	–	4,5	3,6
$S_{r, \max}^{(2\omega)} / S_{SHG}^{(2\omega)}$ при $ \sigma  = 0,5$	2,6	4,7	4,5	2,2
$S_{r, \max}^{(2\omega)} / S_{SHG}^{(2\omega)}$ при $\sigma = 0$	1,7	1,7	4,5	1,8

В первой строке таблицы 2 приведены значения плотности мощности, рассчитанные по формуле  $S_0 = 2\pi c \frac{\mu_{2\omega}}{n_{2\omega}^3} \frac{d_0^2}{r^2} (k_{2\omega} a)^4 |E_1|^4$  при выборе единичных коэффициентов анизотропии ( $\chi_i^{(2)} = 1, \chi_j^{(2)}|_{j \neq i} = 0$ ), в других строках приведено отношение величины, записанной в первой строке, к максимальной излучаемой плотности мощности при

ГВГ [1] с использованием одного источника, излучение которого характеризуется указанной эллиптичностью.

Таблица 2 – Значения оптимизированных параметров

Параметры	Тип анизотропии			
	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$
$\gamma$ , рад	0,02	0	2,39	1,39
$ \eta $	1,27	1,36	0,99	1,09
$\arg \eta$ , рад	0	-2,14	-1,01	-0,61

Анализируя информацию, содержащуюся в строке 1 таблицы 1 отметим, что при одинаковом порядке значений коэффициентов анизотропии наименьший вклад в генерацию будут вносить слагаемые с коэффициентами  $\chi_1^{(2)}$  и  $\chi_4^{(2)}$ . Поставленный в одной из ячеек строки 2 символ «—» означает отсутствие ГВГ при падении циркулярно поляризованной волны и соответствующем этой ячейке типе анизотропии нелинейного слоя. При сравнении наименьшего выигрыша в наблюдаемой максимальной мощности с его величиной, соответствующей схеме, основанной на использовании одной падающей волны, в строках 2 – 4 таблицы 1 видим, что первой из них соответствует его значение, равное; второй – 2,2; третьей – 1,7. Проводя аналогичную оптимизацию эффективности ГВГ-СЧ, но рассматривая случай вещественного  $\eta$  ( $\arg \eta = 0$ ), получим, что значения  $S_{r, \max}^{(2\omega)}$  практически не изменяются при типах анизотропии  $\chi_1^{(2)}$  и  $\chi_2^{(2)}$ , при анизотропии  $\chi_3^{(2)}$  – уменьшаются на 32%, типа  $\chi_4^{(2)}$  – уменьшаются на 4%.

В таблице 2 видно, что для  $\chi_{1,2}^{(2)} \neq 0$  максимум плотности мощности  $S_{r, \max}^{(2\omega)}$  наблюдается при малых углах раскрытия, для  $\chi_{3,4}^{(2)} \neq 0$  – при относительно больших. При этом модуль отношения комплексных амплитуд варьирует в довольно узком диапазоне  $|\eta| \in [0,99; 1,36]$ .

### Заключение

Проведена оптимизация эффективности ГВГ-СЧ (а именно максимальной по направлению  $\theta$ ,  $\varphi$  плотности мощности) по параметрам  $\gamma$  и  $\eta$  ( $|\eta|$  и  $\arg \eta$ ). Выяснено, что анализируемый в статье способ ГВГ-СЧ при указанных в (9) значениях параметров эффективнее ГВГ, ос-

нованной на использовании одного источника, в 1,7 и более раз. Этот результат можно рассматривать как количественное доказательство преимущества использования в эксперименте ГВГ-СЧ по сравнению с ГСЧ или ГВГ.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант по проекту Ф18М-026).

### Литература

1. Капшай, В.Н. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя и условия отсутствия генерации / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // Оптика и спектроскопия. – 2017. – Т. 123, № 3. – С. 416–429.

2. Шамына, А.А. Генерация суммарной частоты от тонкого цилиндрического слоя / А.А. Шамына, В.Н. Капшай // Оптика и спектроскопия. – 2018. – Т. 124, № 1. – С. 105–121.

3. de Beer, A.G.F. Sum frequency generation scattering from the interface of an isotropic particle: Geometrical and chiral effects / A.G.F. de Beer, S. Roke // Physical Review B. – 2007. – V. 75, № 24.

4. Толкачѳв, А.И. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя при наличии двух источников / А.И. Толкачѳв, В.Н. Капшай // Актуальные вопросы физики и техники: Материалы VII Респ. научной конф. студентов, магистрантов и аспирантов. – 2018. – Ч. 1. – С. 287–290.

**А.И. Толкачѳв, А.А. Шамына, В.Н. Капшай**  
УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

### **ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧЕ О ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ-СУММАРНОЙ ЧАСТОТЫ В ТОНКОМ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ**

На первом этапе оптимизационного анализа, произведенного в отношении решений задачи о генерации второй гармоники-суммарной частоты (ГВГ-СЧ) с использованием тонкого сферического слоя, были найдены максимальные по направлению наблюдения  $\theta$ ,  $\varphi$  значения плотности мощности ГВГ-СЧ при следующих значениях параметров задачи:

$$k_{\omega} a = 0,1; \sigma_1 = 1; \sigma_2 = -0,5; \varphi_{\text{in}}^{(1)} = 0,5 \text{ рад}; \varphi_{\text{in}}^{(2)} = 0,5 \text{ рад}. \quad (1)$$

Исследуем поведение функции  $S_{r, \max}^{(2\omega)}$  [1] при варьировании переменных  $\gamma$  и  $\eta$  ( $|\eta|$  и  $\arg \eta$ ). Построим графики  $S_{r, \max}^{(2\omega)}(\gamma, |\eta|)$  отдельно для каждого из четырёх типов анизотропии  $\chi_{1-4}^{(2)}$ , выделенных (определенных) в части 1 настоящего исследования при  $\arg \eta = 0$  (т.е.  $\eta$  – действительная величина). При первом типе анизотропии  $\chi_1^{(2)}$  подразумевается  $\chi_1^{(2)} \neq 0, \chi_{2,3,4}^{(2)} = 0$ , при втором ( $\chi_2^{(2)}$ ) имеем  $\chi_2^{(2)} \neq 0, \chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$ , при третьем ( $\chi_3^{(2)}$ ) –  $\chi_3^{(2)} \neq 0, \chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$ , а при четвёртом типе ( $\chi_4^{(2)}$ ) –  $\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1,2,3}^{(2)} = 0$ . Функции  $S_{r, \max}^{(2\omega)}(\gamma, |\eta|)$  нормированы на значения максимальных плотностей мощностей, найденных в части 1 настоящего исследования; их графические трёхмерные и двумерные изображения представлены на рисунке 1. Согласно легенде, иллюстрированной на рисунке 1д, красный цвет соответствует максимуму плотности мощности генерируемого излучения, синий цвет – отсутствию излучения.

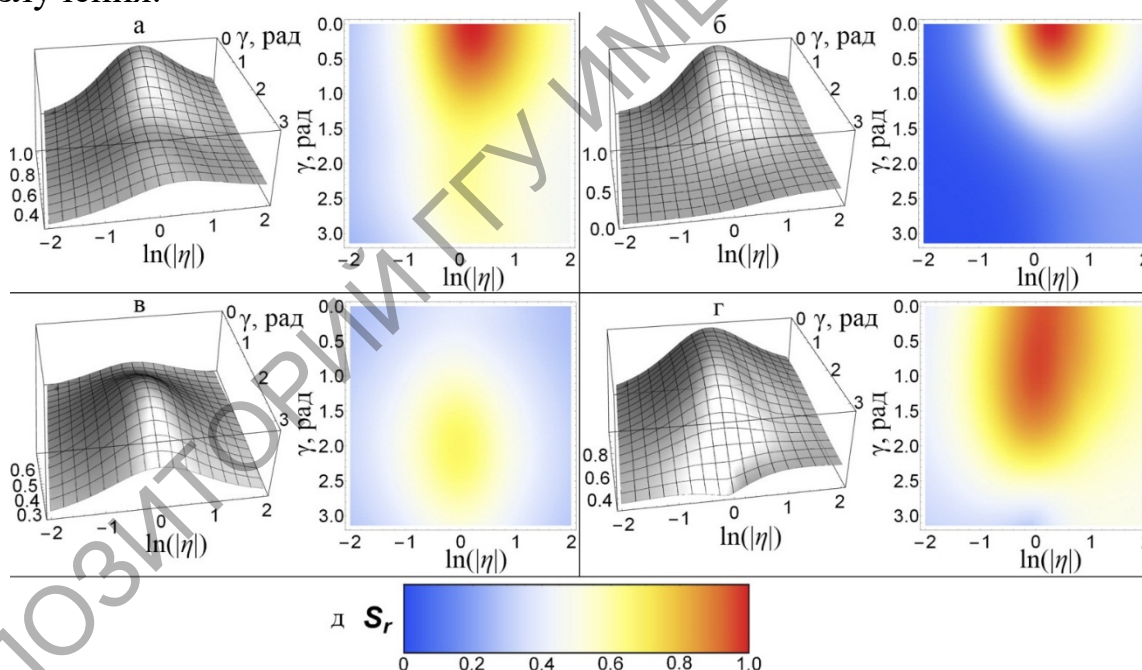


Рисунок 1 – Зависимость максимальной плотности мощности ГВГ-СЧ от угла раскрытия и отношения комплексных амплитуд. Легенда представлена на рисунке 1д. Предполагается, что на каждом из фрагментов а–г представлены графики для следующих типов анизотропии:

$$(a) \chi_1^{(2)}, (б) \chi_2^{(2)}, (в) \chi_3^{(2)}, (г) \chi_4^{(2)}$$

Анализируя графики, представленные на рисунке 1, видим, что для анизотропии, отнесенной к типу  $\chi_1^{(2)}$  ( $\chi_1^{(2)} \neq 0, \chi_{2-4}^{(2)} = 0$ , рисунок 1а), максимальная плотность мощности  $S_{r, \max}^{(2\omega)}$  в лепестках наблюдается при  $\gamma \approx 0,04$  рад,  $\eta \approx 1,27$ . При увеличении угла раскрытия или при отклонении параметра  $\eta$  от значения  $\eta \approx 1,27$ , мощность плавно убывает; при этом имеется локальный минимум по  $\gamma$ , и график функции  $S_{r, \max}^{(2\omega)}(\gamma, |\eta|)$  несимметричен относительно максимума – вершины трехмерного изображения (при  $\gamma = \text{const}$  убывание сильнее в направлении малых  $\eta$ ).

При  $\chi_2^{(2)} \neq 0, \chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$  (рисунок 1б) с увеличением угла раскрытия анализируемая функция монотонно убывает, максимум плотности мощности достигается при  $\gamma \approx 0,01$  рад и  $\eta \approx 1,37$ ; кроме того, наблюдается более быстрое её убывание при смещении от значения параметра, соответствующего экстремуму, в направлении малых  $\eta$ . В случае анизотропии, отнесенной к типу  $\chi_3^{(2)}$  (рисунок 1в), на графике зависимости  $S_{r, \max}^{(2\omega)}(\gamma, |\eta|)$  имеет явно выраженный максимум, локализованный при  $\gamma \approx 2,01$  рад и  $\eta \approx 0,96$ ; сечения построенной фигуры, соответствующие  $\gamma = \text{const}$ , почти симметричны относительно вершины. В случае кирального слоя ( $\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1-3}^{(2)} = 0$ , рисунок 1г) максимальная по направлению мощность (максимум при  $\gamma \approx 0,77$  рад и  $\eta \approx 1,05$ ) меняется незначительно при  $\gamma < 1,5$  рад,  $|\eta| = \text{const}$ , а при  $\gamma > 1,5$  рад быстро убывает; чётко выраженный минимум наблюдается при  $\gamma \approx \pi$  рад и  $\eta \approx 0,93$ . На рисунке 1г функция  $S_{r, \max}^{(2\omega)}(\gamma, |\eta|)$  убывает быстрее при отстройке от  $|\eta| = 1,09$  в направлении уменьшения  $\eta$  ( $\gamma = \text{const}$ ).

Иллюстрируем изменение формы графиков зависимостей  $S_{r, \max}^{(2\omega)}(|\eta|, \arg \eta)$  при каждом типе анизотропии  $\chi_{1-4}^{(2)}$ , имеющее место при двух значениях угла раскрытия:  $\gamma_1 = 0$  (рисунок 2),  $\gamma_2 = 1,5$  рад (рисунок 3).

На всех фрагментах рисунков 2 и 3 значения функций нормированы по соответствующему каждой функции максимальному значению плотности мощности; легенда идентична изображенной на рисунке 1д.

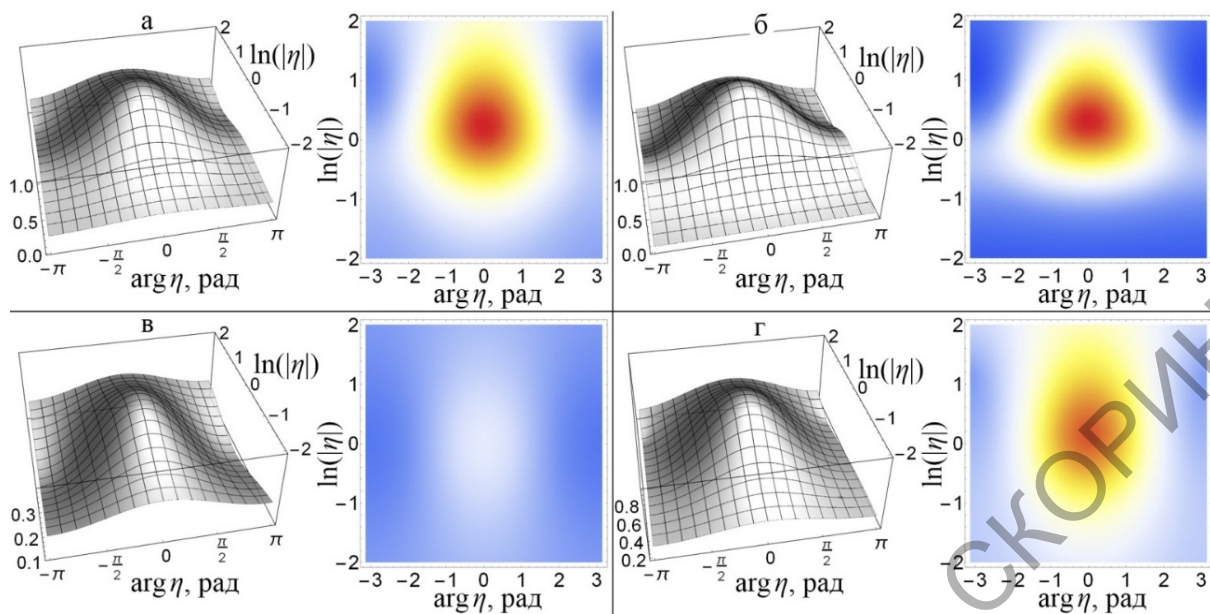


Рисунок 2 – Зависимость максимальной плотности мощности ГВГ-СЧ от отношения комплексных амплитуд при  $\gamma = 0$

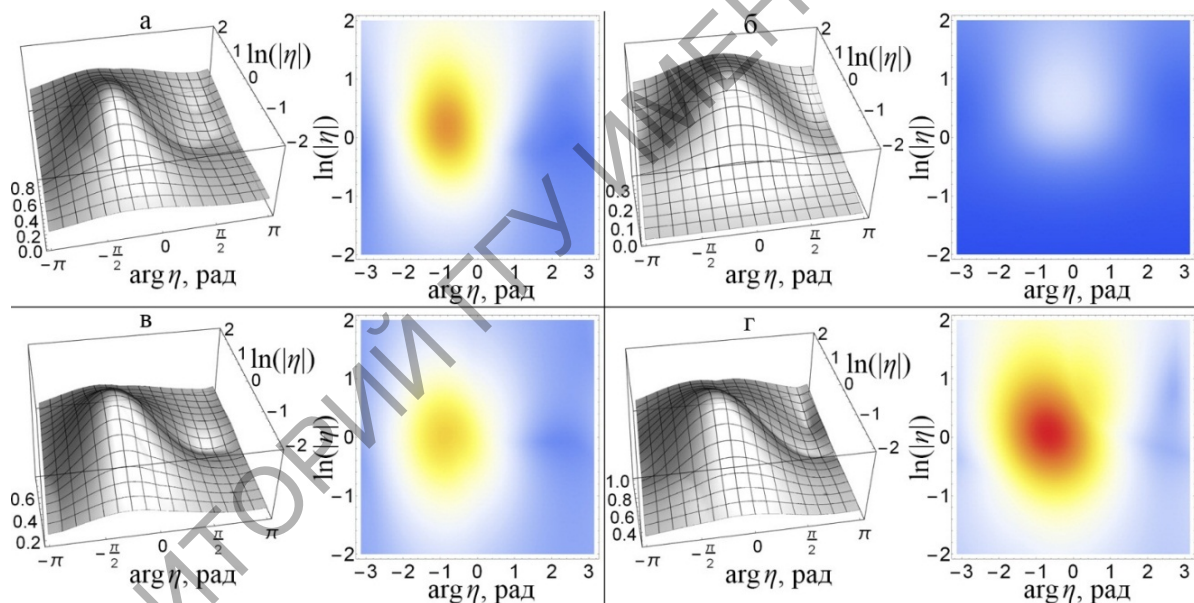


Рисунок 3 – Зависимость максимальной плотности мощности ГВГ-СЧ от отношения комплексных амплитуд при  $\gamma = 1,5$  рад

Положения максимумов и соответствующие им нормированные значения плотности мощности указаны в таблице 1.

Таблица 1 – Положения и значения максимумов ГВГ-СЧ при  $\gamma = \text{const}$

Параметры		Тип анизотропии			
		$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$
$\gamma = 0$	$ \eta $	1,27	1,37	1,00	1,17
	$\arg \eta$ , рад	0	0	0	0
	$S_{norm}^{(2\omega)}$	1,00	1,00	0,39	0,95
$\gamma = 1,5$ рад	$ \eta $	1,22	1,94	1,03	1,09
	$\arg \eta$ , рад	-0,83	-0,21	-0,88	-0,67
	$S_{norm}^{(2\omega)}$	0,86	0,36	0,77	1,00

При использовании излучения сонаправленных источников ( $\gamma = 0$ , рисунок 2) все построенные графики обладают плоскостью симметрии  $S_{r, \max}^{(2\omega)}(|\eta|, -\arg \eta) = S_{r, \max}^{(2\omega)}(|\eta|, \arg \eta)$ , максимумы локализованы в сечении  $\arg \eta = 0$  (строка 2 в таблице 1). Увеличение угла раскрытия (рисунок 3) обуславливает смещение максимумов в область  $\arg \eta < 0$  (строка 5 в таблице 1), при этом значения плотностей мощностей в максимумах при анизотропии, отнесенной к типам  $\chi_1^{(2)}$  и  $\chi_2^{(2)}$ , убывают, но возрастают в двух других случаях ( $\chi_3^{(2)}$  и  $\chi_4^{(2)}$ ), что можно было предположить, анализируя информацию, содержащуюся в таблице 2 (где представлены положения глобальных максимумов), приведенной в части 1 нашего сообщения. Графики функций несимметричны относительно положений максимумов, что явно видно на их 2D иллюстрациях.

### Заключение

Для типов анизотропии  $\chi_{1,2,4}^{(2)}$  явление ГВГ-СЧ предпочтительнее ГВГ [2] при значениях параметров  $\gamma$  и  $\eta$ , соответствующих желтым и красным областям на двухмерных иллюстрациях, т.к. позволяет генерировать излучение большей максимальной мощности. Для слоя с типом анизотропии  $\chi_3^{(2)}$  эти области включают дополнительно белый цвет. Описанный метод позволяет находить диапазон значений параметров  $\gamma$  и  $\eta$ , при которых для получения нелинейного сигнала от поверхности явление ГВГ-СЧ более эффективно, чем явление ГВГ.



Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант по проекту Ф18М-026).

### Литература

1. Толкачёв, А.И. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя при наличии двух источников / А.И. Толкачёв, В.Н. Капшай // Актуальные вопросы физики и техники: Материалы VII Респ. научной конф. студентов, магистрантов и аспирантов. – 2018. – Ч. 1. – С. 287–290.

2. Капшай, В.Н. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя и условия отсутствия генерации / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // Оптика и спектроскопия. – 2017. – Т. 123, № 3. – С. 416–429.

**С.В. Чугунов<sup>1</sup>, А.С. Чугунов<sup>1</sup>, Э.В. Чугунова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Брестский государственный технический университет»,  
Брест, Беларусь

<sup>2</sup>ГУО «Гимназия №4» города Бреста, Беларусь

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОТОННЫХ НАНОПУЧКОВ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ МИКРОРЕЗОНАТОРОВ

### Введение

В настоящее время не снижается интерес к фокусирующим свойствам диэлектрических микросфер и микроцилиндров. В работах теоретического [1-2] и экспериментального характера [3-4] было показано, что диэлектрические сферы и цилиндры, диаметры которых сравнимы с длиной волны видимого света, могут фокусировать пучок света в световое пятно очень малого размера (микролинзовый эффект). В результате фокусировки в ближней зоне теневой области микросферы или микроцилиндра образуется фотонная структура с углом расхождения в несколько раз меньшим, чем в пучке, полученном при фокусировке гауссова пучка классическим методом [5]. Этот расходящийся пучок напоминает струю реактивного двигателя, поэтому излучение, сформированное таким образом, назвали "фотонными нанопучками" или "фотонными нанореактивными пучками".

Во многих публикациях [1-12] рассматриваются различные свойства фотонных пучков, основные условия их существования и пер-

спективы потенциального применения. Исследователями показано, что такие узкие, высокоинтенсивные электромагнитные пучки образуются в результате интерференции между падающей плоской световой волной и полем, рассеянным сферой или цилиндром.

### **1. Теория и основные свойства нанопучков**

Начальная методика описания фотонного нанопучка для диэлектрической сферы была разработана в [12] на основе теории Ми. Основная идея метода, предложенного этими авторами, заключалась в строгом решении уравнений Максвелла в сферических координатах относительно их собственных функций в целях определения ближнего внешнего поля диэлектрической сферы, облученной плоской волной. В рамках этой теории были определены важнейшие характеристики нанопучка, такие как продольный и поперечный размеры нанопучка, его интенсивность, полуширина, расстояние от микросферы (микроцилиндра) до точки, в которой интенсивность максимальна, и многие другие.

В результате экспериментальных и теоретических исследований были установлены следующие основные свойствами фотонных нанопучков. Во-первых, пучок может распространяться практически без затухания на расстояние порядка диаметра микролинзы, а поперечная ширина пучка вне диэлектрического цилиндра или сферы как правило не превышает  $\sim 2\lambda$ . Во-вторых, минимальная полуширина пучка может быть меньше классического дифракционного предела (для микросфер – на уровне  $\sim \lambda/3$ ). В-третьих, образование фотонного нанопучка – нерезонансное явление, которое может наблюдаться при варьировании диаметров  $d$  микролинз в широком диапазоне (от  $\sim 2\lambda$  до более чем  $40\lambda$ ) при условии, что показатель преломления микролинзы относительно окружающей среды менее 2,0. В-четвертых, фотонный нанопучок имеет высокую интенсивность, которая может на несколько порядков превышать интенсивность световой волны, падающей на микролинзу.

Уникальное сочетание вышеперечисленных свойств обуславливает поиски возможных потенциальных применений фотонных пучков. В частности фотонные нанопучки могли бы быть использованы для обнаружения объектов, размеры которых значительно ниже классического дифракционного предела, и оптического манипулирования ими [4]. Таким образом, применительно к объектам, исследуемым во многих важных областях биологии, химии, и нанотехнологии, в видимом

диапазоне длин волн можно было бы контролировать процессы агрегации, а также решать задачи по обнаружению протеинов, вирусов и даже отдельных молекул. Кроме того, фотонные нанопучки могут быть использованы в качестве волноводных структур с малыми потерями, в целях нанолитографии субдифракционного разрешения и для сверхплотной оптической записи в устройствах для хранения информации.

## **2. Моделирование рассеяния света диэлектрическими микрорезонаторами**

В настоящей работе проведено моделирование фотонного нанопучка для волноводной системы, состоящей из трех соприкасающихся диэлектрических микроцилиндров с диаметрами равными 5, 10 и 15 мкм. Значения показателей преломления материала микроцилиндров изменялись от 1,5 до 1,8. Такая структура облучалась плоской линейно поляризованной волной; длина волны изменялась в пределах от 400 до 1000 нм.

Так как аналитические расчеты в соответствии с методом Ми в вычислительном отношении очень громоздки, при моделировании фотонного нанопучка мы применяли численный метод – метод конечных элементов, который успешно реализован в программной среде ComsolMultiphysics, в которой обеспечена возможность варьирования размеров элементов сетки и их количества в целях оптимизации моделирования.

В качестве примера на рисунке 1 представлен результат численного моделирования волновода, состоящего из трех цилиндров диаметром 5 мкм с показателем преломления 1,7, находящегося в вакууме и облучаемого плоской волной с длиной волны 700 нм. На рисунке явно видна система дифракционных максимумов в теневой зоне цилиндра, сформированных вследствие интерференции падающей волны с полем, рассеянным цилиндром.

В результате моделирования были определены зависимости относительной интенсивности (отношение максимальной интенсивности в нанопучке к интенсивности падающей волны) излучения в нанопучке от размеров микроцилиндров, их показателя преломления и длины волны. На рисунке 2 приведена зависимость относительной интенсивности излучения, выходящего из системы трех соприкасающихся микроцилиндров диаметром 15 мкм, от длины волны при различных показателях преломления материала микроцилиндров.

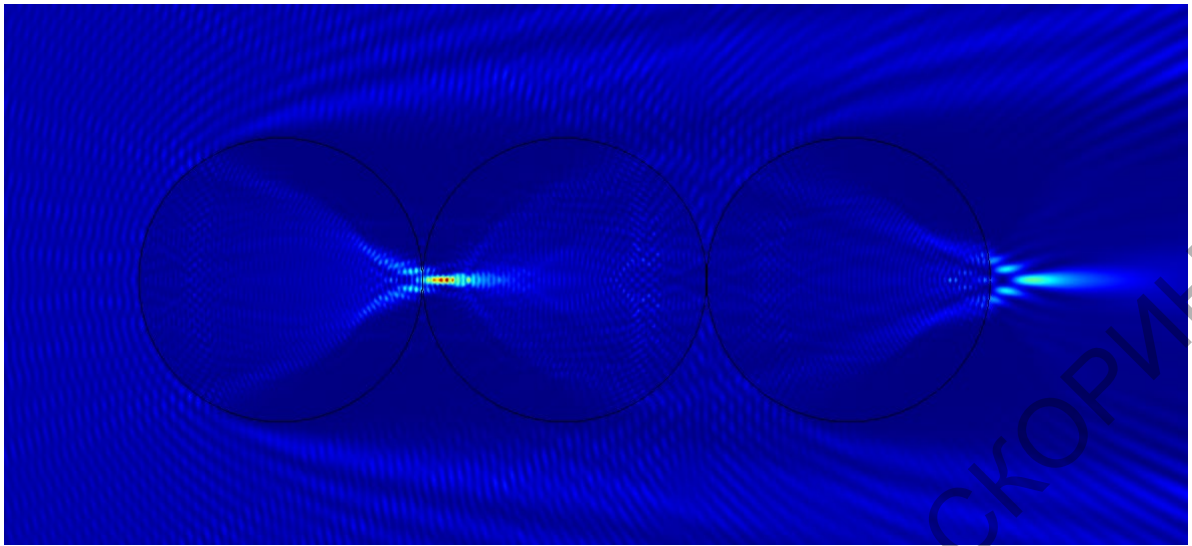


Рисунок 1 – Фотонный нанопучок, сформированный системой трех соприкасающихся микроцилиндров диаметром 5 мкм, изготовленных из материала с показателем преломления 1,7; длина падающей волны равна 700 нм

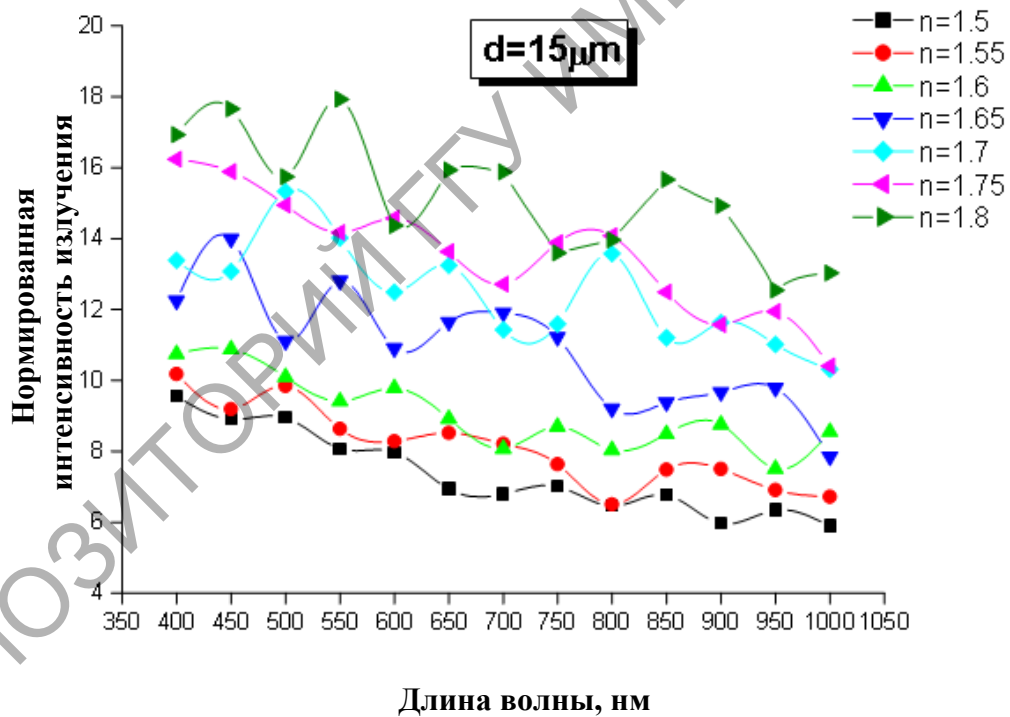


Рисунок 2 – Зависимость нормированной интенсивности излучения, выходящего из системы трех микроцилиндров диаметром 15 мкм, от длины волны при различных показателях преломления материала микроцилиндров

В результате моделирования были установлены следующие закономерности, характерные для нанопучка в таких волноводах: 1) с увеличением показателя преломления материала микроцилиндра область с максимальным значением интенсивности излучения приближается к поверхности микроцилиндра и уменьшается продольный размер нанопучка; 2) значения относительной интенсивности выходящего излучения уменьшаются с увеличением длины волны падающего света; 3) наблюдается увеличение относительной интенсивности для волноводов с большим показателем преломления: при увеличении показателя преломления от 1,5 до 1,8 максимальные значения относительной интенсивности излучения, выходящего из системы одинаковых микроцилиндров с диаметрами 5, 10 и 15 мкм, увеличиваются соответственно в 2,81; 1,91 и 1,88 раза; 4) в системе одинаковых микроцилиндров с диаметрами 15 и 10 мкм по отношению к волноводу, составленному из микроцилиндров диаметром 5 мкм, максимальное значение относительной интенсивности излучения увеличивается соответственно от 1,18 до 1,76 и от 1,01 до 1,47 – при изменении показателя преломления материала микроцилиндров от 1,5 до 1,8.

Результаты моделирования нанопучков соответствуют результатам, полученным с использованием других экспериментальных методик и теоретических моделей [7-12].

### **Заключение**

С учётом выявленных зависимостей можно, не выполняя громоздких аналитических расчетов и не проводя дорогостоящих экспериментов, подобрать такие диаметры преломляющих цилиндров или сфер, их показатели преломления и длины падающего излучения, при которых можно получить нанопучки требуемого дизайна с характеристиками, необходимыми для решения конкретных задач.

Волноводные структуры из оптически связанных микрорезонаторов с фотонными нанопучками перспективны для использования в качестве компактных систем фокусировки в сверхточной лазерной хирургии, при создании новых устройств оптоэлектроники и фотоники на базе микрорезонаторов, а также для продолжения фундаментального исследования систем оптических микрорезонаторов.

## Литература

1. Itagi, A.V. Optics of photonic nanojets / A.V. Itagi, W.A. Challener // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – Vol. 22, № 12. – P. 2847–2858.
2. Lecler, S. Properties of a three-dimensional photonic jet / S. Lecler, Y. Takakura, P. Meyrueis // *Opt. Lett.* – 2005. – Vol. 30, № 19. – P. 2641–2643.
3. Gerlach, M. Nanojets and directional emission in symmetric photonic molecules / M. Gerlach, Y.P. Rakovich, J.F. Donegan // *Opt. Express.* – 2007. – Vol. 15, № 25. – P. 17343–17350.
4. Devilez, A. Spectral analysis of three-dimensional photonic jets / A. Devilez, et al. // *Opt. Express.* – 2008. – Vol. 16. – P. 14200–14212.
5. Gérard, D. Strong electromagnetic confinement near dielectric microspheres to enhance single-molecule fluorescence / D. Gérard, et al. // *Opt. Express.* – 2008. – Vol. 16. – P. 15297–15303.
6. Heifetz, A. Experimental confirmation of backscattering enhancement induced by a photonic jet / A. Heifetz, K. Huang, A. V. Sahakian, X. Li, A. Taflove, V. Backman // *Appl. Phys. Lett.* – 2006. – Vol. 89. – P. 1118–1123.
7. Li, X. Optical analysis of nanoparticles via enhanced backscattering facilitated by 3-D photonic nanojets / X. Li, Z. Chen, A. Taflove, V. Backman // *Optics Express.* – 2005. – Vol. 13. – P. 526–533.
8. Chen, Z. G. Superenhanced backscattering of light by nanoparticles / Z. G. Chen, X. Li, A. Taflove, V. Backman // *Optics Letters.* – 2006. – Vol. 31. – P. 196–198.
9. Kong, S.-C. Robust detection of deeply subwavelength pits in simulated optical data-storage disks using photonic jets / S.-C. Kong, A. V. Sahakian, A. Heifetz, A. Taflove, V. Backman // *Appl. Phys. Lett.* – 2008. – Vol. 92. – P. 211102–211110.
10. Van de Hulst, H.C. *Light Scattering by Small Particles* / H. C. Van de Hulst. – New York: Dover Publications. – New York, 1981. – P. 470.
11. Itagi, A.V. Optics of photonic nanojets / A.V. Itagi, W.A. Challener // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – Vol. 22, № 12. – P. 2847–2858.
12. Lecler, S. Properties of a three-dimensional photonic jet / S. Lecler, Y. Takakura, P. Meyrueis // *Opt. Lett.* – 2005. – Vol. 30, № 19. – P. 2641–2643.

**А.А. Шамына, В.Н. Капшай, А.И. Толкачёв**  
УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **СИММЕТРИИ И СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ-СУММАРНОЙ ЧАСТОТЫ ОПТИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ СЛОЕМ, НАНЕСЁННЫМ НА ПОВЕРХНОСТЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ, ПРИ ЕЁ ОБЛУЧЕНИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ**

### **Введение**

О линейных эффектах, возможных при рассеянии плоских электромагнитных волн на диэлектрических частицах различной формы и размеров написано уже немало работ. Поэтому в настоящее время исследователи всё чаще направляют усилия на изучение нелинейных эффектов в оптике и электродинамике диэлектриков. Одним из таких малоизученных явлений является параметрический эффект, состоящий в нелинейной генерации второй гармоники при прохождении электромагнитного излучения через тонкие оптически нелинейные слои на поверхности частиц и границы раздела сред.

В настоящей работе исследован эффект нелинейной генерации с удвоением частоты при облучении сферической диэлектрической частицы двумя плоскими когерентными электромагнитными волнами одинаковой частоты. В этом случае генерируемое поле представляет суперпозицию электромагнитных полей, обусловленных генерацией второй гармоники (ГВГ) [1] каждой падающей волной и генерацией суммарной частоты (ГСЧ) [2, 3] вследствие параметрического взаимодействия падающих волн между собой. Совокупность этих явлений будем называть генерацией второй гармоники-суммарной частоты (ГВГ-СЧ). В отличие от ГВГ, явление ГВГ-СЧ зависит от большего количества варьируемых параметров, чем обусловлена возможность для извлечения большего объема информации об исследуемом объекте из экспериментальных данных. Заметим также, что для проведения эксперимента не требуется источников с разными частотами, как при наблюдении явления ГСЧ.

## 1. Постановка задачи

Зададим в комплексной форме векторы электрической напряжённости падающих на сферическую диэлектрическую частицу плоских эллиптически поляризованных электромагнитных волн:

$$\mathbf{E}^{(\alpha)} = E_{\alpha} \mathbf{e}^{(\alpha)} \exp(i\mathbf{k}^{(\alpha)} \mathbf{r} - i\omega t), \quad (1)$$

где  $E_{\alpha}$  – комплексная амплитуда,  $\mathbf{e}^{(\alpha)}$  – единичный вектор, характеризующий поляризацию падающего излучения,  $\mathbf{k}^{(\alpha)}$  – волновой вектор,  $\omega$  – циклическая частота падающих волн (далее по тексту временную часть  $\exp(-i\omega t)$  будем опускать),  $\alpha$  – индекс, определяющий номер волны, к которой относится соответствующая величина. Здесь и далее в этой работе  $\alpha = 1, 2$ , а символ  $i$  вне индексов означает мнимую единицу.

Для упрощения математической модели рассматриваемого явления воспользуемся приближением, основанным на обобщённой модели Рэлея – Ганса – Дебая [4], в которой амплитуду рассеянных волн считают пренебрежимо малой. При этом условия нелинейная генерация индуцирована исключительно падающими электромагнитными волнами. Математически она описывается с применением метода функции Грина, и в качестве источников рассматривается нелинейная часть поляризации диполей на поверхности частицы [5]:

$$P_i^{(2)} = \chi_{ijk}^{(2)} (E_j^{(1)} + E_j^{(2)}) (E_k^{(1)} + E_k^{(2)}) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \chi_{ijk}^{(2)} E_j^{(\alpha)} E_k^{(\beta)}, \quad i, j, k = x, y, z, \quad (2)$$

где суммирование производится по повторяющимся латинским индексам,  $P_i^{(2)}$  – компоненты нелинейной части вектора поляризации,  $E_j^{(1)}, E_j^{(2)}$  – компоненты векторов напряжённости падающих волн,  $\chi_{ijk}^{(2)}$  – тензор нелинейной диэлектрической восприимчивости второго порядка.

Тензор  $\chi_{ijk}^{(2)}$  одинаково записывается для ГВГ и ГВГ-СЧ элементарным участком поверхности:

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_1^{(2)} n_i n_j n_k + \chi_2^{(2)} n_i \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} (n_j \delta_{ki} + n_k \delta_{ij}) + \chi_4^{(2)} n_m (n_k \varepsilon_{ijm} - n_j \varepsilon_{imk}), \quad (3)$$

где  $n_i$  – компоненты вектора нормали к поверхности,  $\delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  – дельта-символ Кронекера и символ Леви-Чивита соответственно, коэффициенты  $\chi_{1-3}^{(2)}$  и  $\chi_4^{(2)}$  – некиральные и киральный коэффициенты анизотропии, характеризующие нелинейные свойства поверхностного слоя сферической частицы.

Введём декартову систему координат, базисные векторы которой  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  образуют правую тройку векторов. Начало координат сов-



местим с геометрическим центром сферической частицы. Оси декартовой системы координат выберем таким образом, чтобы волновые векторы падающих волн  $\mathbf{k}^{(1)}$  и  $\mathbf{k}^{(2)}$  находились в плоскости  $Oyz$ , а ось  $Oz$  направим вдоль вектора, равного их сумме. Тогда выражения для вектора электрической напряжённости генерируемого поля  $\mathbf{E}^{(2\omega)}$  и плотности мощности  $S_r^{(2\omega)}$  генерируемого излучения в точке  $\mathbf{x}$  в дальней зоне [5], можно записать в виде

$$\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = 4\pi\mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2 \exp(ik_{2\omega}r)}{c^2 r} d_0 a^2 (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 E_\alpha E_\beta \mathbf{f}^{(\alpha\beta)}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(\alpha\beta)} = & i\chi_1^{(2)} \left( -j_3(q^{(\alpha\beta)} a) \mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{5} (j_1(q^{(\alpha\beta)} a) + j_3(q^{(\alpha\beta)} a)) (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{e}^{(\alpha)} \mathbf{e}^{(\beta)}) + \mathbf{e}^{(\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) + \mathbf{e}^{(\alpha)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)})) \right) + \\ & + ij_1(q^{(\alpha\beta)} a) (\chi_2^{(2)} \mathbf{v}^{(\alpha\beta)} (\mathbf{e}^{(\alpha)} \mathbf{e}^{(\beta)}) + \chi_3^{(2)} \mathbf{e}^{(\beta)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)}) + \chi_3^{(2)} \mathbf{e}^{(\alpha)} (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)})) - \\ & - \chi_4^{(2)} j_2(q^{(\alpha\beta)} a) ([\mathbf{e}^{(\alpha)} \times \mathbf{v}^{(\alpha\beta)}] (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\beta)}) + [\mathbf{e}^{(\beta)} \times \mathbf{v}^{(\alpha\beta)}] (\mathbf{v}^{(\alpha\beta)} \mathbf{e}^{(\alpha)})), \end{aligned} \quad (5)$$

$$S_r^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \frac{c}{8\pi} \frac{n_{2\omega}}{\mu_{2\omega}} |\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x})|^2. \quad (6)$$

Здесь  $\mu_{2\omega}$ ,  $n_{2\omega}$  – соответственно магнитная проницаемость и показатель преломления окружающей среды на частоте  $2\omega$ ;  $d_0$  – толщина поверхностного слоя, обладающего нелинейными оптическими свойствами;  $a$  – радиус сферической частицы;  $\mathbf{e}_r$  – один из базисных векторов  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$ , у которой начало координатных осей совпадает с центром сферической частицы,  $j_m(z)$  – сферическая функция Бесселя порядка  $m$ . Конструкции  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ,  $(\mathbf{a}\mathbf{b})$ ,  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$  означают соответственно математические операции тензорного, скалярного и векторного произведения;  $q^{(\alpha\beta)}$  – модуль вектора рассеяния  $\mathbf{q}^{(\alpha\beta)}$ , направленного вдоль единичного вектора  $\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}$  и определяемого по формуле

$$\mathbf{q}^{(\alpha\beta)} = \mathbf{k}^{(\alpha)} + \mathbf{k}^{(\beta)} - \mathbf{k}^{(2\omega)} = \mathbf{v}^{(\alpha\beta)} q^{(\alpha\beta)}, \quad \alpha = 1, 2, \beta = 1, 2, \quad (7)$$

где  $\mathbf{k}^{(2\omega)} = k^{(2\omega)} \mathbf{e}_r$  – волновой вектор генерируемого излучения в дальней зоне.

Требуется проанализировать свойства пространственного распределения электромагнитного поля, генерируемого при прохождении плоской электромагнитной волны через тонкий оптически нелинейный слой на поверхности сферической частицы, в дальней зоне.

## 2. Решение

Зададим явный вид векторов, соответствующих поставленной задаче:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(\alpha)} &= k_\omega \left( (-1)^\alpha \sin(\gamma/2) \mathbf{e}_y + \cos(\gamma/2) \mathbf{e}_z \right), \\ \mathbf{e}^{(\alpha)} &= \left[ (\cos \varphi_{in}^{(\alpha)} - i \sigma_\alpha \sin \varphi_{in}^{(\alpha)}) \mathbf{e}_x + \cos(\gamma/2) (i \sigma_\alpha \cos \varphi_{in}^{(\alpha)} + \sin \varphi_{in}^{(\alpha)}) \mathbf{e}_y + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{1+\alpha} \sin(\gamma/2) (i \sigma_\alpha \cos \varphi_{in}^{(\alpha)} + \sin \varphi_{in}^{(\alpha)}) \mathbf{e}_z \right] (1 + \sigma_\alpha^2)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $k_\omega = |\mathbf{k}^{(\alpha)}|$  – модуль волновых векторов падающих волн;  $\gamma$  – угол между волновыми векторами  $\mathbf{k}^{(1)}$  и  $\mathbf{k}^{(2)}$ ;  $-\pi < \varphi_{in}^{(\alpha)} \leq \pi$  – угол между большой полуосью эллипса поляризации волны  $\alpha$  и вектором  $\mathbf{e}_x$ ; величина  $-1 \leq \sigma_\alpha \leq 1$  по модулю равна отношению малой полуоси эллипса поляризации к большой полуоси, а  $|\sigma_\alpha|$  характеризует степень эллиптичности ( $\sigma_\alpha < 0$  /  $\sigma_\alpha > 0$  задают волну левой/правой поляризации).

При некоторых комбинациях параметров (направлений наблюдения, направлений волновых векторов падающих волн и эллиптичностей их поляризации) пространственному распределению генерируемого излучения свойственны определённые элементы симметрии. Такие элементы симметрии можно выявить, анализируя математические свойства векторной функции  $\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)$ . Подобные свойства векторных функций, характеризующих пространственное распределение генерируемого излучения при нелинейной генерации плоской электромагнитной волной в тонком оптически нелинейном слое на поверхности цилиндрических и сферических частиц, рассмотрены в статьях [1-3, 6]. Сформулируем и поясним наиболее важные из свойств функции  $\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)$ , используя обозначения:  $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $\eta = E_2 / E_1$ , символом \* обозначим операцию комплексного сопряжения.

*Свойство 1.* Если  $\text{Im}[\eta] = 0$ ,  $\varphi_{in}^{(1)} = \pi m_1 / 2$ ,  $\varphi_{in}^{(2)} = \pi m_1 / 2 + \pi m_2$ , то

$$\begin{aligned} i(1 - (1-i)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \pi - \varphi) &= [i(1 - (1-i)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)]^*, \\ i(1 - (1-i)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \mathbf{f}^{(2\omega)}(-\theta, \varphi) &= [i(1 - (1-i)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, -\varphi)]^*, \\ S_r^{(2\omega)}(\theta, \pi - \varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

*Свойство 2.* Если  $|\eta| = 1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\varphi_{in}^{(1)} + \varphi_{in}^{(2)} = \pi m_1$ , то

$$\begin{aligned} i(1 - (1-i)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) / \eta &= [i(1 - (1-i)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi) / \eta]^*, \\ S_r^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

*Свойство 3.* Если  $\eta = \pm 1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\varphi_{in}^{(1)} - \varphi_{in}^{(2)} = \pi m_1$ , то

$$\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi) = \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi), \quad S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi) = S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \quad (11)$$

*Свойство 4.* Если  $\chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \pi - \varphi) &= (1 - 2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi), \\ \mathbf{f}^{(2\omega)}(-\theta, \varphi) &= (1 - 2\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, -\varphi), \\ S_r^{(2\omega)}(\theta, \pi - \varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi), \quad S_r^{(2\omega)}(-\theta, \varphi) = S_r^{(2\omega)}(\theta, -\varphi). \end{aligned} \quad (12)$$

*Свойство 5.* Если  $\chi_4^{(2)} = 0$ ,  $\eta = \pm 1$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ ,  $\varphi_{in}^{(1)} + \varphi_{in}^{(2)} = \pi m_1$ , то

$$\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) = (1 - 2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi), \quad S_r^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) = S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \quad (13)$$

*Свойство 6.* Если  $\chi_4^{(2)} = 0$ ,  $|\eta| = 1$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ ,  $\varphi_{in}^{(1)} - \varphi_{in}^{(2)} = \pi m_1$ , то

$$\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi) / \eta = -[\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi) / \eta]^*, \quad S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi) = S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \quad (14)$$

*Свойство 7.* Если  $\chi_{1-3}^{(2)} = 0$ ,  $|\eta| = 1$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ ,  $\varphi_{in}^{(1)} - \varphi_{in}^{(2)} = \pi m_1$ , то

$$\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi) / \eta = [\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi) / \eta]^*, \quad S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi) = S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \quad (15)$$

*Свойство 8.* Если  $\chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$ ,  $\eta = \pm 1$ ,  $\sigma_1 = (-1)^m \sigma_2$ , то

$$\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) = (1 - 2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi), \quad S_r^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) = S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \quad (16)$$

Для пространственного распределения плотности мощности генерируемого излучения наличие этих свойств связано с характерными для этого распределения элементами симметрии:

- свойства 1, 4 имеют место при наличии зеркальной плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью  $Oyz$ ;
- свойства 2, 5, 8 проявляются при наличии зеркальной плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью  $Oxz$ ;
- свойства 3, 6, 7 характерны для объектов, обладающих поворотной осью симметрии второго порядка, проходящей через ось  $Oz$ .

Все описанные элементы симметрии можно выявить на диаграммах направленности генерируемого излучения, характеризующих пространственное распределение плотности мощности поля ГВГ-СЧ в дальней зоне.

## Заключение

Таким образом, в результате анализа решения задачи о генерации второй гармоники-суммарной частоты показано, что у математических функций, характеризующих пространственное распределение мощности генерируемого излучения имеется ряд математических свойств, связанных с наличием определенных элементов симметрии у диаграммы направленности, соответствующей ГВГ-СЧ в выбранных условиях. Среди обнаруженных элементов симметрий можно указать две зеркальные плоскости симметрии, перпендикулярные между собой, и поворотную ось симметрии второго порядка.

В эксперименте полученные свойства симметрии могут быть полезны при определении преобладающего вклада отдельных элементов  $\chi_{1-4}^{(4)}$  тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости второго порядка  $\chi_{ijk}^{(2)}$  в генерацию, а также при проверке правильности полученных в эксперименте значений независимых элементов тензора  $\chi_{ijk}^{(2)}$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант по проекту Ф18М-026).

## Литература

1. Капшай, В.Н. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя и условия отсутствия генерации / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // Оптика и спектроскопия. – 2017. – Т. 123, № 3. – С. 416–429.
2. Капшай, В.Н. Генерация суммарной частоты от тонкого сферического слоя. I. Аналитическое решение / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // Оптика и спектроскопия. – 2018. – Т. 124, № 6. – С. 795–803.
3. Шамына, А.А. Генерация суммарной частоты от тонкого сферического слоя. II. Анализ решения / А.А. Шамына, В.Н. Капшай // Оптика и спектроскопия. – 2018. – Т. 125, № 1. – С. 74–81.
4. Viarbitskaya, S. Size dependence of second-harmonic generation at the surface of microspheres / S. Viarbitskaya, V. Kapshai, P. van der Meulen, and T. Hansson // Phys. Rev. A. – 2010. – № 81. – P. 053850.
5. Толкачёв, А.И. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя при наличии двух источников / А.И. Толкачёв, В.Н. Капшай // Актуальные вопросы физики и техники: материалы VII Респ. научной конф. студентов, магистрантов и аспирантов. – 2018. – Ч. 1. – С. 287–290.

6. Шамына, А.А. Генерация суммарной частоты от тонкого цилиндрического слоя / А.А. Шамына, В.Н. Капшай // Оптика и спектроскопия. – 2018. – Т. 124, № 1. – С. 105–121.

**А.А. Шамына**

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

**ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В ТОНКОМ ОПТИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ, НАНЕСЁННОМ НА ПОВЕРХНОСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ, ИМЕЮЩЕЙ ФОРМУ ВЫТЯНУТОГО ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ, ПРИ ЕЁ ОБЛУЧЕНИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ**

**Введение**

Нелинейная генерация оптического излучения поверхностным слоем малой частицы вызывает особый интерес, так как она может быть использована для исследования свойств поверхностей таких частиц [1] и свойств адсорбированных молекул (ориентации, тензора гиперполяризуемости, динамических свойств). Возможность этого явления обусловлена избирательностью нелинейных эффектов: генерация излучения кратных частот, обусловленная нелинейными эффектами чётного порядка, в диэлектриках может происходить только на двумерных объектах, таких как поверхности частиц, тонкие плёнки, границы раздела сред – их структуре не свойственна центральная симметрия, и часто они анизотропны.

Так как частицы строго симметричной формы не всегда можно получить практически, и в некоторых случаях под влиянием внешних воздействий форма частицы может меняться, то возникает необходимость изучения генерации второй гармоники (ГВГ) в поверхностном слое частиц, форма которых сложнее сферической. В нашей работе рассмотрена ГВГ в тонком оптически нелинейном слое на поверхности частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения.

**1. Постановка задачи**

Введём декартову  $(x, y, z)$  и сферическую  $(r, \theta, \varphi)$  системы координат, у которых начала отсчёта и оси  $Oz$  совпадают. Пусть  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  – базисные векторы декартовой системы координат,

а  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  – базисные векторы сферической системы координат. Не нарушая общности, расположим диэлектрическую частицу в форме вытянутого эллипсоида вращения таким образом, чтобы её геометрический центр совпадал с началом координат, а её ось симметрии была совмещена с осью  $Oz$ .

Зададим уравнение падающей на частицу плоской эллиптически поляризованной электромагнитной волны в комплексном виде следующей формулой:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E_0 \mathbf{e}^{(\omega)} \exp(i\mathbf{k}^{(\omega)} \mathbf{x} - i\omega t), \quad (1)$$

где  $E_0$  – комплексная амплитуда падающей волны,  $\mathbf{e}^{(\omega)}$  – единичный вектор поляризации,  $\mathbf{k}^{(\omega)}$  – волновой вектор,  $\omega$  – циклическая частота (далее в тексте временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  опускается). Здесь и далее символ  $i$  вне индексов означает мнимую единицу.

Пусть толщина тонкого слоя, локализованного на поверхности частицы и обладающего нелинейными оптическими свойствами, равна  $d_0$ . Условие малости толщины запишем в виде  $d_0 \ll a_x, d_0 \ll a_z$ , где  $a_x$  и  $a_z$  – соответственно длина малой и большой полуосей эллипсоида вращения, совпадающего по форме с поверхностью частицы (рисунок 1).

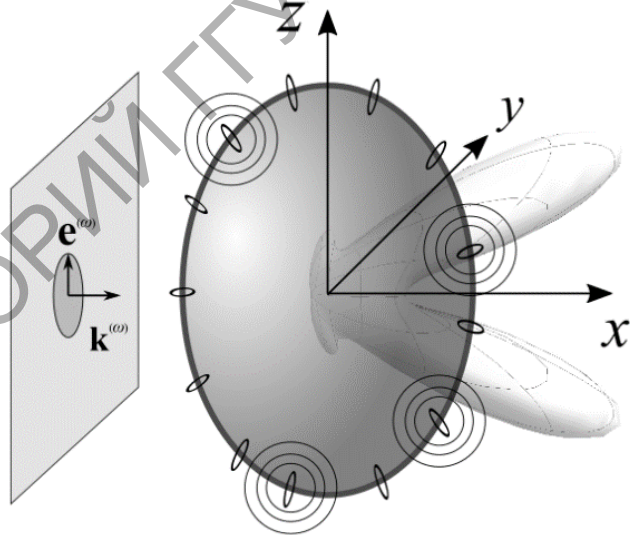


Рисунок 1 – Геометрическая схема задачи о генерации второй гармоники в тонком оптически нелинейном слое на поверхности частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения

Найдём пространственное распределение поля второй гармоники в дальней зоне и выявим его характерные особенности.

## 2. Решение

В дипольной модели ГВГ принято, что этот эффект обусловлен нелинейной частью поляризации, задаваемой вектором  $\mathbf{P}^{(2)}$  [1], компоненты которого можно найти по формуле (с использованием правила суммирования по повторяющимся индексам)

$$P_i^{(2)} = \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k, \quad (2)$$

где  $E_j$  – компоненты вектора электрической напряжённости падающей волны, а  $\chi_{ijk}^{(2)}$  – тензор нелинейной диэлектрической восприимчивости:

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_1^{(2)} n_i n_j n_k + \chi_2^{(2)} n_i \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} (n_j \delta_{ki} + n_k \delta_{ij}) + \chi_4^{(2)} n_m (n_k \varepsilon_{ijm} - n_j \varepsilon_{imk}). \quad (3)$$

Здесь  $n_i$  – компоненты вектора нормали к элементу поверхности,  $\delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  – дельта-символ Кронекера и символ Леви-Чивита соответственно,  $\chi_{1-4}^{(2)}$  – коэффициенты анизотропии, характеризующие анизотропные оптические свойства нелинейного слоя [1, 3]. Количество независимых элементов тензора  $\chi_{ijk}^{(2)}$  меньше числа, которым определяется количество независимых элементов тензора  $\chi_{ijk}^{(2)}$ , характерное для среды, в которой возможна генерация суммарной частоты [4], – из-за необходимости наличия симметрии по отношению к перестановке последних двух индексов. Выражение (2) является правильным только в приближении Рэлея – Ганса – Дебая, когда влиянием рассеянных электромагнитных волн в решаемой задаче можно пренебречь. Это приближение можно использовать, если числовые значения показателей преломления частицы и окружающей её среды близки.

Напряжённость поля второй гармоники и модуль вектора Умова – Пойнтинга в дальней зоне, в соответствии с [1], можно найти по формулам

$$\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2 \exp(ik_{2\omega} r)}{c^2 r} \int_V \exp(-i\mathbf{k}^{(2\omega)} \mathbf{x}') \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (4)$$

$$S_r^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \frac{c}{8\pi} \frac{n_{2\omega}}{\mu_{2\omega}} |\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x})|^2, \quad (5)$$

где интегрирование ведётся по всему объёму  $V$  нелинейного слоя,  $\mu_{2\omega}$ ,  $n_{2\omega}$  – соответственно магнитная проницаемость и показатель преломления окружающей частицу среды по отношению к излучению частоты  $2\omega$ ,  $\mathbf{k}^{(2\omega)} = k^{(2\omega)} \mathbf{e}_r$  – волновой вектор генерируемой волны, а  $k^{(2\omega)}$  – его модуль,  $r = |\mathbf{x}|$  – расстояние от центра частицы до точки

наблюдения; символом  $\otimes$  обозначена операция тензорного произведения.

Подставляя (1)–(3) в (4), можно получить следующую формулу для составляющих вектора напряжённости генерируемого поля:

$$E_i^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \frac{\exp(ik_{2\omega}r)}{r} d_0 (\delta_{im} - e_{r,i} e_{r,m}) e_j^{(\omega)} e_k^{(\omega)} \int_S \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}') \chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{x}') dS, \quad (6)$$

где интегрирование ведётся по площади поверхности эллипсоида вращения, а  $\mathbf{q} = 2\mathbf{k}^{(\omega)} - \mathbf{k}^{(2\omega)}$  – вектор рассеяния.

Записывая подробнее интеграл по площади, содержащийся в (6), можно разделить интегрирование по углам  $\theta$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} I(n_i) &= \frac{1}{a_x} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iq_x a_x \sin \theta \cos \varphi + iq_y a_x \sin \theta \sin \varphi + iq_z a_z \cos \theta) \times \\ &\times \sin \theta \sqrt{a_z^2 \sin^2 \theta + a_x^2 \cos^2 \theta} n_i(\theta, \varphi) d\varphi d\theta, \\ I(n_i n_j) &= \frac{1}{a_x} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iq_x a_x \sin \theta \cos \varphi + iq_y a_x \sin \theta \sin \varphi + iq_z a_z \cos \theta) \times \\ &\times \sin \theta \sqrt{a_z^2 \sin^2 \theta + a_x^2 \cos^2 \theta} n_i(\theta, \varphi) n_j(\theta, \varphi) d\varphi d\theta, \\ I(n_i n_j n_k) &= \frac{1}{a_x} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iq_x a_x \sin \theta \cos \varphi + iq_y a_x \sin \theta \sin \varphi + iq_z a_z \cos \theta) \times \\ &\times \sin \theta \sqrt{a_z^2 \sin^2 \theta + a_x^2 \cos^2 \theta} n_i(\theta, \varphi) n_j(\theta, \varphi) n_k(\theta, \varphi) d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

где индексы  $i, j, k$  могут принимать значения  $x, y, z$ ;  $q_i$  – компоненты вектора рассеяния  $\mathbf{q}$ . Компоненты вектора  $\mathbf{n}$  можно выделить из формулы для вектора нормали:

$$\mathbf{n}(\theta, \varphi) = \frac{a_z \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + a_z \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + a_x \cos \theta \mathbf{e}_z}{\sqrt{a_z^2 \sin^2 \theta + a_x^2 \cos^2 \theta}}. \quad (8)$$

Явный вид интегралов (7) можно выразить через функцию

$$\begin{aligned} M_{s,c,q}(z_1, z_2, \rho) &= \frac{z_2^{2\{q/2\}}}{z_1^{q/2+\{q/2\}}} \frac{4\pi i^{2\{q/2\}}}{i^c \rho^{s+c+q-1}} \times \\ &\times \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{s/2} \sum_{k=0}^{s/2-m} \sum_{l=0}^{2m+c} \frac{(-1)^{k+l+g} (q + 2\{q/2\} + 2n + 2g + 2k - 1)!!}{(2g + 2\{q/2\})!} \times \\ &\times (q/2 + \{q/2\} + n + g + k)_l \binom{-(c+q-1)/2 - s/2}{n} \binom{s/2}{m, k, s/2 - m - k} \times \\ &\times \binom{2m+c}{l} \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right)^n j_{q/2+\{q/2\}+n+g+k}^{(2m+c-l)}(z_1) z_1^{-(n+g+k+l)} z_2^{2g}. \end{aligned} \quad (9)$$



где  $j_m^{(p)}(z)$  –  $p$ -ая производная от сферической функции Бесселя  $m$ -го порядка,  $\binom{n}{k}$  – символ Похгаммера; конструкциями  $\binom{n}{k}$  и  $\binom{n}{k_1, k_2, k_3}$  обозначены биномиальный и мультиномиальный коэффициенты;  $\{n\}$  – дробная часть числа  $n$ . Ряды в (9) сходятся только при  $\rho^2 > 1/2$ .

Тогда явный вид интегралов (7) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 I\left(\binom{n_z}{z}\right) &= M_{0,0,m}(q_x a_x, q_z a_z, \rho), & m &= 1, 2, 3; \\
 I\left(\binom{n_z}{z} n_i\right) &= \rho M_{0,1,m}(q_x a_x, q_z a_z, \rho) v_i, & m &= 0, 1, 2; \quad i = x, y; \\
 I\left(\binom{n_z}{z} n_i n_j\right) &= \rho^2 \left( (M_{0,2,m}(q_x a_x, q_z a_z, \rho) - M_{2,0,m}(q_x a_x, q_z a_z, \rho)) v_i v_j \right) + \\
 &+ \rho^2 M_{2,0,m}(q_x a_x, q_z a_z, \rho) \delta_{ij}, & m &= 0, 1; \quad i, j = x, y; \\
 I(n_i n_j n_k) &= \rho^3 \left( (M_{0,3,0}(q_x a_x, q_z a_z, \rho) - 3M_{2,1,0}(q_x a_x, q_z a_z, \rho)) v_i v_j v_k \right) + \\
 &+ \rho^3 M_{2,1,0}(q_x a_x, q_z a_z, \rho) (v_i \delta_{jk} + v_j \delta_{ki} + v_k \delta_{ij}), & i, j, k &= x, y,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где  $v_i$  – компоненты единичного вектора, параллельного вектору рассеяния ( $\mathbf{v} = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$ ),  $\rho = a_z/a_x$  – отношение длин большой и малой полуосей эллипсоида.

Учитывая явный вид интегралов (10), можно записать выражение для вектора электрической напряжённости поля второй гармоники:

$$E_i^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2 \exp(ik_{2\omega} r)}{c^2 r} d_0 a_x^2 (\delta_{im} - e_{r,i} e_{r,m}) e_j^{(\omega)} e_k^{(\omega)} X_{ijk}^{(2\omega)}, \tag{11}$$

где  $X_{ijk}^{(2\omega)}$  – тензор эффективной нелинейной диэлектрической восприимчивости [1-6], который можно найти по формуле

$$\begin{aligned}
 X_{ijk}^{(2\omega)} &= \chi_1^{(2)} I(n_i n_j n_k) + \chi_2^{(2)} I(n_i) \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} (I(n_j) \delta_{ki} + I(n_k) \delta_{ij}) \\
 &+ \chi_4^{(2)} (I(n_m n_k) \varepsilon_{ijm} - I(n_m n_j) \varepsilon_{imk}).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Вектор, компоненты которого равны  $e_j^{(\omega)} e_k^{(\omega)} X_{ijk}^{(2\omega)}$ , характеризует пространственное распределение поля второй гармоники в дальней зоне.

### Заключение

В тензорном виде получена формула для расчёта в дальней зоне составляющих электрической напряжённости поля второй гармоники, генерируемого в тонком оптически нелинейном слое на поверхности

частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения. На основе этой формулы для генерируемого излучения могут быть найдены плотность мощности, степень поляризации, ориентация эллипса поляризации.

Результаты, полученные в статье, могут быть полезны при постановке эксперимента с регистрацией излучения второй гармоники, генерируемого в тонком оптически нелинейном слое на поверхности деформированных сферических частиц, а также при решении задач о генерации суммарной частоты и о генерации второй гармоники-суммарной частоты в тонком оптически нелинейном слое на поверхности частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант по проекту Ф18М-026).

### Литература

1. Viarbitskaya, S. Size dependence of second-harmonic generation at the surface of microspheres / S. Viarbitskaya, V. Kapshai, P. van der Meulen, and T. Hansson // *Phys. Rev. A.* – 2010. – № 81. – P. 053850.

2. Капшай, В.Н. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя и условия отсутствия генерации / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // *Оптика и спектроскопия.* – 2017. – Т. 123, № 3. – С. 416–429.

3. Толкачёв, А.И. Генерация второй гармоники от тонкого сферического слоя при наличии двух источников / А.И. Толкачёв, В.Н. Капшай // *Актуальные вопросы физики и техники: материалы VII Респ. научной конф. студентов, магистрантов и аспирантов.* – 2018. – Ч. 1. – С. 287–290.

4. Шамына, А.А. Генерация суммарной частоты от тонкого цилиндрического слоя / А.А. Шамына, В.Н. Капшай // *Оптика и спектроскопия.* – 2018. – Т. 124, № 1. – С. 105–121.

5. Капшай, В.Н. Генерация суммарной частоты от тонкого сферического слоя. I. Аналитическое решение / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // *Оптика и спектроскопия.* – 2018. – Т. 124, № 6. – С. 795–803.

6. Шамына, А.А. Генерация суммарной частоты от тонкого сферического слоя. II. Анализ решения / А.А. Шамына, В.Н. Капшай // *Оптика и спектроскопия.* – 2018. – Т. 125, № 1. – С. 74–81.

**П.С. Шаповалов**

УО «Гомельский государственный технический университет  
имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

## **ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ КРИСТАЛЛАХ**

При обработке и передаче информации одновременно распространяется несколько мощных лазерных пучков, способных инициировать нелинейные эффекты. Результаты их изучения описаны в ряде работ (см., например, [1-4] и цитированную там литературу), в которых акцентированы различные аспекты взаимодействия световых пучков с кристаллами. Так, в статье [1, с. 97] исследовалось взаимодействие двух соосных ортогонально поляризованных гауссовых пучков света в кубически нелинейной среде. Рассматриваемая там задача сведена вариационным методом к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, анализ которых произведен численно. В работе [2, с. 549] изучалось взаимодействие параллельных световых пучков. При этом для соосных пучков выполнено аналитическое исследование, но проблема сведена к задаче о распространении одинаковых пучков, что не представляется интересным, так как в данном случае не наблюдаются новые явления по сравнению с распространением одиночного пучка. В настоящей работе исследуется взаимодействие двух взаимно некогерентных гауссовых пучков света разной мощности, распространяющихся в нелинейной среде, которой свойственна квадратичная неоднородность.

При описании взаимодействия световых пучков будем исходить из системы нелинейных параболических уравнений [2], записанных в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - 2ik_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} - k_1^2 \alpha (x^2 + y^2) U_1 + k_1^2 \beta (|U_1|^2 + 2|U_2|^2) U_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - 2ik_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} - k_2^2 \alpha (x^2 + y^2) U_2 + k_2^2 \beta (|U_2|^2 + 2|U_1|^2) U_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь для  $j$ -го пучка ( $j=1, 2$ )  $U_j$  – комплексная амплитуда электромагнитного поля на частоте  $\omega_j$ ;  $k_j = \sqrt{\varepsilon_j} \omega_j$  – волновое число;  $\varepsilon_j, \alpha$  и  $\beta$  – соответственно линейная диэлектрическая проницаемость, коэффициент квадратичной неоднородности и коэффициент нелинейности среды. Система уравнений (1) описывает взаимодействие лазерных

пучков в диапазоне частот, в котором временная дисперсия среды пренебрежимо мала.

Решение системы уравнений (1) проведем вариационным методом [3, с. 87], [4, с. 115] в классе круговых гауссовых функций [5, с. 27]:

$$U_i = \sqrt{I_i} \exp \left\{ -P_i - iQ_i - \frac{x^2}{w_{xi}^2} - \frac{y^2}{w_{yi}^2} - \frac{ik_i x^2}{2R_{xi}} - \frac{ik_i y^2}{2R_{yi}} \right\}, \quad (3)$$

где  $i=1, 2$ ;  $I_i$  – интенсивность света на оси  $i$ -го пучка;  $w_{xi}, w_{yi}$  – полуоси эллипса, ограничивающего световое пятно,  $R_{xi}, R_{yi}$  – радиусы кривизны фазовой поверхности.

Подставим (3) в (2) и проинтегрируем полученные при этом выражения по координатам  $x$  и  $y$ . Воспользовавшись далее условием экстремальности функционала, т.е. приравняв нулю его вариацию ( $\delta J=0$ ), получим систему двенадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно параметров обоих пучков. Из этой системы можно выделить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую параметры пучков:

$$\begin{aligned} w_{x1}^3 \frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial z^2} &= \frac{4}{k_1^2} - 4\mu_1 \frac{w_{x1}}{w_{y1}} - \alpha w_{x1}^4 - \frac{32\mu_2 w_{x1}^4}{\sqrt{(w_{x1}^2 + w_{x2}^2)^3 (w_{y1}^2 + w_{y2}^2)}}, \\ w_{y1}^3 \frac{\partial^2 w_{y1}}{\partial z^2} &= \frac{4}{k_1^2} - 4\mu_1 \frac{w_{y1}}{w_{x1}} - \alpha w_{y1}^4 - \frac{32\mu_2 w_{y1}^4}{\sqrt{(w_{x1}^2 + w_{x2}^2) (w_{y1}^2 + w_{y2}^2)^3}}, \\ w_{x2}^3 \frac{\partial^2 w_{x2}}{\partial z^2} &= \frac{4}{k_2^2} - 4\mu_2 \frac{w_{x2}}{w_{y2}} - \alpha w_{x2}^4 - \frac{32\mu_1 w_{x2}^4}{\sqrt{(w_{x1}^2 + w_{x2}^2)^3 (w_{y1}^2 + w_{y2}^2)}}, \\ w_{y2}^3 \frac{\partial^2 w_{y2}}{\partial z^2} &= \frac{4}{k_2^2} - 4\mu_2 \frac{w_{y2}}{w_{x2}} - \alpha w_{y2}^4 - \frac{32\mu_1 w_{y2}^4}{\sqrt{(w_{x1}^2 + w_{x2}^2) (w_{y1}^2 + w_{y2}^2)^3}}, \\ \frac{dw_{x1}}{dz} &= \frac{w_{x1}}{R_{x1}}, \quad \frac{dw_{y1}}{dz} = \frac{w_{y1}}{R_{y1}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu_i = \beta w_{xi0} w_{yi0} I_i / 8$  – эффективная мощность первого ( $i=1$ ) и второго ( $i=2$ ) пучка;  $w_{xi0}, w_{yi0}$  – длины полуосей светового пятна эллиптического пучка на входной границе нелинейной среды  $z=0$ .

Умножая первое и второе уравнения системы (4) на  $\mu_1$ , а третье и четвертое уравнения – на  $\mu_2$ , дифференцируя полученные выражения по  $z$  и складывая результаты выполнения этой операции, получим соотношение

$$\frac{d^3 A}{dz^3} + 4\alpha \frac{dA}{dz} = 0, \quad (5)$$

$$A = \mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2).$$

Общее решение уравнения (5) в случае однородной среды ( $\alpha = 0$ ) имеет вид

$$\mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2) = C_2 z^2 + C_1 z + C_0. \quad (6)$$

Для квадратично неоднородной среды ( $\alpha \neq 0$ ) общее решение получим в виде

$$\mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2) = S_2 \sin(2\sqrt{\alpha}z) + S_1 \cos(2\sqrt{\alpha}z) + S_0. \quad (7)$$

Постоянные интегрирования  $C_2, C_1, C_0, S_2, S_1, S_0$  находим, учитывая граничные условия при  $z = 0$  в системе уравнений (4).

В результате численного решения системы уравнений (4) показано, что поведение взаимодействующих пучков в нелинейной среде достаточно сложно. Размер взаимодействующих пучков может одновременно или возрастать, или уменьшаться. Как следует из формул (6) и (7), при распространении в нелинейной среде двух эллиптических гауссовых пучков величина  $2w_{эф}^2 = \mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2)$  изменяется: в однородной среде по параболическому закону; в квадратично неоднородной среде – по гармоническому закону, аналогичному закону изменения радиуса светового пятна кругового пучка, распространяющегося в такой среде. Следовательно, при распространении двух эллиптических пучков в среде с кубической нелинейностью им можно поставить в соответствие эффективный круговой пучок. Размеры полуосей эллипсов, ограничивающих поперечные сечения пучков (световых пятен), будут осциллировать вблизи эффективного значения  $w_{эф}$ .

По типу изменения величины  $w_{эф}$  в однородной среде можно выделить три режима распространения взаимодействующих пучков – в зависимости от величины  $B$ , вычисляемой по формуле

$$B = \frac{\mu_1}{k_1^2} \left( \frac{1}{w_{x10}^2} + \frac{1}{w_{y10}^2} \right) + \frac{\mu_2}{k_2^2} \left( \frac{1}{w_{x20}^2} + \frac{1}{w_{y20}^2} \right) - \frac{2\mu_1^2}{w_{x10} w_{yx10}} - \frac{2\mu_2^2}{w_{x20} w_{yx20}} - \frac{16\mu_1\mu_2}{\sqrt{(w_{x10}^2 + w_{x20}^2)(w_{y10}^2 + w_{y20}^2)}}.$$

При  $B > 0$  эффективный размер пучков  $w_{эф}$  увеличивается с ростом продольной координаты  $z$ . Если  $B = 0$ , реализуется квазиволноводный режим распространения, т.е. эффективный размер  $w_{эф}$  не изменяется при изменении  $z$ , а размеры полуосей эллипса светового пятна перио-

дически осциллируют. При  $B < 0$  происходит схлопывание пучков в точку.

В неоднородной среде по типу изменения величины  $w_{эф}$  можно выделить не три – как в однородной среде, а четыре режима распространения пучков.

В однородной среде интенсивность волноводного режима равна критической мощности схлопывания пучка, поэтому, в зависимости от мощности, существуют три режима распространения. В неоднородной среде мощность волноводного режима распространения  $w_{эф} = const$  меньше критической мощности схлопывания пучка. Поэтому в неоднородной среде, в зависимости от мощности, существуют четыре режима распространения.

При сравнении результатов численных расчетов установлено, что при большом различии мощностей или поперечных размеров пучков влияние их друг на друга при распространении в нелинейной среде незначительно. При близких значениях мощности пучков и их поперечных размеров нелинейное взаимодействие пучков существенно влияет на их геометрию и его необходимо учитывать при расчете оптических устройств.

### Литература

1. Lopes Lago, E. Copropagation of two waves of different frequencies and arbitrary initial polarization states in an isotropic Kerr medium / E. Lopes Lago, R. de Fuente. // Phys. Rev. A. –1999. –Vol.60, № 1. – P.549–558.

2. Berge Luc., Coalescence and instability of copropagating nonlinear waves / Luc. Berge // Phys. Rev. E. –1998. –Vol.58, № 5. –P. 6606–6625.

3. Bang, O. Fusion, collapse, and stationary bound states of incoherently coupled waves in bulk cubic media / O. Bang, L. Berge // Phys. Rev. E. – Vol.59, № 4. – P. 4600–4613.

4. Гончаренко, А. М. К теории взаимодействия ортогонально поляризованных световых пучков в нелинейных средах / А. М. Гончаренко, П. С. Шаповалов // Доклады НАНБ. – 2003. – Т. 22, № 2. – С. 323–325.

5. Гончаренко, А. М. Гауссовы пучки света / Гончаренко А. М. // Наука и техника. – Минск, 1977. – 140 с.

**В.А. Юевич**

УО «Могилёвский государственный университет продовольствия»,  
Могилёв, Беларусь

## **ИМПУЛЬСЫ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ ПЛОТНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЫ**

### **Введение**

Поверхностные плёнки из активных материалов с сильным нелинейным откликом на резонансное световое поле в оптическом диапазоне частот можно эффективно использовать в пассивных устройствах модуляции излучения для управления световыми потоками. Известно также, что в тонких резонансных слоях могут быть реализованы режимы самовозбуждения. Это явление перспективно к использованию для получения импульсной генерации в лазерных устройствах, где усиливающий элемент представляет тонкий слой резонансной среды, в которой возможно достичь высокого уровня инверсии. Именно к таким средам относят используемые в оптике и лазерной физике квантоворазмерные полупроводниковые структуры [1], которые активны в области спектра, соответствующей экситонным переходам. Подобного рода материалы причисляют к плотным резонансным средам; в формировании их отклика на излучение особо сказывается влияние на нелинейную восприимчивость диполь-дипольного взаимодействия и поглощения в квазирезонансных переходах. Обоими эффектами по мере резонансных вариаций населённости определяется смещение центра и уширение спектральной линии усиления. В настоящем сообщении в приближении сверхтонкого слоя резонансных атомов рассмотрено влияние этих факторов нелинейной фазовой динамики на процесс сверхизлучения (СИ). Фазовыми эффектами определена возможность возникновения динамической обратной связи, поэтому применительно к тонким усиливающим элементам следует говорить именно о генерации с характерными признаками процесса СИ.

### **1. Кинетическая модель эффекта**

Переизлучённое поляризованными атомами тонкого слоя оптическое поле в силу однородности формируется в результате когерентного эффекта СИ и развивается в процессе взаимного согласования фаз (фазировки) элементарных излучателей, образующих активную среду,

через излучаемое ими поле. Установление коллективного СИ-состояния в результате фазировки активных диполей обусловлено возникновением макроскопической поляризации и формированием упорядоченного распределения диполей в ансамбле [2]. Для возникновения СИ среда должна быть максимально инвертирована; возможность обратимого процесса изменения населённости при формировании поля СИ (за счёт действия накачки) не рассматривается. В полупроводниковых средах СИ происходит как коллективная спонтанная рекомбинация [1]. Динамика компонентов отклика среды в режиме СИ определяет процесс генерации излучения в случае достижения пороговой инверсии в тонком слое, которому естественно присуще состояние фазировки диполей в условиях однородности поля по толщине слоя – в направлении распространения излучения. Процесс фазировки диполей, обуславливающий СИ, оптимален в условиях резонанса. Отстройка от резонанса, обусловленная влиянием ближних полей диполей, и уширение линии, которое проявляется при наличии квазирезонансной поляризации, неизбежно влияют на ход процесса фазировки, снижая её эффективность. Постановка задачи об энергообмене между средой и световым полем в процессе СИ в условиях существования вышеназванных факторов нелинейности, безусловно, правомерна.

В основу анализа динамики СИ положен известный вариант оптических уравнений Максвелла – Блоха для квазистационарных огибающих светового поля  $E$  и поляризованности  $\rho$ , соответствующих модельной обобщённой двухуровневой схеме и, аналогично [3], модифицированных для приповерхностного планарного слоя плотной резонансной среды. В итоге масштабирования переменных и материальных параметров слоя кинетическая схема генерации в условиях формального резонанса (совпадения центральной частоты линии усиления  $\omega_0$  с несущей частотой светового поля  $\omega$ ) представляется системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left[ \frac{n}{\tau_R} \frac{1 - \gamma\beta(1-n)}{1 + \beta^2(1-n)^2} - \frac{1}{T_2} \right] \rho - \frac{i}{\tau_R} \frac{\gamma - \beta(1-n)}{1 + \beta^2(1-n)^2} n\rho, \quad (1)$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{\tau_R} \frac{1 - \gamma\beta(1-n)}{1 + \beta^2(1-n)^2} |\rho|^2, \quad S = \left| \frac{\mu}{\hbar} T_2 E \right|^2 = \left( \frac{T_2}{\tau_R} \right)^2 \frac{[1 - \gamma\beta(1-n)]^2}{1 + \beta^2(1-n)^2} |\rho|^2,$$

где  $S$  – нормированная плотность излучения,  $\rho$  и  $n$  – вероятностные переменные резонансной поляризованности и разности заселённости



резонансного перехода (инверсии),  $\mu$  – средняя величина электрического момента элементарного диполя,  $\tau_R = \hbar c \epsilon_0 / \mu^2 N l \omega_0$  – время сверхизлучения,  $Nl$  – поверхностная плотность активных центров,  $T_2$  – время их фазовой релаксации. Влияние ближних полей диполей на поляризуемость активных центров учтено как локальная поправка Лорентца к действующему полю. Нормирующий коэффициент  $\gamma$  в компонентах системы (1), обусловленных наличием этой поправки, пропорционален отношению длины волны поля СИ и толщине слоя  $\lambda/l$ . Фактор квазирезонансной поляризации, обуславливающей автомодуляционное уширение поля, зависит от резонансной вариации инверсии и в уравнениях (1) учитывается в компонентах с коэффициентом резонансной нелинейности рефракции  $\beta$  (пропорциональным разности поляризуемостей активных диполей на уровнях основного перехода). Отметим, что время сверхизлучения обратно пропорционально поверхностной концентрации  $Nl$ ; с увеличением концентрации возрастает резонансный (ненасыщенный) уровень усиления, оцениваемый по значениям показателя  $\kappa = T_2/\tau_R$ . Одновременно возрастает и снижающая уровень усиления нелинейная отстройка от резонанса, пропорциональная объёмной концентрации  $N$ .

## 2. Решение для инверсии и расчёт временной развёртки излучения

Проявление двух противоположных тенденций в динамике процесса СИ может существенно изменить его ход. Определяющий динамику излучения сброс инверсии из-за расфазировки диполей должен быть менее значимым. Соответственно – в зависимости от того, какая тенденция превалирует – может измениться профиль распределения интенсивности в импульсе СИ и его пиковая мощность. Для оценки этих изменений запишем систему уравнений (1), связывающих определяющую плотность излучаемого поля переменную  $|\rho(t)|^2$  и инверсию  $n(t)$  – в пренебрежении релаксационным членом в уравнении для поляризованности:

$$\frac{d}{dt} |\rho|^2 = 2 \frac{n}{\tau_R} \frac{1 - \gamma\beta(1-n)}{1 + \beta^2(1-n)^2} |\rho|^2, \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{1}{\tau_R} \frac{1 - \gamma\beta(1-n)}{1 + \beta^2(1-n)^2} |\rho|^2. \quad (2)$$

Интегралом системы (2) является соотношение, известное как закон сохранения полярного угла вектора Блоха [2]:  $|\rho(t)|^2 + n^2(t) = 1$ . С его учётом из системы (2) можно найти в неявном виде решение уравнения для инверсной заселённости:

$$\frac{t}{\tau_R} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1-n}{1+n} - \beta \frac{\gamma - 2\beta}{1 - 2\beta\gamma} \ln(1+n) + \frac{\beta}{\gamma} \frac{1 + \gamma^2}{1 - 2\beta\gamma} \ln [1 - \beta\gamma(1-n)]. \quad (3)$$

Вычисления временной развёртки инверсии на основе соотношения (3) удобно проводить методом параметрического расчёта, рассматривая вероятностную переменную  $n$  как параметр, линейно нарастающий в пределах  $(-1, 1)$ . Производя параллельно с этим расчёт нормированной плотности  $S(t)$  на основе выражения, полученного с учётом закона сохранения полярного угла вектора Блоха,

$$S = \kappa^2 \frac{[1 - \gamma\beta(1-n)]^2}{1 + \beta^2(1-n)^2} (1-n^2) \quad (4)$$

можно определить форму импульса СИ.

При оценке масштаба явлений (диапазона изменения характеристик излучения и параметров сред), автор настоящей работы в расчётах основывался, в основном, на известных из литературы, например, из работы [4], значениях параметров вещества полупроводниковых квантоворазмерных структур – слоёв субмикронной толщины. Значения интенсивности в пике импульса СИ могут иметь порядок не менее  $10^7$  Вт/см<sup>2</sup> в диапазоне  $\lambda \sim (1,25 \dots 1,30) \cdot 10^{-6}$  м, соответствующем экситонным переходам.

Примеры рассчитанного на основе (3), (4) временного хода нормированной интенсивности  $S$  и вероятностной переменной  $n$  приведены на рисунке 1.

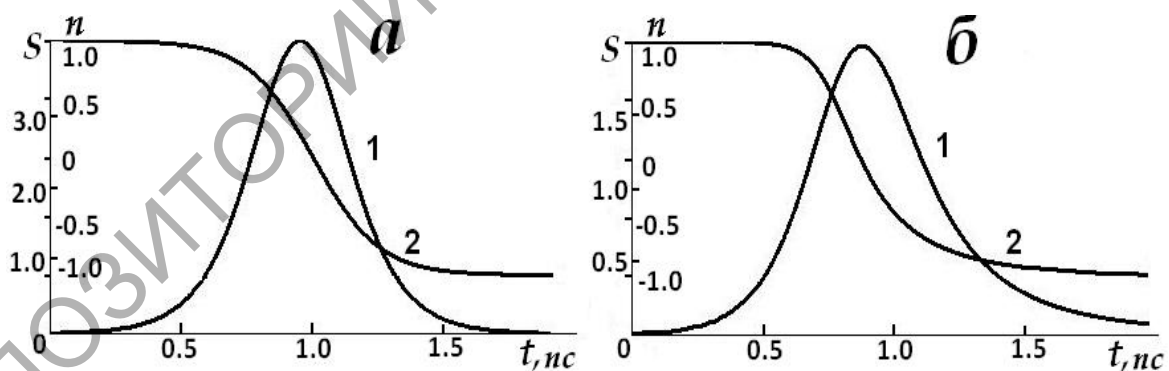


Рисунок 1 – Временная развёртка плотности излучения (кривая 1, в относительных единицах) и изменения инверсной населённости (2):  $\beta = 0$  (а), 0,32 (б),  $\tau_R = 5,0 \cdot 10^{-13}$  с,  $\gamma = 1,5$

Принципиально сравниваются форма, продолжительность и достижимая пиковая амплитуда импульсов для «классического» вариан-

та СИ (в отсутствие фазовых эффектов – на рисунке 1, *a*) и в случае автомодуляционного смещения резонанса (1, *б*). В обоих случаях, кроме различия формы импульсов и их пиковой мощности, очевидна разница в темпе сброса инверсии.

Представлялось интересным проследить за изменением формы импульса в зависимости от показателя усиления  $\kappa = T_2/\tau_R$  (рисунок 2). Этот параметр может изменяться при вариациях концентрации излучающих частиц  $N$  в среде слоя, а также вследствие изменения его толщины  $l$  (в пределах сделанных допущений).

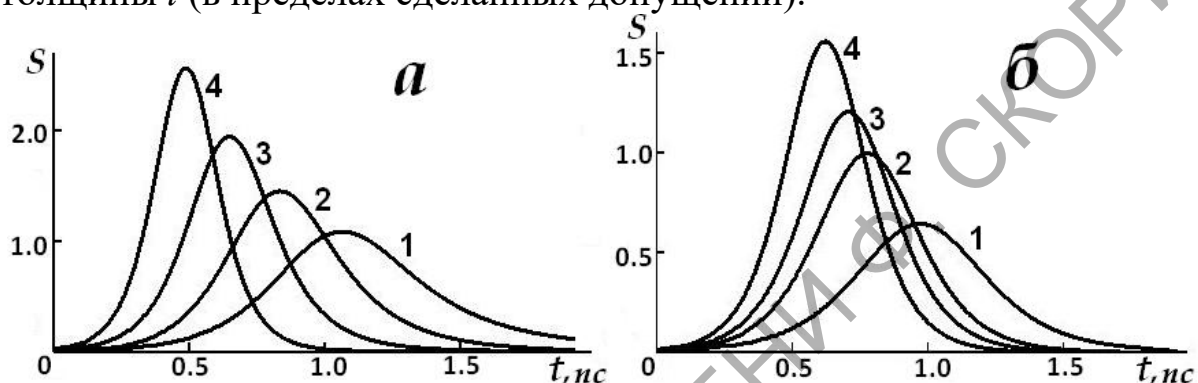


Рисунок 2 – Форма импульсов сверхизлучения при разном уровне усиления:

$N = 5,0 \cdot 10^{17}$  (кривая 1);  $6,7 \cdot 10^{17}$  (2);  $8,0 \cdot 10^{17}$  (3);  $1,0 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ;  $\gamma = 1,5$ ,  $\beta = 0,25$  (*a*);  $N = 8,0 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ;  $\gamma = 1,5$  (1); 1,8 (2); 2,4 (3); 3,0 (4);  $\beta = 0,20$  (*б*)

Сравнивая кривые, изображенные на рисунках 2, *a* и 2, *б*, отметим увеличение асимметрии формы высвечиваемых импульсов при относительном нарастании параметра усиления – одновременно с увеличением усиления, достигнутого к началу процесса СИ, возрастает и уровень фазовой модуляции излучаемого поля ввиду того, что в условиях высокой плотности частиц  $N$  усиливается диполь-дипольное взаимодействие и обусловленные им эффекты.

### Заключение

Проведенные расчётные оценки влияния нелинейных эффектов на процесс СИ значимы при разработке методов генерации и профилирования сверхкоротких световых импульсов. Так как импульсы СИ в условиях, указанных в статье, фазово-модулированы, по описанной в ней схеме можно эффективно сокращать длительность и изменять форму импульсов в многокаскадных схемах усиления.

## Литература

1. Формирование сверхизлучения в наногетероструктурах с квантовыми точками / А.В. Савельев и др. // ФТП. – 2008. – Т.42, вып.6. – С.730–735.

2. Аллен, Л. Оптический резонанс и двухуровневые атомы / Л. Аллен, Дж. Эберли. – Москва: Мир, 1978. – 224 с.

3. Юревич, Ю.В. Модуляция оптического излучения при отражении тонкой плёнкой плотной резонансной среды / Ю.В. Юревич, В.А. Юревич // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 38–45.

4. Rabi oscillations in a semiconductor quantum dot: Influence of local fields / G. Slepyan [et al.] // Phys. Rev. B. – 2004. – Vol.70, № 4. – P. 045320-1–045320-5.

# Теория фундаментальных взаимодействий

Председатель – Тимошин С.И., Максименко Н.В.

**Yu.M. Bystritskiy<sup>1</sup>, A. Dbeyssi<sup>2</sup>, F. Maas<sup>2</sup>, E. Tomasi-Gustafsson<sup>3</sup>,  
V.A. Zykunov<sup>1,4</sup>**

<sup>1</sup>Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

<sup>2</sup>Helmholtz Institute Mainz, Johann-Joachim-Becher-Weg 45, D-55099

<sup>3</sup>CEA, IRFU, SPhN, Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

<sup>4</sup>Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus

## HARD PHOTONS IN PROTON-ANTIPROTON ANNIHILATION TO A LEPTON PAIR FOR PANDA EXPERIMENT

We consider the process of proton-antiproton annihilation into lepton pair which allows one to measure proton form factors in time-like region of momentum transfer  $q^2 > 4M_p^2$ , where  $M_p$  is the proton mass (figure 1). Our aim is to contribute to theoretical support for PANDA/FAIR facility [1] which plan to study the process of scattering of anti-proton beam with wide range of momentum (from 1,5 GeV/c up to 15

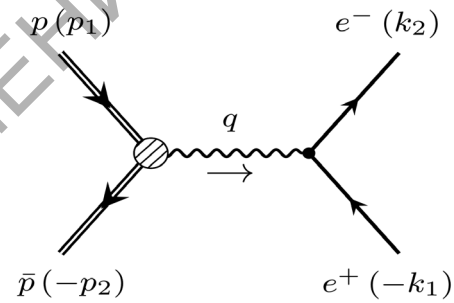


Figure 1 – Antiproton-proton annihilation in Born approximation

GeV/c) of static target made of hydrogen or heavy nuclei. Besides proton form factor measurements in time-like region this setup in principle allows one to measure proton form factor below threshold  $0 < q^2 < 4M_p^2$  [2, 3].

In Born approximation this process has the following form [4]:

$$\frac{d\sigma_B}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2s\beta} \left\{ |G_M|^2 (1 + \cos^2\theta) + |G_E|^2 (1 - \beta^2) (1 - \cos^2\theta) \right\},$$

where  $\theta$  is the scattering angle (angle between directions of initial antiproton and final electron),  $\alpha=1/137$  is the fine structure constant,  $s$  is the total invariant mass,  $\beta$  is the initial antiproton velocity and  $G_{E,M}$  are the electric and magnetic form factors which describe electromagnetic structure of the proton.

In the next perturbation order one has additional contributions:

$d\sigma \sim |\mathcal{M}_B|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}_B \mathcal{M}_V^*) + |\mathcal{M}_\gamma|^2 = |\mathcal{M}_B|^2 (1 + \delta_V + \delta_\gamma)$   
 which is usually called “radiative corrections” (figure 2).

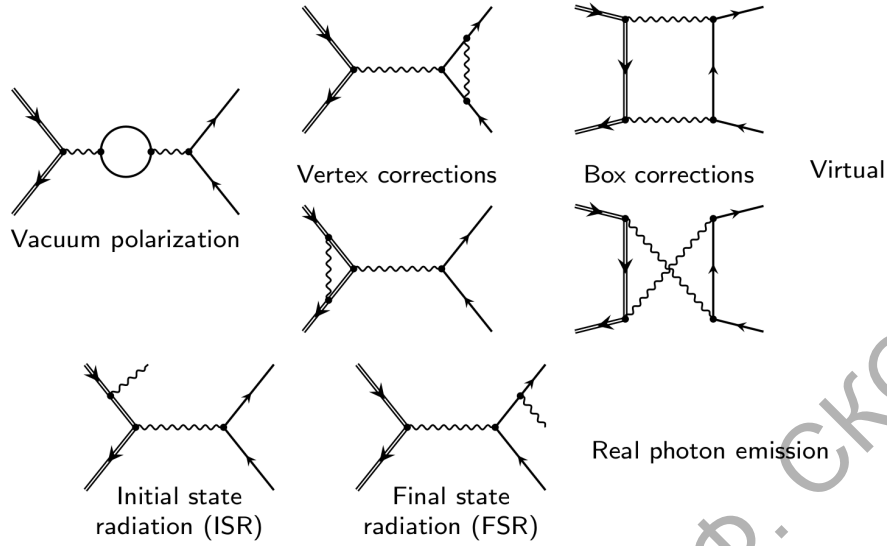


Figure 2 – Radiative corrections

These corrections describe additional terms with virtual particles (denoted with index  $V$ ) and terms with real photon emission (index  $\gamma$ ). Virtual photon contributions are infra-red divergent and we regularize them using “fictitious” photon mass  $\lambda$ . In order to cancel this divergence one need to consider real photon emission which will also depend on  $\lambda$ . The sum of these two contributions is independence of  $\lambda$  and finite. Virtual corrections part has the form:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{B+V}}{d\cos\theta} = & \frac{\alpha^2}{4s\beta} (2 - \beta^2 \sin^2\theta) \left| \frac{1}{1 - \Pi(s)} \right|^2 + \\ & + \frac{\alpha^3}{2\pi s\beta} \left\{ \left[ (2 - \beta^2 \sin^2\theta) \operatorname{Re} \left( F_e^{(2)} + F_1^{(2)} \right) + 2 \operatorname{Re} F_2^{(2)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{I(t, u, s)}{s} \right\}, \end{aligned}$$

where  $\Pi(s)$  is the vacuum polarization operator,  $F_{1,2,e}^{(2)}$  are corrections to vertex parts and  $I(t, u, s)$  is the two proton “box” contribution. Real photon emission can be divided into charge even and charge odd parts. Even part of soft photon emission has the form [5]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{even}}^{\text{soft}}}{d\cos\theta} = & \frac{\alpha}{\pi} \frac{d\sigma_B}{d\cos\theta} \left\{ -2 \left[ \ln \frac{2\omega}{\lambda} - \frac{1}{2\beta} L_\beta \right] - 2 \ln \frac{\omega m}{\lambda E} \right. \\ & \left. + 2 \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \left[ \ln \frac{2\omega}{\lambda} L_\beta - \frac{1}{4} L_\beta^2 + \Phi(\beta) \right] + 2 \left[ \ln \frac{2\omega}{\lambda} L_e - \frac{1}{4} L_e^2 - \frac{\pi^2}{6} \right] \right\} \end{aligned}$$

where function  $\Phi(\beta)$  has the form:

$$\begin{aligned}\Phi(\beta) &= \frac{\pi^2}{12} + L_\beta \ln \frac{1+\beta}{2\beta} + \ln \frac{2}{1+\beta} \ln(1-\beta) + \frac{1}{2} \ln^2(1+\beta) - \frac{1}{2} \ln^2 2 + \\ &\quad - \text{Li}_2(\beta) + \text{Li}_2(-\beta) - \text{Li}_2\left(\frac{1-\beta}{2}\right), \quad \Phi(1) = -\frac{\pi^2}{6}, \\ L_\beta &\equiv \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad L_e = \ln \frac{s}{m_e^2}\end{aligned}$$

Charge odd part of soft photon emission was revised and has the form:

$$\frac{d\sigma_{\text{odd}}^{\text{soft}}}{d\sigma_0} = -\frac{\alpha}{2\pi^2} \left( (m_e^2 + M_p^2 - t) R(s, t) - (m_e^2 + M_p^2 - u) R(s, u) \right),$$

where

$$R(s, t) = 2\pi \left( 2A(s, t) \ln \frac{2\omega}{\lambda} + C(s, t) \right),$$

$$A(s, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(t, m_e^2, M_p^2)}} \ln \left| \frac{t - m_e^2 - M_p^2 - \sqrt{\lambda(t, m_e^2, M_p^2)}}{t - m_e^2 - M_p^2 + \sqrt{\lambda(t, m_e^2, M_p^2)}} \right|,$$

$$C(s, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(t, m_e^2, M_p^2)}} \sum_{i,j=1}^4 \epsilon_i \delta_j U_{ij}(\eta_0, \eta_1, y_i, y_j),$$

$$\eta_0 = \sqrt{1 - m_e^2/E^2}, \quad \eta_1 = \sqrt{1 - M_p^2/E^2} + \sqrt{-t}/E,$$

$$y_i = \delta_i - \frac{t + m_e^2 - M_p^2 + \epsilon_i \delta_i \sqrt{\lambda(t, m_e^2, M_p^2)}}{2E\sqrt{-t}}.$$

Soft photon realm in the formulae above was defined with the condition that photon energy should be smaller than some small quantity  $\omega$ . Modern experiments use Monte-Carlo generators to study hardware setup and one no longer needs for soft photon approximation. We calculated hard photon emission which has rather complicated form and will not be presented here. We only show schematically the structure of hard photon emission cross section:

$$d\sigma_\gamma = \frac{\alpha^3}{\pi^2 s \beta} \int (\mathcal{M}_{\text{ISR}} + \mathcal{M}_{\text{FSR}}) (\mathcal{M}_{\text{ISR}} + \mathcal{M}_{\text{FSR}})^+ \cdot \theta(p_0 - \omega) \cdot \theta_P \cdot d\Phi_3,$$

where we took into account initial state radiation (ISR) and final state radiation (FSR). These contributions are integrated over phase space of final photon  $d\Phi_3$  taking into account energy cut of photon hardness using first  $\theta$  function. Second  $\theta$  function represents the possibility to include any exper-

iment specific conditions into our integration. One important test of our calculation is the following: when one sum over all possible photon energies and angles (i.e. integrates over whole energy range of final photon) then cross section should not depend on parameter  $\omega$  since it will cancel in the sum of soft and hard photon emissions. This cancellation one can see on figure 3.

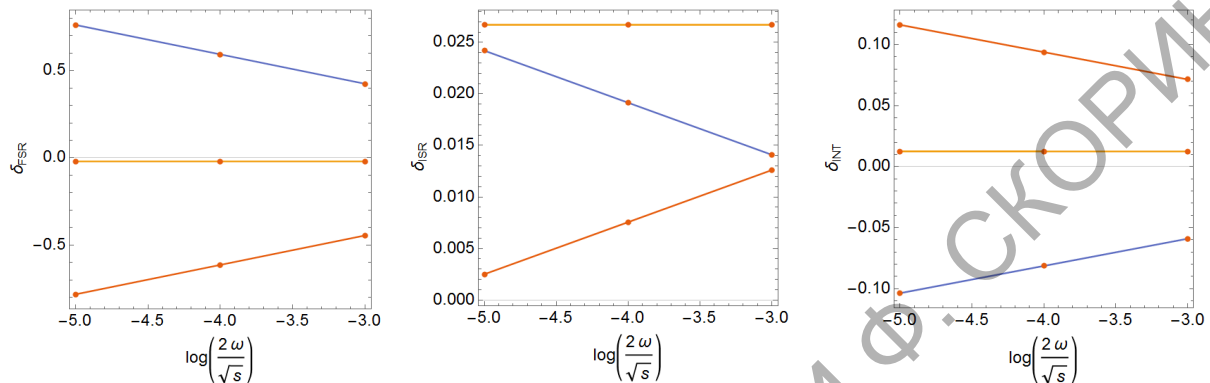


Figure 3 – Dependence of ISR, FSR and their interference of real photon softness parameter  $\omega$ . One contribution on the plot is real hard photon emission. Another is virtual+soft photon emission. And their sum is flat horizontal line independent of  $\omega$

## References

1. Nucleon structure observables with PANDA / M.C. Mora Espi [PANDA coll.] // EPJ Web of Conferences. – 2017. – Vol. 164. – P. 06002.
2. Proton-antiproton annihilation into electrons, muons and vector bosons / A. Zichichi [et al.] // Nuovo Cimento. – 1962. – Vol. 24, № 1. – P. 170–180.
3. Rekalov, M.P. On a Possibility of Determining Nucleon Form Factors for Time-Like Momentum Transfers / M.P. Rekalov // Soviet Journal of Nuclear Physics. – 1965. – Vol. 1. – P. 760–762.
4. Annihilation of  $p^-+p^+\rightarrow e^++e^-\pi^0$  and  $p^-+p^+\rightarrow\gamma+\pi^0$  through  $\omega$ -meson intermediate state / E.A. Kuraev [et al.] // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 2012. – Vol. 115, № 1. – P. 93–104.
5. Radiative proton-antiproton annihilation to a lepton pair / A.I. Ahmadov [et al.] // Physical Review D. – 2010. – Vol. 82. – P. 094016.



V.V. Kisel<sup>1</sup>, V.A. Pletyukhov<sup>2</sup>, E.M. Ovsiyuk<sup>3</sup>, V.M. Red'kov<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics,  
Minsk, Belarus

<sup>2</sup>Brest State University named after A.S. Pushkin, Brest, Belarus

<sup>3</sup>Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin,  
Mozyr, Belarus

<sup>4</sup>B.I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences  
of Belarus, Minsk, Belarus

## ON P-NONINVARIANT WAVE EQUATION FOR SPIN 1/2 PARTICLE WITH ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT, INTERACTION WITH EXTERNAL FIELDS

Within the theory of relativistic wave equations with extended sets of Lorentz group representations, a new P-noninvariant 20-component wave equation for spin 1/2 particle is proposed. The presence of external electromagnetic field and Riemannian space-time background are taken into account. Due to internal structure of the particle, additional interaction terms appear, they correspond to additional characteristic-anomalous magnetic moment.

### 1. Gel'fand-Yaglom Basis

The goal of the paper is to construct a new  $P$ -noninvariant wave equation for a massive spin 1/2 particle. We apply general theory of relativistic wave equations with extended sets of representation of the Lorentz group [1-4]. We start with the following set of irreducible representations (this is 20-component theory)

$$T = (0,1/2) \oplus (1/2,0) \oplus (0,1/2)' \oplus (1/2,0)' \oplus (1,1/2) \oplus (1/2,1),$$

where the "prime" serves to distinguish repeated representations of the Lorentz group. The matrix  $\Gamma_4$  of corresponding wave equation has the following structure  $\Gamma_4 = (C^{(1/2)} \otimes I_2) \oplus (C^{(3/2)} \otimes I_4)$ , where  $C^{(1/2)}$ ,  $C^{(3/2)}$  represent spin-blocks related to spins 1/2 and 3/2. With the use of the numeration of irreducible components

$$\begin{aligned} (0,1/2) &\square 1, & (0,1/2)' &\square 2, & (1,1/2) &\square 3, \\ (1/2,0) &\square 4, & (1/2,0)' &\square 5, & (1/2,1) &\square 6, \end{aligned}$$

the blocks  $C^{(1/2)}$  and  $C^{(3/2)}$  are given by the formulas

$$C^{(\frac{1}{2})} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14}^{(\frac{1}{2})} & c_{15}^{(\frac{1}{2})} & c_{16}^{(\frac{1}{2})} \\ 0 & 0 & 0 & c_{24}^{(\frac{1}{2})} & c_{25}^{(\frac{1}{2})} & c_{26}^{(\frac{1}{2})} \\ 0 & 0 & 0 & c_{34}^{(\frac{1}{2})} & c_{35}^{(\frac{1}{2})} & c_{36}^{(\frac{1}{2})} \\ c_{41}^{(\frac{1}{2})} & c_{42}^{(\frac{1}{2})} & c_{43}^{(\frac{1}{2})} & 0 & 0 & 0 \\ c_{51}^{(\frac{1}{2})} & c_{52}^{(\frac{1}{2})} & c_{53}^{(\frac{1}{2})} & 0 & 0 & 0 \\ c_{61}^{(\frac{1}{2})} & c_{62}^{(\frac{1}{2})} & c_{63}^{(\frac{1}{2})} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad C^{(\frac{3}{2})} = \begin{vmatrix} 0 & c_{36}^{(\frac{3}{2})} \\ c_{63}^{(\frac{3}{2})} & 0 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

From invariance of the equation under proper Lorentz group follow the constraints

$$c_{36}^{(\frac{3}{2})} = 2c_{36}^{(\frac{1}{2})}, \quad c_{63}^{(\frac{3}{2})} = 2c_{63}^{(\frac{1}{2})}.$$

Besides, without loss of generality, the links between repeated components may be broken:

$$c_{15}^{(\frac{1}{2})} = c_{51}^{(\frac{1}{2})} = c_{24}^{(\frac{1}{2})} = c_{42}^{(\frac{1}{2})} = 0.$$

Because, we wish to construct the model of a particle with single spin  $1/2$ , we require that eigenvalues of the block  $C^{(3/2)}$  be equal to zero. Therefore, we set  $c_{36}^{(\frac{3}{2})} = c_{63}^{(\frac{3}{2})} = 0$ , whence it follows  $c_{36}^{(\frac{1}{2})} = c_{63}^{(\frac{1}{2})} = 0$ .

## 2. Modified Gel'fand-Yaglom basis

Let us find the form of the matrix  $\Gamma_4$  in so-called modified Gel'fand-Yaglom basis. Here the listing of basis elements of the complete wave function  $\psi$  is slightly different. We find the following decomposition for spin block  $C^{(1/2)}$ :

$$C^{(1/2)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (c_{14}^{(\frac{1}{2})} + c_{41}^{(\frac{1}{2})}) & 0 & (c_{16}^{(\frac{1}{2})} + c_{43}^{(\frac{1}{2})}) \\ 0 & (c_{25}^{(\frac{1}{2})} + c_{52}^{(\frac{1}{2})}) & (c_{26}^{(\frac{1}{2})} + c_{53}^{(\frac{1}{2})}) \\ (c_{34}^{(\frac{1}{2})} + c_{61}^{(\frac{1}{2})}) & (c_{35}^{(\frac{1}{2})} + c_{62}^{(\frac{1}{2})}) & 0 \end{vmatrix} \otimes \gamma_4 + \\ + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (c_{14}^{(\frac{1}{2})} - c_{41}^{(\frac{1}{2})}) & 0 & (c_{16}^{(\frac{1}{2})} - c_{43}^{(\frac{1}{2})}) \\ 0 & (c_{25}^{(\frac{1}{2})} - c_{52}^{(\frac{1}{2})}) & (c_{26}^{(\frac{1}{2})} - c_{53}^{(\frac{1}{2})}) \\ (c_{34}^{(\frac{1}{2})} - c_{61}^{(\frac{1}{2})}) & (c_{35}^{(\frac{1}{2})} - c_{62}^{(\frac{1}{2})}) & 0 \end{vmatrix} \otimes \gamma_5 \gamma_4; \quad (2)$$

here the first term corresponds to purely  $P$ -invariant model, the second term relates to purely  $P$ -noninvariant model. We will we restrict ourselves to the second variant of the theory.

It is convenient to employ shortening notations, then the spin block  $C^{(1/2)}$  reads

$$C^{(1/2)} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & 0 \end{vmatrix} \otimes \gamma_4 + \begin{vmatrix} ib_1 & 0 & ib_2 \\ 0 & ib_3 & ib_4 \\ ib_5 & ib_5 & 0 \end{vmatrix} \otimes \gamma_5 \gamma_4. \quad (3)$$

For purely  $P$ -noninvariant model it becomes simpler

$$C^{(1/2)} = i \begin{vmatrix} b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_5 & 0 \end{vmatrix} \otimes \gamma_5 \gamma_4. \quad (4)$$

We create the model for particle with one mass, so the matrix

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_5 & 0 \end{vmatrix}$$

must have only one non-vanishing eigenvalue. In accordance with this, parameters  $b_i$  obey restrictions

$$b_1 + b_3 = 1, \quad b_1 b_3 - b_2 b_5 - b_4 b_6 = 0, \quad b_2 b_3 b_5 + b_1 b_4 b_6 = 0. \quad (5)$$

### 3. Spinor form of the wave equation

After some technical manipulations we derive the set of spinor equations (where  $\partial_{ab} = \frac{1}{i} \partial_\mu \sigma_{ab}^\mu$ )

$$\begin{aligned} & i \left\{ b_1 \partial^{ab} \Psi_b + \sqrt{\frac{2}{3}} b_2 \partial_c^b \Psi_b^{(ac)} \right\} + M \Psi^a = 0, \\ & -i \left\{ b_1 \partial_{ab} \Psi^b + \sqrt{\frac{2}{3}} b_2 \partial_b^c \Psi_{(ac)}^b \right\} + M \Psi_a = 0, \\ & i \left\{ b_3 \partial^{ab} \Psi'_b + \sqrt{\frac{2}{3}} b_4 \partial_c^b \Psi_b^{(ac)} \right\} + M \Psi'^a = 0, \\ & -i \left\{ b_3 \partial_{ab} \Psi'^b + \sqrt{\frac{2}{3}} b_4 \partial_b^c \Psi_{(ac)}^b \right\} + M \Psi'_a = 0, \\ & -\frac{i}{\sqrt{6}} b_5 (\partial_a^c \Psi_b + \partial_b^c \Psi_a) - \frac{i}{\sqrt{6}} b_6 (\partial_a^c \Psi'_b + \partial_b^c \Psi'_a) + M \Psi_{(ab)}^c = 0, \\ & \frac{i}{\sqrt{6}} b_5 (\partial_c^a \Psi^b + \partial_c^b \Psi^a) + \frac{i}{\sqrt{6}} b_6 (\partial_c^a \Psi'^b + \partial_c^b \Psi'^a) + M \Psi_c^{(ab)} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

#### 4. Equations in spin-tensor form

After additional work we arrive at the spin-tensor system (where  $\hat{\partial} = \partial_\mu \gamma_\mu$ )

$$\begin{aligned}
 i\gamma_5 \left\{ b_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4b_2}{\sqrt{6}} \left[ -\frac{1}{4} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + (\partial_\mu \Psi_\mu) \right] \right\} + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) &= 0, \\
 i\gamma_5 \left\{ b_3 \hat{\partial}\Psi_0 - i \frac{4b_4}{\sqrt{6}} \left[ (\partial_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] \right\} + M\Psi_0 &= 0, \\
 \frac{2i}{\sqrt{6}} \gamma_5 \left\{ b_5 \left[ \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] - \right. \\
 \left. -ib_6 \left[ \partial_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial}\Psi_0 \right] + M \left\{ \Psi_\lambda - \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right\} \right\} &= 0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

#### 5. Reducing the system to minimal equation

In absence of external fields, the main component of the wave function is

$$\Phi(x) = b_5 \gamma_\mu \Psi_\mu(x) - ib_6 \Psi_0(x). \quad (8)$$

The main bispinor  $\Phi(x)$  satisfies modified Dirac-like  $P$ -noninvariant equation

$$\left\{ i\gamma_5 (\gamma_\mu \partial_\nu) + M \right\} \Phi(x) = 0. \quad (9)$$

Concomitant bispinors may be constructed by the rules

$$\gamma_\mu \Psi_\mu(x) = \frac{b_1^2}{b_5(b_1^2 - b_3^2)} \Phi(x), \quad \Psi_0(x) = \frac{-ib_3^2}{b_6(b_1^2 - b_3^2)} \Phi(x). \quad (10)$$

#### 6. The minimal equation in presence of electromagnetic field

In presence of electromagnetic fields, the main component is the same

$$\Phi(x) = b_5 \gamma_\mu \Psi_\mu(x) - ib_6 \Psi_0(x).$$

This component obeys the following  $P$ -noninvariant equation for a particle with anomalous magnetic moment

$$\left\{ i\gamma^5 \gamma_\mu (\partial_\mu + ieA_\nu) - \frac{4b_1 b_3}{M} ieF_{\mu\nu} \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu}{4} + M \right\} \Psi = 0. \quad (11)$$

Expressions for  $\Psi = 0$  and  $(\gamma_\mu \Psi_\mu)$  are

$$(\gamma_\mu \Psi_\mu) = \frac{b_1^2}{b_5(b_1^2 - b_3^2)} \left\{ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{b_1 b_3}{M} \right)^2 ieF_{\mu\nu} \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu}{4} \right\} \Phi,$$

$$\Phi_0 = -i \frac{b_3^2}{b_6(b_1^2 - b_3^2)} \left\{ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{b_1 b_3}{M} \right)^2 ieF_{\mu\nu} \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu}{4} \right\} \Phi. \quad (12)$$

## 7. Extension of the model to General relativity

In order to follow extension of the model from flat Minkowski space to any Riemannian space-time we should turn back and make several simple modifications.

1. In Riemannian space we use the metric  $g_{\alpha\beta}(x)$ , related to signature  $(+, -, -, -)$ , we must make the change:

$$M \rightarrow iM. \quad (13)$$

2. Now Dirac matrices in spinor basis are

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{vmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

3. Derivatives are modified according to the rules

$$D_\alpha(x) = \nabla_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x), \quad \hat{D} = \gamma^\alpha(x)D_\alpha(x),$$

where  $\Gamma_\alpha(x)$  is bispinor connection, and  $\gamma^\alpha(x) = \gamma^a e_{(a)}^\alpha(x)$ .

4. Note important commutation rules

$$\hat{D}(x) = \gamma^\rho(x)D_\rho = D_\rho \gamma^\rho(x), \quad D_\sigma(x)g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x)D_\sigma(x),$$

$$\hat{D}\hat{D} = D^\alpha D_\alpha - \Sigma(x), \quad \Sigma(x) = -ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x) + \frac{R}{4},$$

where  $R(x)$  is the Ricci scalar.

5. Note the notations

$$\gamma^5(x) = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}(x) \gamma^\alpha(x) \gamma^\beta(x) \gamma^\rho(x) \gamma^\sigma(x),$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x) = \varepsilon^{abcd} e_{(a)}^\alpha(x) e_{(b)}^\beta(x) e_{(c)}^\rho(x) e_{(d)}^\sigma(x), \quad \varepsilon_{0123} = -1.$$

Levi-Civita object  $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x)$  changes under tetrad transformations as follows

$$\varepsilon'^{\alpha\beta\rho\sigma}(x) = \det[L_a^b(x)] \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x).$$

In particular, at the tetrad  $P$ -reflection, it transforms as a tetrad pseudoscalar

$$\varepsilon^{(p)\alpha\beta\rho\sigma}(x) = (-1) \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x).$$

The above analysis for the generally covariant system remains in fact the same. We can write down final result without repeating the calculation.

$$\Phi = b_5(\gamma_\mu \Psi_\mu) - ib_6 \Psi_0,$$

$$\left\{ i\gamma^5(x)\hat{D}(x) - \frac{4b_1b_3}{M} \left[ -ieF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}(x) + \frac{R(x)}{4} \right] + iM \right\} \Phi = 0. \quad (15)$$

Expressions for concomitant components are given the formulas

$$\begin{aligned} \gamma^\mu(x)\Psi_\mu(x) &= \frac{b_1^2}{b_5(b_1^2 - b_3^2)} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{b_1b_3}{iM} \right)^2 \left( -ieF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \frac{R(x)}{4} \right) \right\} \Phi, \\ \Psi_0(x) &= -i \frac{b_3^2}{b_6(b_1^2 - b_3^2)} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{b_1b_3}{iM} \right)^2 \left( -ieF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \frac{R(x)}{4} \right) \right\} \Phi. \quad (16) \end{aligned}$$

### Conclusions

This theory gives a  $P$ -noninvariant model for spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment.

### References

1. Gel'fand, I.M. Pauli theorem for general relativistic invariant wave equations / I.M. Gel'fand, A.M. Yaglom // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1948. – Vol. 18. – P. 1096–1104.
2. Fedorov, F.I. Generalized relativistic wave equations / F.I. Fedorov // Doklady AN USSR. – 1952. – Vol. 82, № 1. – P. 37–40.
3. Pletjukhov, V.A. Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom / V.A. Pletjukhov, V.M. Red'kov, V.I. Strazhev. – Minsk: Belarusian Science, 2015. – 328 p.
4. Elementary particles with internal structure in external field / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, V. Balan, O.V. Veko, V.M. Red'kov. – Vol. I. General formalism. – Nova Science Publishers, Inc. USA, 2018. – 404 p.; Vol. II. Physical problems. – Nova Science Publishers, Inc. USA, 2018.

**N.V. Maksimenko, S.A. Lukashevich**

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus

## THE ENERGY-MOMENTUM TENSOR FOR A SPIN 1/2 PARTICLE TAKING INTO ACCOUNT POLARIZABILITIES

### Introduction

Interaction of the electromagnetic field with a structural particles in the electrodynamic of hadrons is based on main principles of the relativistic quantum field theory. In the model conceptions where basically the dia-

gram technique is used a number of features for interaction of photons with hadrons have been determined [1, 2]. However, the diagram technique is mainly employed for a description of electromagnetic processes on a simplest quark systems. In the case of interaction for the electromagnetic field with complex quark-gluon systems in the low-energy region perturbative methods of QCD are nonapplicable. That is why the low-energy theorems and sum rules are widely used lately [3-6].

In the present time the low-energy electromagnetic characteristics which connect with hadron structure, such as formfactor and polarizabilities, it is possible to obtain from nonrelativistic theory [5]. Passing on from the nonrelativistic electrodynamics to the relativistic field theory one can make use the correspondence principle. But it is necessary step by step to investigate a transition from the covariant Lagrangian formalism to the Hamiltonian one [7-9].

This work is a continuation of the researches which have been presented in the our previous articles [6-8]. Using the covariant Lagrangian of interaction of the electromagnetic field with a structural polarizable particle, the equations of motion, canonical and metric energy-momentum tensors have been obtained.

### 1. Total Lagrangian

The total interaction Lagrangian of the spin-1/2 particles with the electromagnetic field will be consists from the Lagrangian for free electromagnetic field  $L_{e-m}$ , the spinor or Dirac's field  $L_D$ , the interaction Lagrangian of the free electromagnetic field with the Dirac's field  $L_{int-D}$  and the Lagrangian which considers electric and magnetic polarizabilities of particles  $L_{\alpha_0\beta_0-D}$ :

$$L_{total-D} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \bar{\psi} \left( \frac{1}{2} i \gamma_\alpha \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\alpha + m \right) \psi - e (\bar{\psi} \gamma_\alpha \psi) A^\alpha + K_{\sigma\nu} \Theta^{\sigma\nu}, \quad (1)$$

where  $K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m} (\alpha_0 F_{\sigma\mu} F_\nu^\mu + \beta_0 \tilde{F}_{\sigma\mu} \tilde{F}_\nu^\mu)$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu = \overset{\leftarrow}{\partial}_\nu - \overset{\rightarrow}{\partial}_\nu$ ,  $\Theta^{\sigma\nu} = \frac{i}{2} \left( \bar{\psi} \gamma^\sigma \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\nu \psi \right)$ ,  $\psi$  is the wave function of spin-1/2 particles. In this expression  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ , where  $F_{\mu\nu}$  and  $\tilde{F}_{\mu\nu}$  are the tensors of the electromagnetic field,  $\alpha_0$  and  $\beta_0$  are electric and magnetic polarizabilities,  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  – Levi-Chevita antisymmetric tensor ( $\varepsilon^{0123} = 1$ ). The part of the Lagrangian with polarizabilities it is possible to rewrite as:

$$L^{(\alpha\beta)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = K_{\sigma\nu} \Theta^{\sigma\nu}, \quad (2)$$

where  $G^{\mu\nu}$  is antisymmetric tensor  $G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$  and equal

$$G^{\mu\nu} = -\frac{\partial L^{(\alpha\beta)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{4\pi}{m}((\alpha_0 + \beta_0)(F_\rho^\mu \Theta^{\rho\nu} - F_\rho^\nu \Theta^{\rho\mu}) - \beta_0 \Theta_\rho^\rho F^{\mu\nu}). \quad (3)$$

## 2. The equations of motion

For interaction of the spinor and electromagnetic fields the next system of equations are used:

$$-\frac{\partial L}{\partial A_\mu} + \partial_\gamma \frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma A_\mu)} = 0, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \psi} + \partial_\gamma \frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma \psi)} = 0, \quad (5)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} + \partial_\gamma \frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma \bar{\psi})} = 0, \quad (6)$$

where  $A_\mu$  is the vector-potential of the electromagnetic field.

From the Lagrangian (1) and expressions (4-6) we will be have the equations of motion for charged particle spin-1/2  $\alpha_0$ -electric and  $\beta_0$ -magnetic polarizabilities taking into account:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi - \partial_\mu G^{\mu\nu}, \quad (7)$$

$$(i\gamma^\nu \overrightarrow{\partial}_\nu - m)\psi = eA_\nu \gamma^\nu \psi - \frac{i}{2}(\partial^\nu K_{\sigma\nu} \gamma^\sigma)\psi - iK_{\sigma\nu} \gamma^\sigma \partial^\nu \psi, \quad (8)$$

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\partial}_\nu \gamma^\nu + m) = -e\bar{\psi} A_\nu \gamma^\nu - \frac{i}{2}\bar{\psi}(\partial^\nu K_{\sigma\nu} \gamma^\sigma) - i(\partial^\nu \bar{\psi})\gamma^\sigma K_{\sigma\nu}. \quad (9)$$

Using the equations (7-8) the Lagrangian (1) can be presented as the next formula:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\overrightarrow{D} - m)\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\overleftarrow{D} + m)\psi, \quad (10)$$

where

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu + ieA_\mu \gamma^\mu + K_{\sigma\nu} \gamma^\sigma \overrightarrow{\partial}^\nu,$$

$$\overleftarrow{D} = \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - ieA_\mu \gamma^\mu + \overleftarrow{\partial}^\nu K_{\sigma\nu} \gamma^\sigma.$$

With the help of the Lagrangian (10) and equations (7-8) the canonical energy-momentum tensor looks like

$$T_{can}^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}(\partial^\nu A_\rho) + \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi - g^{\mu\nu} L.$$



As a result will get

$$T_{can}^{\mu\nu} = -(F^{\mu\rho} + G^{\mu\rho})\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}G^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}. \quad (11)$$

Using an unambiguous of the energy-momentum tensor definition we will construct the metric energy-momentum tensor:

$$T_{metr}^{\mu\nu} = T_{can}^{\mu\nu} + \partial_\rho [(F^{\mu\rho} + G^{\mu\rho})A^\nu]. \quad (12)$$

Thus  $T_{metr}^{\mu\nu}$  reads as:

$$T_{metr}^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_\rho^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + G^{\mu\rho}F_\rho^\nu - j^\mu A^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}G^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \quad (13)$$

where  $j^\mu = \partial_\nu (F^{\nu\mu} + G^{\nu\mu})$ .

Extracting a part of the metric tensor responsible for the polarizabilities in the (12) we find that

$$T_{metr}^{(\alpha\beta)\mu\nu} = G^{\mu\rho}F_\rho^\nu - \partial_\rho G^{\mu\rho}A^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}G^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}. \quad (14)$$

Integrating by parts and using the definition  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  according to [10] in the rest frame of the particle we obtain the energy density of interaction for the particle with polarizabilities and electromagnetic field:

$$E = -\frac{2\pi}{m}\Theta^{00}(\alpha_0\vec{E}^2 + \beta_0\vec{H}^2),$$

where  $\Theta^{00}$  is the energy density of the particle spin-1/2.

## Conclusion

To assume the covariant Lagrangian of interaction of the electromagnetic field with a polarizable particle spin-1/2 as a basis in the Lagrangian covariant formalism the equations of motion have been found. The correlations between the covariant Lagrangian, canonical and metric energy-momentum tensors have been obtained. In the rest frame of the particle the energy density of interaction for the particle with polarizabilities and electromagnetic field have been found.

## References

1. Brodsky, S.J. The Electromagnetic Interaction of Composite Systems / S.J. Brodsky, J.R. Primack // Annals of Physics. – 1969. – Vol. 52. – P. 315–365.
2. Scherer, S. Virtual Compton scattering off the nucleon at low energies / S. Scherer, A. Yu Korchin, J.H. Koch // Phys. Rev. – 1996. – Vol. C54. – P. 904–916.

3. Levchuk, M.I. Gyration nucleon as one of the characteristics of its electromagnetic structure / M.I. Levchuk, L.G. Moroz // Vesti AN BSSR Ser.: fiz.–mat. nauk 1. – 1985. – P. 45–54.

4. L'vov, A.J. Dispersion Theory of Proton Compton Scattering in the First and Second Resonance Regions / A.J. L'vov, V.A. Petrun'kin // Phys. Rev. – 1997. – Vol. 55C. – P. 359–377.

5. Hutt, M.-Th. Compton Scattering by Nuclei / M.-Th. Hutt, A.J. L'vov, A.J. Milstein, M. Schumacher // Physics Reports. – 2000. – Vol. 323. – № 6. – P. 458–595.

6. Maksimenko, N.V. Phenomenological description polarizabilities of elementary particles in a field-theory / N.V. Maksimenko, L.G. Moroz // In Proc. 11 Intern. School on High Energy Physics and Relativistic Nucl. Phys. Dubna JINR D2–11707. – 1979. – P. 533–543.

7. Belousova, S.A. The description for spin polarizabilities based on the covariant Lagrangian / S.A. Belousova, N.V. Maksimenko // Proc. Of "OFTHEP'2000". Tver, Russia. – 2000. – P. 305–308, hep-ph/0009334.

8. Maksimenko, N.V. The electromagnetic characteristics of hadrons in the covariant Lagrangian approach / N.V. Maksimenko, O.M. Deruzhkova, S.A. Lukashevich // Proc. of International School-Seminar "Actual Problems of Particles Physics" (2001, Gomel) vol. II, Dubna. – 2002. – P. 145–156.

9. Babusci, D. Low-energy Compton scattering of polarized photons on polarized nucleons / D. Babusci, J. Jiordano, A.J. L'vov, J. Matone, A.N. Nathan // Phys. Rev. – 1998. – C58. – P. 1013.

**E.M. Ovsyuk<sup>1</sup>, Y.A. Voynova<sup>2</sup>, A.D. Koral'kov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin,  
Mozyr, Belarus

<sup>2</sup>Minsk Suvorov Military School, Minsk, Belarus

**P-NONINVARIANT EQUATION FOR SPIN 1/2 PARTICLE,  
TAKING INTO ACCOUNT OF THE EXTERNAL  
COULOMB FIELD**

Within the theory of relativistic wave equations with extended sets of Lorentz group representations, a new P-noninvariant 20-component wave equation for spin 1/2 particle was proposed. The quantum mechanical Dirac-like P-noninvariant equation is solved in presence of external Cou-

lomb field. It is shown that the energy spectrum for  $P$ -noninvariant spin 1/2 particle in external Coulomb field coincides with that for ordinary particle, though explicit form of wave function is different.

### 1. $P$ -noninvariant equation and spherical solutions

Within the theory of relativistic wave equations with extended sets of Lorentz group representations, a new  $P$ -noninvariant 20-component wave equation for spin 1/2 particle was proposed [1-3]. Let us study an elementary example of this model, first a free  $P$ -noninvariant equation for particle in spherical tetrad of Minkowski space in absence of external fields:

$$\left( i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta\phi} + i\gamma^5 M \right) \psi(x) = 0, \quad (1)$$

where the angular operator is determined by the formula

$$\Sigma_{\theta,\phi} = i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + i\sigma^{12}}{\sin\theta}.$$

We take substitution for wave function with quantum number  $\varepsilon, j, m$ : (using  $D$ -functions  $D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0) \equiv D_\sigma$ ):

$$\Psi_{\varepsilon jm}(x) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r} \begin{vmatrix} f_1(r) D_{-1/2} \\ f_2(r) D_{+1/2} \\ f_3(r) D_{-1/2} \\ f_4(r) D_{+1/2} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

We find four radial equations

$$\begin{aligned} \varepsilon f_3 - i \frac{d}{dr} f_3 - i \frac{\nu}{r} f_4 + i M f_1 &= 0, & \varepsilon f_4 + i \frac{d}{dr} f_4 + i \frac{\nu}{r} f_3 + i M f_2 &= 0, \\ \varepsilon f_1 + i \frac{d}{dr} f_1 + i \frac{\nu}{r} f_2 + i \sigma M f_3 &= 0, & \varepsilon f_2 - i \frac{d}{dr} f_2 - i \frac{\nu}{r} f_1 + i \sigma M f_4 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

in comparison with ordinary Dirac equation here the signs at  $M$  in equation 3 and 4 are different (note that  $\sigma = -1$ ).

For ordinary Dirac equation, we can diagonalize additionally space reflection operator. Conventional  $P$ -reflection operator in Cartesian tetrad  $\hat{\Pi}_C = i\gamma^0 \otimes \hat{P}$  after transforming to spherical basis takes the form

$$\hat{\Pi}_{sph} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \hat{P}. \quad (4)$$

From eigenvalues equation  $\hat{\Pi}_{sph} \Psi_{jm} = \Pi \Psi_{jm}$  we find two eigenvalues  $\Pi = \delta(-1)^j$  and corresponding restrictions on radial functions:

$$\Pi = \delta(-1)^{j+1}, \quad \delta = \pm 1, \quad f_4 = \delta f_1, \quad f_3 = \delta f_2. \quad (5)$$

However, these restrictions are not consistent with the system (3). Let us try to diagonalize another discrete operator  $\hat{\Delta}_{sph}$  (adding multiplier  $\gamma^5$ ):

$$\hat{\Delta}_{sph} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \hat{P}. \quad (6)$$

The eigenvalues equation  $\hat{\Delta}_{sph} \psi = \Delta \psi$  gives two eigenvalues and respective restrictions on radial functions:

$$\delta = \pm i, \quad \Delta = \delta(-1)^j, \quad f_4 = -\delta f_1, \quad f_3 = -\delta f_2. \quad (7)$$

Let us impose these constraints in the main radial system (3), they turn out to be consistent. They lead to 2-nd order equations:

$$\begin{aligned} \delta = +i, \\ \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \left( \frac{-iM}{\nu + iMr} + \frac{1}{r} \right) \frac{df_1}{dr} + \left( -\frac{i\varepsilon}{r} - \frac{\nu^2}{r^2} - M^2 - \frac{\varepsilon M}{\nu + iMr} + \varepsilon^2 \right) f_1 = 0, \\ \frac{d^2 f_2}{dr^2} + \left( \frac{iM}{\nu - iMr} + \frac{1}{r} \right) \frac{df_2}{dr} + \left( \frac{i\varepsilon}{r} - \frac{\nu^2}{r^2} - M^2 - \frac{\varepsilon M}{\nu - iMr} + \varepsilon^2 \right) f_2 = 0; \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta = -i, \\ \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \left( \frac{iM}{\nu - iMr} + \frac{1}{r} \right) \frac{df_1}{dr} + \left( -\frac{i\varepsilon}{r} - \frac{\nu^2}{r^2} - M^2 + \frac{\varepsilon M}{\nu - iMr} + \varepsilon^2 \right) f_1 = 0, \\ \frac{d^2 f_2}{dr^2} + \left( \frac{-iM}{\nu + iMr} + \frac{1}{r} \right) \frac{df_2}{dr} + \left( \frac{i\varepsilon}{r} - \frac{\nu^2}{r^2} - M^2 + \frac{\varepsilon M}{\nu + iMr} + \varepsilon^2 \right) f_2 = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Here we have differential equations for confluent Heun functions.

Now, let us take into account the presence of external Coulomb field, assuming that anomalous magnetic moment equals to zero. Then we get the following 2-nd order equations

$$\delta = +i,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{-iM}{iMr + \nu} \right] \frac{df_1}{dr} + \\
& + \left[ \frac{2\varepsilon\alpha\nu - \alpha M - i\varepsilon\nu}{\nu r} + \frac{\alpha^2 - \nu^2}{r^2} + \varepsilon^2 - M^2 - \frac{M(-iM\alpha + \varepsilon\nu)}{\nu(iMr + \nu)} \right] f_1 = 0, \\
& \frac{d^2 f_2}{dr^2} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{iM}{-iMr + \nu} \right] \frac{df_2}{dr} + \\
& + \left[ \frac{2\varepsilon\alpha\nu - \alpha M + i\varepsilon\nu}{\nu r} + \frac{\alpha^2 - \nu^2}{r^2} + \varepsilon^2 - M^2 - \frac{M(iM\alpha + \varepsilon\nu)}{\nu(-iMr + \nu)} \right] f_2 = 0; \quad (10) \\
& \delta = -i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{iM}{-iMr + \nu} \right) \frac{df_1}{dr} + \\
& + \left[ \frac{2\varepsilon\alpha\nu + \alpha M - i\varepsilon\nu}{\nu r} + \frac{\alpha^2 - \nu^2}{r^2} + \varepsilon^2 - M^2 + \frac{M(iM\alpha + \varepsilon\nu)}{\nu(-iMr + \nu)} \right] f_1 = 0, \\
& \frac{d^2 f_2}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{-iM}{iMr + \nu} \right) \frac{df_2}{dr} + \\
& + \left[ \frac{2\varepsilon\alpha\nu + \alpha M + i\varepsilon\nu}{\nu r} + \frac{\alpha^2 - \nu^2}{r^2} + \varepsilon^2 - M^2 + \frac{M(-iM\alpha + \varepsilon\nu)}{\nu(iMr + \nu)} \right] f_2 = 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Here again we have differential equations for confluent Heun functions.

## 2. Studying differential equation

Note the symmetry  $M \rightarrow -M$  between two pairs of equations. Also we see that equations for functions  $f_1$  and  $f_2$  are complex conjugate to each other. Therefore, in fact we can study only one equation. Let it be equation for  $f_1$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{-iM}{iMr + \nu} \right] \frac{df_1}{dr} + \\
& + \left[ \frac{2\varepsilon\alpha\nu - \alpha M - i\varepsilon\nu}{\nu r} + \frac{\alpha^2 - \nu^2}{r^2} + \varepsilon^2 - M^2 - \frac{M(-iM\alpha + \varepsilon\nu)}{\nu(iMr + \nu)} \right] f_1 = 0.
\end{aligned}$$

It is convenient to use the variable  $x = Mr$ , then we get

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x - i\nu} \right) \frac{df_1}{dx} + \left( \frac{2E\alpha - \gamma - iE}{x} - \frac{\Gamma^2}{x^2} + E^2 - 1 + \frac{\gamma + iE}{x - i\nu} \right) f_1 = 0, \quad (12)$$

where  $E = \frac{\varepsilon}{M}$ ,  $\Gamma^2 = \nu^2 - \alpha^2$ ,  $\gamma = \alpha / \nu$ . We find behavior of solutions near singular points:

$$x \rightarrow i\nu, \quad f_1 = (x - i\nu)^\rho, \quad \rho = 0, 2;$$

$$x \rightarrow 0, \quad f_1 = x^A, \quad A = \pm\Gamma^2.$$

In the variable  $y = x^{-1}$ , equation in vicinity of  $y = 0$  reads

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{d}{dy} + \frac{E^2 - 1}{y^4} \right) f_1 = 0;$$

therefore, we conclude that the singular point  $y = 0$  is irregular of the rank 2.

In eq. (12) we change the variable  $y = -ix / \nu$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f_1}{dy^2} + \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1} \right) \frac{df_1}{dy} + \\ & + \left[ \frac{\nu(E + 2iE\alpha - i\gamma)}{y} - \frac{\Gamma^2}{y^2} - \nu^2(-1 + E^2) - \frac{\nu(-i\gamma + E)}{y-1} \right] f_1 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

We search solutions in the form  $f_1 = y^A (y-1)^B e^{Cy} f(y)$ , getting for  $f(y)$  the following equation

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f}{dy^2} + \left( 2C + \frac{2A+1}{y} + \frac{2B-1}{y-1} \right) \frac{df}{dy} + \\ & + \left[ \frac{-2AB - B + A + \nu E - i\nu\gamma + 2i\nu E\alpha + 2AC + C}{y} + \frac{A^2 - \Gamma^2}{y^2} + \right. \\ & \left. + C^2 - \nu^2 E^2 + \nu^2 + \frac{B - \nu E + 2BC - A + 2AB + i\nu\gamma - C}{y-1} + \frac{B(B-2)}{(y-1)^2} \right] f = 0. \end{aligned}$$

We should impose restrictions

$$A = \pm\Gamma, \quad B = 0, 2, \quad C = \pm\nu\sqrt{-1 + E^2}$$

to bound states may correspond the values

$$B = 0, \quad A = +\Gamma, \quad C = -i\nu\sqrt{1 - E^2}, \quad f_1 \propto x^{+\Gamma} e^{-\sqrt{1-E^2}x} f(y). \quad (14)$$

Equation for  $f(y)$  becomes simpler

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \left( 2C + \frac{2A+1}{y} + \frac{2B-1}{y-1} \right) \frac{df}{dy} +$$

$$+ \left[ \frac{-2AB - B + A + \nu E - i\nu\gamma + 2i\nu E\alpha + 2AC + C}{y} + \frac{B - \nu E + 2BC - A + 2AB + i\nu\gamma - C}{y-1} \right] f = 0;$$

it may be identified with canonical form of confluent Heun equation

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \left( -t + \frac{c}{z} + \frac{d}{z-1} \right) \frac{dH}{dz} + \left( -\frac{\lambda}{z} + \frac{\lambda - ta}{z-1} \right) H = 0. \quad (15)$$

Its parameters are given by relations

$$t = -2C = 2i\nu\sqrt{1-E^2}, \quad c = 2A+1 = 2\Gamma+1, \quad d = 2B-1 = -1, \quad (16)$$

and

$$\begin{aligned} \lambda &= 2AB + B - A - \nu E + i\nu\gamma - 2i\nu E\alpha - 2AC - C = \\ &= -\Gamma - \nu E + i\nu\gamma - 2i\nu E\alpha + 2\Gamma i\nu\sqrt{1-E^2} + i\nu\sqrt{1-E^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

From identity

$$\begin{aligned} \lambda - ta &= B - \nu E + 2BC - A + 2AB + i\nu\gamma - C \Rightarrow \\ &2i\nu\sqrt{1-E^2}a = -2i\nu E\alpha + 2\Gamma i\nu\sqrt{1-E^2} \end{aligned} \quad (18)$$

we find expression for parameter  $a$ :

$$a = -\frac{E\alpha}{\sqrt{1-E^2}} + \Gamma, \quad \Gamma = \sqrt{(j+1/2)^2 - \alpha^2}. \quad (19)$$

We may determine so called transcendental confluent Heun function, by imposing the constraint  $a = -n$ , it give the quantization rule

$$\frac{E\alpha}{\sqrt{1-E^2}} = n + \sqrt{(j+1/2)^2 - \alpha^2} \equiv N \Rightarrow E = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{N^2}}}. \quad (20)$$

We conclude that the energy spectrum for  $P$ -noninvariant spin 1/2 particle in external Coulomb field coincides with that for ordinary particle, though explicit form of wave function is different.

## References

1. Pletjukhov, V.A. Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom / V.A. Pletjukhov, V.M. Red'kov, V.I. Strazhev. – Minsk: Belarusian Science, 2015. – 328 p.
2. Elementary particles with internal structure in external field / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, V. Balan, O.V. Veko, V.M. Red'kov. – Vol. I. General formalism. – Nova Science Publishers, Inc. USA, 2018. – 404 c.; Vol. II. Physical problems. – Nova Science Publishers, Inc. USA, 2018.

3. On  $P$ -noninvariant wave equation for spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment, interaction with external fields / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov.

**A.A. Pankov<sup>1,2,3</sup>, I.A. Serenkova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

<sup>2</sup>The ICTP Affiliated Centre at the Gomel State Technical University

<sup>3</sup>Institute for Nuclear Problems, Belarusian State University,  
Minsk, Belarus

## **FIRST RESULTS ON PRECISION CONSTRAINTS ON CHARGED BOSON MIXING FROM DIBOSON PRODUCTION SEARCHES WITH ATLAS AT LHC AT 13 TEV**

### **Introduction**

Many new physics (NP) scenarios beyond the Standard Model (SM) [1], including superstring and left-right-symmetric models, predict the existence of new neutral and charged gauge bosons, which might be light enough to be accessible at current and/or future colliders [2]. The search for these new neutral  $Z'$  and charged  $W'$  gauge bosons is an important aspect of the experimental physics program of high-energy colliders. In this note we concentrate on the latter one while the former one has been studied recently in [3]. A  $W'$  boson, if lighter than about 5 TeV, could be discovered at the LHC with 13 TeV in dilepton process  $pp \rightarrow W' \rightarrow \nu l + X$  ( $l = e, \mu$ ).

After the discovery of  $W'$  boson at the LHC via the dilepton process, some diagnostics of its couplings and  $W$ - $W'$  mixing needs to be performed in order to identify the underlying theoretical framework. In this paper we investigate the implications of the ATLAS data [4] in the diboson production channel

$$pp \rightarrow W' \rightarrow WZ + X \quad (1)$$

to probe the  $W'$  boson that arises, e.g. in a popular model with extended gauge sector proposed in [5] and called as Sequential Standard Model (SSM). The presented analysis is based on  $pp$  collision data at a center-of-mass energy 13 TeV, collected by the ATLAS ( $36.1 \text{ fb}^{-1}$ ) experiment at the LHC. In particular, the data is used to probe the  $W$ - $W'$  mixing.



## 1. Resonant production cross section

In many extended gauge models, while the couplings to fermions are not much different from those of the SM, the  $W'WZ$  coupling is substantially suppressed with respect to that of the SM. In fact, in the SSM the  $W$ - $W'$  mixing factor  $\xi$  can be written as  $\xi = C \cdot (M_W / M_{W'})^2$  where  $C$  the coupling strength scaling factor. We will set cross section limits on such  $W'$  as a function of the mass  $M_{W'}$  and  $\xi$ .

The cross section for the narrow  $W'$  state production and subsequent decay into a  $WZ$  pair needed in order to estimate the expected number of  $W'$  events can be written as

$$\sigma^{W'}(pp \rightarrow WZ + X) = \int dM \int dy \int dz \frac{d\sigma^{W'}}{dM dy dz}, \quad (2)$$

where integration has been done over the relevant fiducial phase space. The number of signal ( $W'$ ) events for a narrow  $W'$  resonance state can be written as follows

$$N^{W'} = L \cdot \varepsilon \cdot \sigma^{W'}(pp \rightarrow WZ + X) \equiv L \cdot \varepsilon \cdot A_{WZ} \cdot \sigma(pp \rightarrow W') \times Br(W' \rightarrow WZ). \quad (3)$$

Here,  $L$  denotes the integrated luminosity, and the overall kinematic and geometric acceptance times trigger, reconstruction and selection efficiencies,  $\varepsilon \cdot A_{WZ}$ , is defined as the number of signal events passing the full event selection divided by the number of generated events. Finally,  $\sigma(pp \rightarrow W') \times Br(W' \rightarrow WZ)$ , is the (theoretical) total production cross section times branching ratio extrapolated to the total phase space. In the calculation of the total width  $\Gamma_{W'}$ , we included the following SM final states:  $W' \rightarrow \nu l, q q', WZ$ . For the large  $W'$  masses there is an enhancement that cancels the suppression due to tiny  $W$ - $W'$  mixing parameter  $\xi$  as can be seen from the expression for the partial width of decay channel  $W' \rightarrow WZ$  [5]:

$$\Gamma_{W'}^{WZ} = \frac{\alpha}{48} \cot^2 \theta_W M_{W'} \frac{M_{W'}^4}{M_Z^2 M_W^2} \left[ \left( 1 - \frac{M_Z^2 - M_W^2}{M_{W'}^2} \right)^2 - 4 \frac{M_W^2}{M_{W'}^2} \right]^{3/2} \left[ 1 + 10 \left( \frac{M_W^2 + M_Z^2}{M_{W'}^2} \right) + \frac{M_W^4 + M_Z^4 + 10 M_W^2 M_Z^2}{M_{W'}^4} \right]$$

For a fixed mixing factor  $\xi$  and at large  $M_{W'}$ , where  $\Gamma_{W'}^{WZ}$  dominates over contribution induced by the fermion channels, the total width increases very rapidly with the mass  $M_{W'}$ , because of the quintic dependence on the  $W'$  mass. In this case, the  $WZ$  mode becomes dominant and  $Br(W' \rightarrow WZ) \rightarrow 1$ , while the fermionic decay channels are increasingly suppressed as demonstrated in Figure 1.

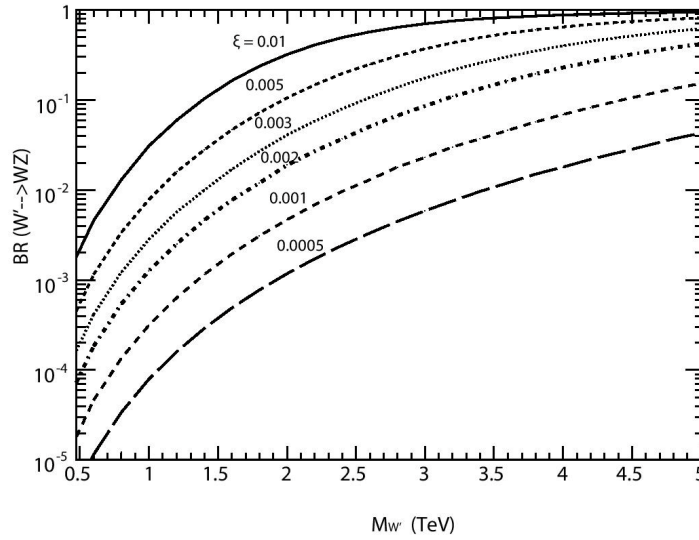


Figure 1 – Branching fraction  $Br(W' \rightarrow WZ)$  vs  $M_{W'}$  for SSM. Labels attached to the curves correspond to an array of values of mixing factor  $\xi$  ranging over the set  $\{0,0005, 0,001, 0,002, 0,003, 0,005, 0,01\}$

Further contributions of decays involving Higgs and/or gauge bosons and supersymmetric partners (including sfermions), which are not accounted for  $\Gamma_{W'}$ , could increase  $\Gamma_{W'}$  by a model-dependent amount, as large as 50% .

## 2. Numerical analysis and concluding remarks

Here, we are making an analysis, employing the most recent measurements of diboson processes provided by the experimental collaboration ATLAS. In particular, for  $W'$  we compute the LHC  $W'$  production cross-section multiplied by the branching ratio into  $WZ$  bosons,  $\sigma(pp \rightarrow W') \times Br(W' \rightarrow WZ)$  as a function of two parameters  $(M_{W'}, \xi)$ , and compare it with the limits established by the ATLAS experiment [4] analyzed the  $WZ$  production in process (1) through the semileptonic and hadronic final states. Figure 2 shows the observed and expected 95% C.L. upper limits on the production cross section times the branching fraction for  $W' \rightarrow WZ$  as a function of  $W'$  mass. The data analyzed comprises  $pp$  collisions at 13 TeV, recorded by the ATLAS ( $36.1 \text{ fb}^{-1}$ ) detector at the LHC [4]. Also shown are theoretical production cross sections,  $\sigma(pp \rightarrow W') \times Br(W' \rightarrow WZ)$ , for  $W'$ , calculated from PYTHIA 6.409 adapted for such kind of analysis.

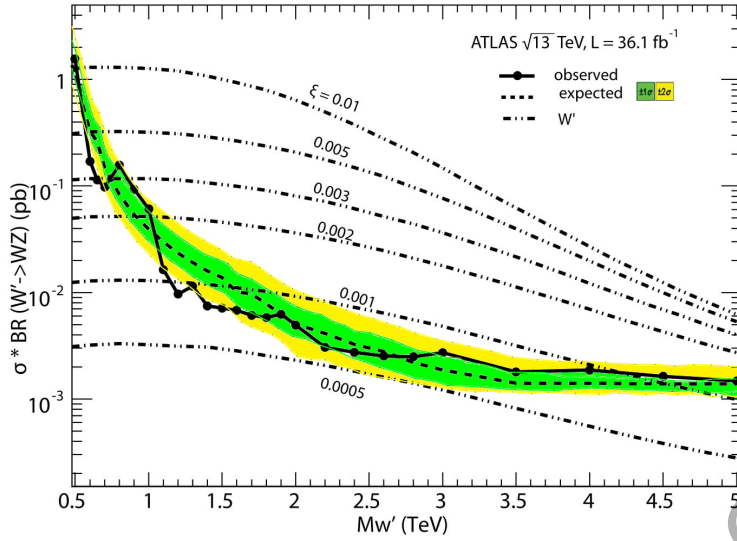


Figure 2 – Observed and expected 95% C.L. upper limits on the production cross section times the branching fraction for  $W' \rightarrow WZ$  as a function of  $W'$  mass. Theoretical production cross sections  $\sigma(pp \rightarrow W') \times Br(W' \rightarrow WZ)$  are calculated from PYTHIA 6,409, and given by dash-dotted curves

Higher-order QCD corrections for the SM and  $W'$  boson cases were estimated using a K-factor. The intersection points of the expected (and observed) upper limits on the production cross section with these theoretical cross sections for various  $\xi$  give the corresponding lower bounds on  $(M_{W'}, \xi)$  displayed in Figure 3.

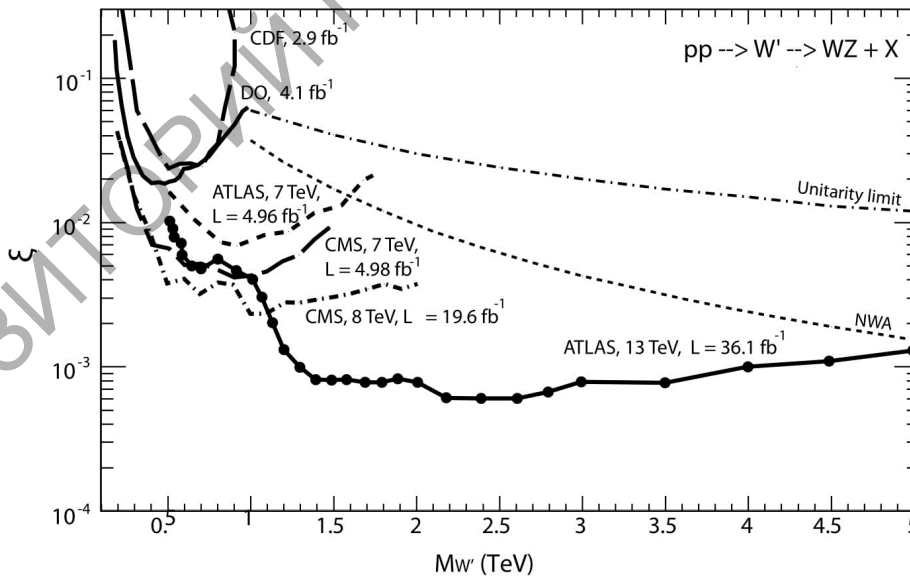


Figure 3 –  $W'$  exclusion regions in the two-dimensional plane of  $(M_{W'}, \xi)$  obtained from CDF and D0 collaborations at Tevatron and LHC data at different energies and luminosities. Also, unitarity and narrow width approximation (NWA) constraints are displayed

In Figure 3, we collect limits on the  $W'$  parameters, starting with the Tevatron studies of diboson  $WZ$  pair production. Interestingly, Figure 3 shows that at heavy  $W'$  masses, the limits on  $\xi$  obtained from the ATLAS diboson resonance production data at the LHC at 13 TeV are much stronger than those derived from the global analysis of the precision electroweak data which yields  $|\xi| < 0.01$ .

In conclusion, the current paper presents an analysis of  $W$ - $W'$  mixing in the process of  $WZ$  production. The analysis is based on  $pp$  collision data at a centre-of-mass energy of 13 TeV, collected by the ATLAS experiment at the LHC.

We analyze the popular SSM model and determine limits on its mass of  $W'$  as well as on the  $W$ - $W'$  mixing (angle) factor  $\xi$ . We present the  $W'$  exclusion region in the  $(M_{W'}, \xi)$  plane for the first time by using these data. The exclusion limits represent a large improvement over previously published results obtained at the Tevatron, and also over precision electroweak data as well as results obtained from proton-proton collisions at the LHC at 7 TeV and 8 TeV. These are the most stringent exclusion limits to date on the  $(M_{W'}, \xi)$  plane. Further improvement on the constraining of this mixing can be achieved from the analysis of data which will be collected at higher luminosity at Run III and HL-LHC options.

### References

1. Tanabashi, M. Particle Data Group / M. Tanabashi [et al.] // Phys. Rev. D. – 2018. – Vol. 98. – 030001 (1898 pp).
2. Langacker, P. The Physics of Heavy  $Z'$  Gauge Bosons / P. Langacker // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81. – P. 1199–1288.
3. Osland, P. Probing  $Z$ - $Z'$  mixing with ATLAS and CMS resonant diboson production data at the LHC at  $\sqrt{s} = 13$  TeV / P. Osland, A.A. Pankov and A.V. Tsytrinov // Phys. Rev. D. – 2017. – Vol. 98. – 055040 (7 pp).
4. Aaboud, M. Search for new high-mass phenomena in the dilepton final state using  $36.1 \text{ fb}^{-1}$  of proton-proton collision data at  $\sqrt{s} = 13$  TeV with the ATLAS detector / M. Aaboud [et al.] [ATLAS Collaboration] // JHEP – 2017. – Vol. 1710. – 182 (54 pp).
5. Altarelli, G. Searching for New Heavy Vector Bosons in  $p\bar{p}$  Colliders / G. Altarelli, B. Mele and M. Ruiz-Altaba // Z. Phys. C. – 1989. – Vol. 45. – P. 109–121.

**M.A. Serdyukova**

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus

**THE PRIMARY NUCLEOSYNTHESIS IN CYCLIC  
NON-EXPANDING UNIVERSE INVOLVING LONG-LIVED  
RAPIDLY MOVING PRIMORDIAL NEUTRONS**

In a relativistic generalization of the theory of gravitation, we preserve the Newtonian concept of gravity as a force field and develop it on the basis of the canonical linear theory of a massive spinless field  $\phi(x)$  satisfying the equation

$$\left(\square - \kappa^2 - \frac{2\pi G_N}{c^2} \vartheta\right)\phi = 0,$$

where, in the presence of the source of the field consisting of massive gravitating particles,

$$\vartheta = \sum_a m_a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a).$$

We motivate this task with the unresolved challenges of the “dark energy” and “dark matter” in modern observational cosmology based on the general theory of relativity that is devoid of special-relativistic laws of conservation for the energy, momentum, and angular momentum.

As a result, in the case of a universe completely filled with uniform dustlike matter, when the background field  $\phi(\mathbf{r}, t) = \psi(t)$ , the alternative cyclic scenario with the period of about 110 Gyr of the evolution of eternal universe without expansion or contraction is aroused. The first half of each cyclic epoch is characterized by the increase in the inertial masses, from zero to the maximum, equal to 250% of their present values, of the primordial ultrarelativistic elementary particles, and then of atoms, stars, and other cosmic bodies as they form.

Simultaneously with the stretching of the energy spectra of quantum systems, their energy levels are also broadened with a factor

$$\psi^2(t) = \frac{\sin^2 \Omega t}{\sin^2 \Omega t_0}. \quad (1)$$

On the contrary, in accord with this coefficient, as the rest energy of these systems decreases in the course of the second half-cycle, their energy levels become narrower. Therefore from the law of energy evolution

$$\mathcal{E}_n(t) = \mathcal{E}_n^0 \frac{\sin^2 \Omega t}{\sin^2 \Omega t_0} \quad (2)$$

and the quantum mechanical uncertainty relation between the width of energy levels  $\Delta \mathcal{E}$  and the lifetime of excited states  $\Delta \tau$ ,

$$\Delta \tau \cdot \Delta \mathcal{E} \sim \hbar,$$

it follows that the lifetime of a system in bounded state depends on the age  $t$  of cycle in such a way that

$$\Delta \tau(t) \sin^2 \Omega t = \text{const.} \quad (3)$$

In this case we find from (3) that the half-life of unstable particles or nuclei varies with cosmic time as follows:

$$T^{1/2}(t) = T_0^{1/2} \frac{\sin^2 \Omega t_0}{\sin^2 \Omega t}.$$

Putting the look-back time  $t_{ret}$  by setting  $t = t_0 - t_{ret}$ , one can write from this for distant decaying particles observed at present time  $t_0$ :

$$T^{1/2}(t_{ret}) = T_0^{1/2} \frac{\sin^2 \Omega t_0}{\sin^2 \Omega (t_0 - t_{ret})}. \quad (4)$$

In agreement with the probabilistic nature of a radioactive decay of individual nucleus, the number  $dN$  of nuclei decayed at a given epoch  $t$  during small time interval  $dt$  is proportional to the number  $N(t)$  of presented undecayed nuclei with the time-dependent factor (1), so that

$$dN = -\frac{\ln 2}{T_0^{1/2} \sin^2 \Omega t_0} \sin^2 \Omega t N(t) dt. \quad (5)$$

Expressed in terms of the fractional quantity of undecayed nuclei, the modified law of a radioactive decay obtained by integrating the equation (5) has the form

$$\frac{N(t)}{N_{ref}} = \exp \left[ \frac{-\ln 2}{2 T_0^{1/2} \sin^2 \Omega t_0} \left( t - t_{ref} - \frac{\sin 2\Omega t - \sin 2\Omega t_{ref}}{2\Omega} \right) \right]. \quad (6)$$

Here  $t_{ref}$  denotes the reference time, that is, some fixed instant of standard cosmic time given at a certain epoch, with respect to which the registration of undecayed nuclei in the previous time and thereafter is carried out; the number of undecayed nuclei  $N_{ref} = N(t_{ref})$  at this instant is assumed to be given.

For further discussion of this law, it is convenient to choose in place of  $t$  the time coordinate  $t' = t - t_{\text{ref}}$  with origin at a given reference instant  $t_{\text{ref}}$ . Dropping the prime on the introduced new time coordinate, we rewrite the cosmological law of radioactive decay (6) in the form

$$\frac{N(t)}{N_{\text{ref}}} = \exp \left\{ \frac{-\ln 2}{2 T_0^{1/2} \sin^2 \Omega t_0} \left[ t - \frac{\sin 2\Omega(t_{\text{ref}} + t) - \sin 2\Omega t_{\text{ref}}}{2\Omega} \right] \right\}. \quad (7)$$

The idea of the special role of free neutrons in the primary nucleosynthesis belongs, as is known, to George Gamow and his collaborators [1], [2], [3]. Among many exotic assumptions about the state of primordial matter in the model of the expanding universe, Gamow's hypothesis adds the necessary condition that the baryonic matter in the earliest universe should have consisted primarily of free neutrons. The second exotic feature of the theory of a primary nucleosynthesis developed on Gamow's idea is the presentation of too rigid requirements to physical conditions in the very early universe, in which "the production of elements must have been essentially complete in a time of the order of magnitude of the neutron decay lifetime" [3], that is, during the period just over 12,8 minutes.

Refusing the big-bang scenario of the universe evolution, we will nevertheless try to reconsider Gamow's idea of the special role of primordial neutrons in primary nucleosynthesis with reference to the alternative model of the cyclic universe proposed here. For obvious reasons, here we cannot consider this problem numerically in details. We will focus our attention only on the possibility of having a sufficient number of free neutrons in the early epoch of the evolutionary cycle for rather a long period of time, and then try to determine the physical mechanisms that could contribute to the efficiency of primary nucleosynthesis involving neutrons to provide a cosmic abundance of light elements, which is now observed.

Let us first consider the decay of unstable particles in a short period of time at the very end of one of the evolutionary cycles and at the very beginning of the next. At a junction of two cycles, it is convenient to count down the number of undecayed particles directly from the instant of zeroing of their mass. So, setting in general formula (7)  $t_{\text{ref}} = 0$ , we write

$$\frac{N(t)}{N(0)} = \exp \left[ \frac{-\ln 2}{2 T_0^{1/2} \sin^2 \Omega t_0} \left( t - \frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega} \right) \right]. \quad (8)$$

The general picture of the decay of unstable particles at the junction of two cyclic epochs, calculated by using the equation (8), is shown in Figure

1 on the example of the decay of neutrons, whose current half-life is 613,9 seconds [4].

The slowing decay of these unstable particles at the very end of previous cycle is shown in a small section of the curve in this figure to the left of  $t = 0$ . The continuation of this curve shows the slowly accelerating decay of the primordial neutrons left over from the previous cycle after the complete disintegration of the nuclei and survived the times of the radiation-like state of the matter.

In accordance with figure 1, half of the primordial neutrons decays in the course of 300 thousand years after the beginning of the cycle (instead of present scanty 613,9 seconds!). As can be seen from the same figure, neutrons remain almost stable in the course of the first 100 thousand years.

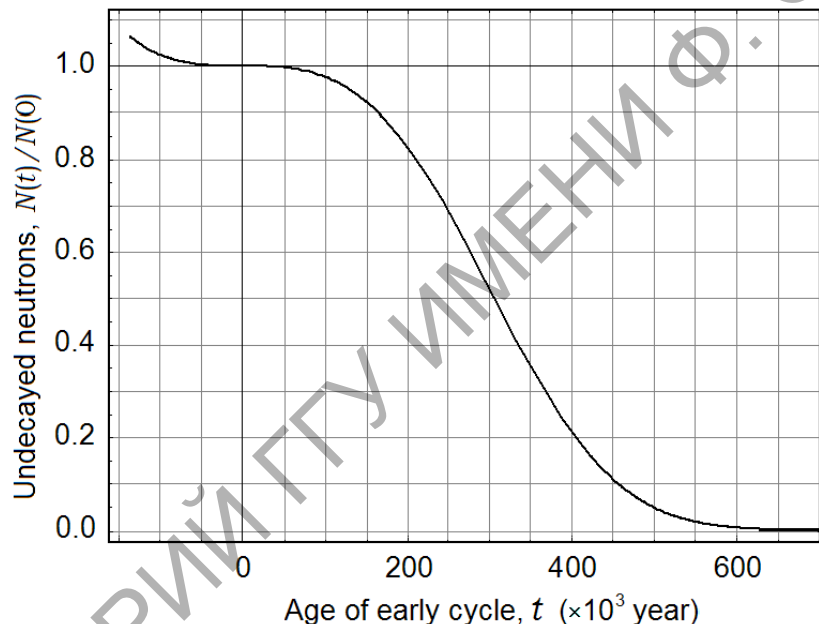


Figure 1 – The decay of primordial neutrons at the junction of two cyclic epochs

It should also be remembered that all particles at the very beginning of the cycle are extreme relativistic. Therefore, along with a large lifetime of neutrons and other unstable particles including intermediate unstable radionuclides, more frequent collisions occur between them. These two circumstances should obviously provide an effective mechanism for involving neutrons in the primary nucleosynthesis. As a result, the whole idea acquires a more solid theoretical basis instead of Gamow's special hypothesis [1] about the neutron dominance in early baryonic matter.

Therefore, because of the long lifetime and frequent collisions of rapidly moving free neutrons and intermediate unstable nuclides in early cyclic epoch, light primordial nuclei, such as  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ , and heavier, dur-



ing the first 450 thousand years could have been synthesized, quite effectively to reach the abundances that are now observed.

### References

1. Gamov, G. Expanding Universe and the origin of elements / G. Gamov // *Phys. Rev.* – 1946. – Vol. 70. – P. 572–573.
2. Alpher, R.A. The origin of the chemical Elements / R.A. Alpher, H. Bethe, G. Gamov // *Phys. Rev.* – 1948. – Vol. 73. – P. 803–804.
3. Alpher, R.A. A neutron-capture theory of the formation and relative abundance of the elements / R.A. Alpher // *Phys. Rev.* – 1948. – Vol. 74. – P. 1577–1589.
4. Audi, G. The nubase evaluation of nuclear and decay properties / G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot, A.H. Wapstra // *Nuclear Physics. A.* – 2003. – Vol. 729. – P. 3–128.

**M.A. Serdyukova**

Frantsysk Skaryna State University, Gomel, Belarus

### THE LAW OF ENERGY-MOMENTUM CONSERVATION OF MASSIVE SPIN-ZERO GRAVITATIONAL FIELD

Turning to the 20-year history of the theoretical study of the cosmological problem of dark energy and analyzing its current state, we will not find the gravitational field among discussed its probable carriers. The first thing that comes to mind about the possible reasons for the lack of progress in understanding the nature of this mysterious energy is the absence in general relativity of the law of conservation of energy, as well as the questionable status of energy itself as a significant physical concept. This theory underlying the big-bang cosmology objectively does not allow us to investigate the local as well as the large-scale and global energy problems in the universe (a brief remark on this subject is contained also in [1], pp. 83–84). Since gravity is the dominant interaction on the scale of the Universe, this circumstance, unfortunately, significantly paralyzed the evidence base of modern cosmology and predetermined the failure of two decades of brainstorming the problem of the physical nature of “dark energy”.

The principal impossibility of a mathematically rigorous formulation of the law of energy conservation for the gravitational field in general relativity was first noted by David Hilbert as a characteristic feature of this theory

right after its advent [2]. The proof of Hilbert's conjecture about the failure of this law in the newfound theory was immediately obtained by Emmy Noether in her famous article [2] as a special case along with the loss of other conservation laws in this theory of gravitation.

Unlike the metric theories of gravitation, such as general relativity and the Brans–Dicke scalar–tensor theory, the Poincaré-invariance of the proposed gauge invariant scalar model of the massive gravitational field based on the Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{c^4}{2\pi G_N} \left( \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \kappa^2 \phi^2 \right) - c^2 \sum_a m_a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \phi^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (1)$$

quadratic in field variable  $\phi(x)$  and its first derivatives, enables us to formulate, in accordance with Noether's theorem, all ten special-relativistic conservation laws. Among them, a clear formulation of the law of energy conservation for gravitating systems with a positive-definite energy density of the gravitational field is of fundamental importance for the whole theory and its further cosmological applications.

Here we use the Minkowski metric tensor  $\eta^{\mu\nu}$  with signature  $(-+++)$ . Therefore the line element  $ds$  will be determined in terms of the coordinates  $dx^\mu = (cdt, dx^i)$  of the corresponding infinitesimal displacement in space-time by the expression

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

In the case of a free real scalar field  $\phi(x)$  described by the first term in Lagrangian density (1), the canonical energy-momentum tensor

$$T_\nu^\mu = \mathcal{L} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi$$

leads immediately to the symmetric expression

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{\pi G_N} \left( \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \left( \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi + \kappa^2 \phi^2 \right) \eta_{\mu\nu} \right), \quad (2)$$

as it should be for the spin-zero field. Using the definition

$$g_\mu = -2c^2 \frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi = (Q, \mathbf{g})$$

of the strength four-vector of the field in terms of the logarithmic derivatives of the field variable  $\phi(x)$ , we can represent the energy-momentum tensor (2) in the form

$$T_{\mu\nu} = \frac{\phi^2}{4\pi G_N} \left( g_{\mu}g_{\nu} - \frac{1}{2} \left( g_{\sigma}g^{\sigma} + 4c^4 \varkappa^2 \right) \eta_{\mu\nu} \right). \quad (3)$$

The densities of energy, energy flux, momentum, and momentum flux of the field appear in this formalism in the usual way as, respectively, the following components of the energy-momentum tensor:

$$W = T_{00} = T^{00}, \quad S_i = -cT_{0i} = cT^{0i}, \quad G_i = -c^{-1}T_{i0} = c^{-1}T^{i0}, \quad \sigma_{ij} = T_{ij} = T^{ij}.$$

Thus, from (3) we obtain all four dynamical characteristics of the field listed above:

$$W = \frac{\phi^2}{8\pi G_N} \left( \mathbf{g}^2 + Q^2 + 4c^4 \varkappa^2 \right), \quad (4)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c\phi^2}{4\pi G_N} Q\mathbf{g}, \quad (5)$$

$$\mathbf{G} = \frac{\phi^2}{4\pi G_N c} Q\mathbf{g}, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\phi^2}{4\pi G_N} \left( g_i g_j + Q^2 \delta_{ij} \right) - W \delta_{ij}. \quad (7)$$

Now we turn to the equation of motion of a test particle in the field expressed in the covariant four-dimensional form:

$$c^2 \frac{d(m \phi^2 u^\mu)}{ds} = m \phi^2 g^\mu, \quad (8)$$

where  $u^\mu = dx^\mu/ds$  is the dimensionless four-vector of the velocity of a particle. This equation determines the rate of variation of the four-vector

$$p^\mu = cm\phi^2 u^\mu = \left( \frac{1}{c} \mathcal{E}, \quad \mathbf{p} \right) \quad (9)$$

consisting of the canonical expressions for the energy and momentum of a particle respectively, if we keep in mind the second term of the total Lagrangian (1). These are the same expressions as those introduced by Nordstroem [3]:

$$\mathcal{E} = \frac{c^2 m \phi^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (10)$$

$$\mathbf{p} = \frac{m \phi^2 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11)$$

One should note that the same energy content factor  $\phi^2 = e^{\Phi/c^2}$  is presented in formulas (10), (11) for the energy and momentum of a particle moving in the field as well as in expressions (4)–(7) for the corresponding physical quantities of the field itself. It is to be borne in mind, however, that in the Nordstroem's model of the gravitational field this is not the case. The mass in this theory depends on the gravitational potential as in (10), (11), by the factor  $e^{\Phi/c^2}$ , whereas the energy and energy flux of the field itself are proportional to  $e^{2\Phi/c^2}$  (for details, see in [4]).

From the exact expression (10), it is useful to get an approximate formula for estimating the small changes in the energy content of particles moving in the field. Taking the traditional convenient gauge condition  $\Phi = 0$  for the gravitational potential at infinity, we rewrite the expression for the energy of particle (10) in the nonrelativistic and weak-field approximation, linear in small quantities  $v^2/c^2$  and  $\Phi/c^2$ :

$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\Phi. \quad (12)$$

In general relativity, small local perturbations of the metric corresponding to a weak gravitational field are usually considered as a spin-2 field embedded in the flat or smoother background spacetime. In the simple case of the flat space-time background metric, such an approximate theory becomes compatible with the conservation laws and leads exactly to the same approximate expression (12) for the energy of a nonrelativistic massive particle moving in a weak gravitational field (see e.g., [5], § 88). However, even in this simplifying approximation, the solution of the energy conservation problem as a whole remains unsatisfactory. This is because the expression of the assumed energy density of the gravitational field, which in this case can be determined, turns out to be negative (see [5], Problem 1 in § 106).

It is straightforward to verify directly that in empty space in the absence of gravitating masses, the expression (3) obtained as the energy-momentum tensor of the field satisfies the continuity equation  $\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0$ , which expresses a local form the conservation of energy and momentum of a free gravitational field.

In the presence of massive particles, the divergence of tensor  $T_{\mu\nu}$  is no longer equal to zero due to the energy and momentum exchange between the field and matter in the course of their interaction. Using the field equation

$$\left( \square - \varkappa^2 - \frac{2\pi G_N}{c^2} \sum_a m_a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \right) \phi = 0, \quad (13)$$

that follows from (1), it can be shown immediately from (2) that in this case

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = - \sum_a m_a \phi^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) g_\mu. \quad (14)$$

Of course, for the closed system consisting of the field and the massive particles interacting with each other, the full energy and momentum are strictly conserved. In fact, integrating equation (14) over a certain volume  $V$  bounded by a closed smooth surface  $\Sigma$  with the aid of equation (8) for the four-vector (9) and using the Gauss theorem, we obtain the balanced equation for the energy and momentum in the integral form

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{(V)} p^\mu + \frac{1}{c} \iiint_V T^{\mu 0} dV \right) = - \oint_{\Sigma} T^{\mu i} df_i, \quad (15)$$

where  $d\mathbf{f} = (df_i)$  is an infinitesimal normal vector of the surface  $\Sigma$  directed outward of the chosen volume  $V$ . The summation in (15) extends over all the particles contained in this volume. This equation expresses the law of conservation of total energy and momentum of the field and matter in the integral form. One should note that precisely this equation enables us to associate  $T^{\mu 0}$  with  $p^\mu$  and to identify with confidence the corresponding components of tensor (3) as densities of energy, energy flux, momentum, and momentum flux of the field listed in (4)–(7).

Setting in (15) the index  $\mu$  equal to zero and using the formulas (10), (4), and (5), we find the equation expressed the conservation law of total energy of the particles and field:

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{(V)} \frac{c^2 m \phi^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \iiint_V \frac{\phi^2}{8\pi G_N} \left( \mathbf{g}^2 + Q^2 + 4c^4 \varkappa^2 \right) dV \right] = - \oint_{\Sigma} \frac{c\phi^2}{4\pi G_N} Q \mathbf{g} \cdot d\mathbf{f}. \quad (16)$$

This equation asserts that the rate of change of the total energy of particles given by formula (10) and of the field with the density defined by (4) in a certain volume  $V$  is exactly equal to the amount of energy passing per unit time with the field energy flux of density (5) into the surrounding space or back through the closed surface  $\Sigma$  bounding this volume.

Now, choosing the spatial components of (15) and omitting the indexes, we obtain the independent three-dimensional vector equation

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{(V)} \frac{m\phi^2 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \iiint_V \frac{\phi^2 Q \mathbf{g}}{4\pi G_N c} dV \right) = - \oiint_{\Sigma} \sigma \cdot d\mathbf{f}, \quad (17)$$

which expresses the momentum conservation of particles and field. The three-dimensional tensor of second rank  $\sigma$  on the right-hand side of this equation represents the momentum flux density of the field; its components are defined by (7).

We make now one remark relating to the expressions for the densities of the field energy and momentum and of their fluxes in formulas (4) – (7) and in (16), (17). From these formulas, it may seem at first sight that if  $\phi$  vanishes at some instant of time or within a finite region of space, then the total energy and momentum of particles and fields together with fluxes of the field energy and momentum simultaneously vanish. However, this is not the case, as can be seen by comparing the formulas (2) and (3). We recall that the factor  $\phi^2$  arises in energy-momentum tensor (3) and naturally in expressions (4) and (5) as a result of the replacement in (2) of the ordinary gradient  $\partial_\mu \phi$  by logarithmic derivatives of  $\phi$  that are hidden in the observables  $\mathcal{E}_\mu$ .

As for the expressions (10) and (11) of the energy and momentum of a moving particle, these quantities do not vanish also when  $\phi \rightarrow 0$ . This can be easily proved by writing down the Hamiltonian of the particle

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + c^2 m^2 \phi^4}, \quad (18)$$

which corresponds to the second term of the Lagrangian (1). From (18) it follows that if  $\phi \rightarrow 0$ , then the relation between the energy and momentum of a particle takes the form  $\mathcal{E} = cp$ , that is, as in the case of a massless particle moving with the light velocity. In other place, we will indeed encounter this possibility as a real cosmological problem.

### References

1. Gorbunov, D.S. Introduction to the Theory of Early Universe: Hot Big Bang Theory / D.S. Gorbunov, V.A. Rubakov // New Jersey: World Scientific, 2011. – 428 p.
2. Nöther, E. Invariante Variationsprobleme / E. Nöther // Gött. Nachr., Math-phys. Klasse. – 1918. – P. 235–257.
3. Nordström, G. Relativitätssprinzip und Gravitation / G. Nordström // Phys. Z. – 1912. – Vol. 13. – P. 1126–1129.

4. Serdyukov, A. N. A minimal relativistic model of gravitation within standard restrictions of the classical theory of fields / A. N. Serdyukov // Phys. of Part. and Nucl. Lett. – 2009. – Vol. 6. – P. 190–201.

5. Landau, L.D. The Classical theory of fields / L.D. Landau, E.M. Lifshitz // Oxford: Butterworth–Heinemann, 1987. – 428 p.

**Vladimir Zykunov, Victor Levantsov**

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus

**CALCULATION OF RADIATIVE EVENTS  
IN THE INCLUSIVE EXPERIMENTS  
BY NEW MONTE CARLO METHOD**

**1. Introduction**

Inclusive experiments play a role of paramount importance in high-energy physics. In a number of cases, this is because it is impossible in principle to detect all particles produced in the reaction being considered; in other cases (including deep-inelastic lepton scattering on nucleons, the Drell-Yan reaction, and identical-particle scattering), this is not needed for deducing information about the reaction mechanism. In almost any of the present-day experiments, reliable information can be obtained from experimental data only upon taking into account electroweak radiative corrections, which are higher order effects in the Standard Model. An infrared divergence is a well-known problem encountered in taking into account contributions of extra virtual particles to observables. A path toward solving this problem goes through incorporating the contribution of real bremsstrahlung photons into respective calculations. If bremsstrahlung photons are not detected in the reaction being considered, the problem of taking them into account should be addressed in dealing with inclusive reactions.

A new method (*G/N*-method) for precisely taking into account the emission of one bremsstrahlung photon as a component of one-loop radiative corrections is formulated in the present study by considering the example of observables in the inclusive Møller scattering reaction

$$e^-(k_1) + e^-(p_1) \rightarrow e^-(k_2) + e^-(p_2) + (\gamma(k)) \quad (1)$$

involving polarized electrons [1] (here in brackets the 4-momenta of particles are presented).

The nonradiative and radiative process of polarized Møller scattering was fully described in [2] and [3], correspondingly, and the notation used there is reproduced in the present study where, we place emphasis on the method used to calculate the reaction phase space, which originally has the form

$$d\Phi = \delta^4(k_1 + p_1 - k_2 - p_2 - k) \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2p_{20}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{2k_{20}} \frac{d^3\mathbf{k}}{2k_0}. \quad (2)$$

## 2. Phase space

In [2], the phase space (2) was reduced to the form presented in [4], which involves a dependence on four (radiative) invariant quantities; that is,

$$d\Phi = \frac{\pi}{16s\sqrt{-\Delta_4}} dt dv dz dv_1, \quad (3)$$

where  $\Delta_4 = \Delta_4(k_1, p_1, k_2, p_2)$  is Gram determinant. Although the expression for the phase space looks quite simple and admits a clear interpretation in the respective computer code, the phase space in (3) presents a difficult challenge in integration. This served as a motivation of searches for new ways to improve the accuracy.

To improve the convergence we transform the phase space (2) in the reference frame comoving with the center-of-mass of primary particles, where  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1 = 0$ ,  $k_{10} = p_{10} = \sqrt{s}/2$ . First of all, we remove the three-dimensional integral with respect to  $d^3\mathbf{p}_2$ , whereupon we have

$$d\Phi = \delta(\sqrt{s} - k_{20} - p_{20} - k_0) \frac{1}{2p_{20}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{2k_{20}} \frac{d^3\mathbf{k}}{2k_0}. \quad (4)$$

We then go over to the system of spherical coordinates,

$$d^3|\mathbf{k}_2| = |\mathbf{k}_2|^2 d|\mathbf{k}_2| d\cos\theta_{k_2} d\varphi_{k_2}$$

and apply the relation  $|\mathbf{k}_2|d|\mathbf{k}_2| = k_{20}dk_{20}$ .

It is now necessary to remove the integral with respect to  $k_{20}$  with the aid of the remaining delta function by using the property  $\delta[f(x)] = \delta(x-x_0)/|f'(x_0)|$ , where  $x_0$  is root of  $f(x_0) = 0$ . In the case being considered, the function  $f(x)$  is the lefthand side of the energy-conservation law specified in the implicit form

$$f(x) = k_{20} + p_{20} + k_0 - \sqrt{s}, \quad (5)$$

where  $\sqrt{s}$  is the total reaction energy and  $x \equiv k_{20}$ . One can readily evaluate the derivative

$$f'(x) = 1 + \frac{x(1 - |\mathbf{k}|A(x^2 - m^2)^{-1/2})}{\sqrt{x^2 - 2|\mathbf{k}|A\sqrt{x^2 - m^2} + |\mathbf{k}|^2}}. \quad (6)$$



In Figure 1, we depict the 3-momentum vectors of the final-state particles in the c.m. frame by using the auxiliary vector  $\mathbf{p}_5 = -\mathbf{k}$ . The possible energies of the final-state electron can be found by resolving the energy-conservation law  $f(x_0^\pm) = 0$ . The result has the form

$$x_0^\pm = \frac{BC \pm \sqrt{C^2 + m^2(1 - B^2)}}{1 - B^2}, \quad (7)$$

where the coefficients

$$B = \frac{\sqrt{s} - k_0}{A|\mathbf{k}|}, \quad C = \frac{|\mathbf{k}|^2 - (\sqrt{s} - k_0)^2}{2A|\mathbf{k}|} \quad (8)$$

are expressed in terms of the factor

$$A = \cos(\widehat{\mathbf{p}_5, \mathbf{k}_2}) = \sin \theta \sin \theta_5 \cos \varphi_5 + \cos \theta \cos \theta_5. \quad (9)$$

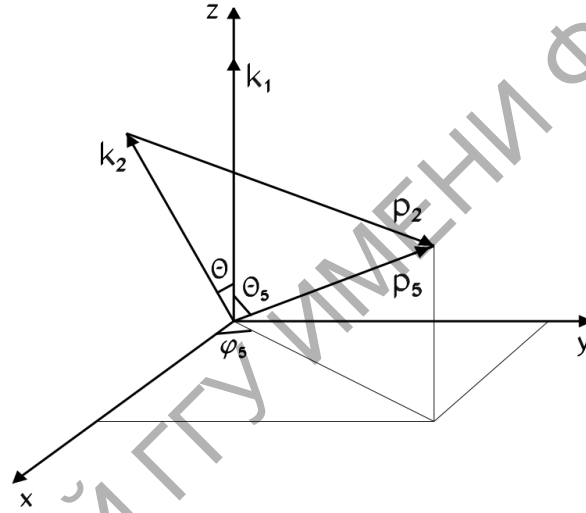


Figure 1 – Configuration of the 3-momenta of the final state particles in the c.m. frame

This factor specifies that sign on the right-side of Eq. (7) which corresponds to the energy: at a positive value of  $A$  (in this situation the 3-momentum vector of the emitted photon forms an obtuse angle with respect to the vector  $\mathbf{k}_2$ ) we choose  $x_0^-$ , and vice versa.

Integration with respect to the azimuthal angle  $\varphi_{\mathbf{k}_2}$  yields  $2\pi$  because of symmetry under rotations of the system about the beam axis. Further, we proceed to perform integration with respect to  $\mathbf{k}$ . We have

$$d^3\mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| d\cos\theta_k d\varphi_k, \quad \theta_k = \pi - \theta_5, \quad \varphi_k = \pi + \varphi_5. \quad (10)$$

Upon employing  $\mathbf{p}_5$  the 3-momentum vectors of final-state particles in the c.m. frame assume a rather simple form; that is,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &= (|\mathbf{k}_2|\sin\theta, 0, |\mathbf{k}_2|\cos\theta), \\ \mathbf{p}_5 &= (|\mathbf{k}|\sin\theta_5 \cos\varphi_5, |\mathbf{k}|\sin\theta_5 \sin\varphi_5, |\mathbf{k}|\cos\theta_5), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_5 - \mathbf{k}_2.$$

It is clear that  $p_{20} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}_2|^2}$  and is readily calculable on the basis of (11).

We will now express all radiative invariants in terms of the proton energy and azimuthal and polar angles. We have

$$z_1 = 2k_0k_{10} + 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1|\cos\theta_5, \quad (12)$$

$$v_1 = 2k_0p_{10} - 2|\mathbf{k}||\mathbf{p}_1|\cos\theta_5, \quad (13)$$

$$z = 2k_0k_{20} + 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}_2|A, \quad (14)$$

$$v = 2k_0(\sqrt{s} - k_{20}) - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}_2|A. \quad (15)$$

It is noteworthy that, in fact,  $k_0$  and  $|\mathbf{k}|$  are different in all of the equations used. In other words, the photon mass  $\lambda$  is retained in these expressions. In the following, this mass will be used as an infinitesimal parameter to regularize infrared divergences.

### 3. Integration over the total phase space

Everything is now ready for performing integration over the total bremsstrahlung-photon phase space. By employing the expressions obtained for the phase space, we remove the integral with respect to the detected-electron azimuthal angle, whereupon the R-contribution to the cross section assumes the form (we used  $d\cos\theta_{\mathbf{k}_2} = dc$ ).

$$\sigma^R \equiv \frac{d\sigma^R}{dc} = -\frac{\alpha^3}{4\pi s} \int_0^{|\mathbf{k}|_{\max}} \frac{|\mathbf{k}|^2}{k_0} d|\mathbf{k}| \int_{-1}^1 d\cos\theta_k \int_0^{2\pi} d\varphi_k \frac{|\mathbf{k}_2|}{p_{20}|f'(x_0)|} \sum_{i,j=\gamma,Z} MM^+ \quad (16)$$

Even in this form, the relevant numerical integration (we will employ the VEGAS Monte Carlo integrator [5] and we plan to use these technics for cluster distributed calculations and modeling of MOLLER experimental setup) involves no problems if one pays due attention to the condensation of points in the region of small  $|\mathbf{k}|$ . However, it is possible to represent the result in a more elegant form. First, we proceed to consider the integral with respect to the photon energy by employing the equality  $|\mathbf{k}|d|\mathbf{k}| = k_0dk_0$ . We then have

$$\int_0^{|\mathbf{k}|_{\max}} \frac{|\mathbf{k}|^2}{k_0} d|\mathbf{k}| \dots = \int_{\lambda}^{\Omega} |\mathbf{k}| dk_0 \dots,$$

where  $\Omega$  is the maximum (chosen) bremsstrahlung photon energy. By applying the change of variable (a similar change of variable was used, for example, in [6] to isolate the dependence of the cross section on the minimal photon energy)

$$k_0 = \lambda^{1-x} \Omega^x, \quad \frac{dk_0}{k_0} = \ln \frac{\Omega}{\lambda} dx, \quad (17)$$

we obtain the cross section in the form

$$\sigma^R = -\frac{\alpha^3}{4\pi s} \ln \frac{\Omega}{\lambda} \int_0^1 dx |\mathbf{k}| k_0 \int_{-1}^1 d \cos \theta_k \int_0^{2\pi} d\varphi_k \frac{|\mathbf{k}_2|}{p_{20} |f'(x_0)|} \sum_{i,j=\gamma,Z} MM^+ \quad (18)$$

#### 4. Conclusion

In order to obtain reliable data in the MOLLER experiment with a declared relative error below 0.01, not only is it necessary to take precisely into account one-loop and at least leading two-loop radiative effects, but also an exact interpretation of events involving bremsstrahlung photon emission with allowance for the detector potential is mandatory. The new  $G/N$ -method supplemented with a respective FORTRAN code developed on the basis of this method solves successfully the problem in question. It is the opinion of the author that the  $G/N$ -method may become a standard tool for calculations of the above type, since, by construction, it does not involve unphysical parameters, with the exception of a fictitious photon mass, which cancels the infrared divergence in a natural way. From the methodological point of view, the new method in question is advantageous in the sense that it makes no use of terms such as a “soft photon”, a “hard photon”, and a “parameter that separates the soft and hard regions”, so that a cumbersome and essentially immaterial test for the absence of a dependence on this parameter is not required. One should also bear in mind that the calculation for the region of soft photons within a traditional approach is approximate, inevitably leading to a poorly controllable computational error, but that a calculation on the basis of the  $G/N$ -method involves no such error.

#### 5. Acknowledgments

We are grateful to A.G. Aleksejevs, A.B. Arbuzov, S.G. Barkanova, and Yu.M. Bystritskiy for help and discussions. We thank the organizers of this Conference. Work was supported by Belarus scientific program (grant BRFFI-F16-121).

#### References

1. The MOLLER Experiment. Measurement Of a Lepton Lepton Electroweak Reaction. An Ultra-precise Measurement of the Weak Mixing Angle using Moller Scattering. An MIE proposal to The United States De-

partment of Energy [Electronic resource] / J. Benesch [et al.]. – The MOLLER Collaboration, 2011. – Mode of access: [http://hallaweb.jlab.org/12GeV/Moller/downloads/DOE\\_Proposal/DOE\\_Moller.pdf](http://hallaweb.jlab.org/12GeV/Moller/downloads/DOE_Proposal/DOE_Moller.pdf). – Date of access: 12.09.2011.

2. Зыкунов, В.А. Радиационное мёллеровское рассеяние с поляризованными частицами / В.А. Зыкунов // ЯФ. – 2015. – Т. 78. – С. 489–498.

3. Зыкунов, В.А. Новый метод учета радиационных событий в инклюзивном эксперименте MOLLER / В.А. Зыкунов // ЯФ. – 2017. – Т. 80. – С. 388–395.

4. Бюклинг, Е. Кинематика элементарных частиц / Е. Бюклинг, К. Каянти. – Москва: Мир, 1975. – 343 с.

5. Lepage, P.G. A new algorithm for adaptive multidimensional integration / P.G. Lepage // J. Comput. Phys. – 1978. – Vol. 27. – P. 192–211.

6. Ishikawa, T., MINAMI-TATEYA Group. GRACE manual / T. Ishikawa [et al.]. – KEK, 1993. – P. 344. – (Preprint/KEK-92-19).

**Е.З. Авакян, С.Л. Авакян**

УО «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Гомель, Беларусь

## **ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ**

### **Введение**

Проблема описания скалярных мезонов является одной из самых актуальных в современной физике элементарных частиц «до чарма» [1]. В первую очередь, это относится к самой легкой из скалярных частиц  $f_0(600)$ , которая играет ключевую роль при описании нуклон-нуклонных взаимодействий,  $\pi\pi$ -рассеяния и нелептонных взаимодействий каонов. Со времени, когда в своей работе [2] Р. Estabrooks поставила вопрос “Где он и что это такое – скалярный мезон?” (“Where and what are the scalar mesons?”) прошло уже около четырех десятилетий и если мы знаем ответ на первую часть вопроса, то вторая остается актуальной до сих пор.

Основные экспериментальные данные о скалярных мезонах получены при изучении  $s$ -волн в двухчастичных реакциях с псевдоскалярными мезонами:

$\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ ,  $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^0\pi^0$ ,  $\pi^+\pi^- \rightarrow K^+K^-$ ,  $\pi^+\pi^- \rightarrow K_S^0K_S^0$ ,  $\pi K \rightarrow \pi K$

, при исследовании спектров масс псевдоскалярных мезонов, рождающихся в реакциях типа  $J/\Psi \rightarrow X + \pi\pi, \phi + \pi\pi, \rho\rho \rightarrow K_S^0 K_S^0 (\pi\pi)$ , в экспериментах SND и CMD2, в реакции  $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma, e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$  [1].

С теоретической точки зрения проблема скалярных мезонов состоит в том, что до сих пор остается неясной их внутренняя структура. Есть модели, рассматривающие скалярные мезоны  $0^{++}$  как двухкварковые состояния  $(q\bar{q})$  [3, 14]. Однако, наивный подход к вычислению спектра масс скалярных мезонов в указанных схемах приводит к спектру, не согласующемуся с экспериментальным. В ряде подходов данные частицы рассматриваются как четырехкварковые системы  $(qq\bar{q}\bar{q})$  [5, 6]. Существуют также подходы, связывающие скалярные мезоны со скалярными глюониями, наличие которых предсказывается в рамках КХД [7].

В данной работе скалярные мезоны рассматриваются в рамках двухкварковой схемы. Для вычисления матричных элементов будем использовать Модель Конфайнированных Кварков (МКК), в рамках которой удалось описать широкий спектр низкоэнергетических мезонных взаимодействий [8].

## 1. Определение параметров скалярных мезонов в двухкварковой схеме

В МКК предполагается, что адронные поля возникают в результате интегрирования по глюонным и кварковым переменным в производящем функционале КХД. В результате получается лагранжиан взаимодействия адронов с кварками:

$$L_M^i = \frac{g_M}{\sqrt{2}} M^i \bar{q}_m^a \Gamma_M \lambda^{mn} q_n^a \quad (1)$$

Здесь  $q_j^a$  – кварковые поля,  $M_i$  – Евклидовские поля, связанные с полями физических частиц  $(P, V, A)$ ,  $\lambda_i$  – матрицы Гелл-Манна,  $\Gamma_\mu$  – Дираковские матрицы,  $a$  – цветовой индекс,  $g_M$  – константы взаимодействия мезонов с кварками, которые определяются из условия связности.

Лагранжиан (1) позволяет хорошо описывать взаимодействия псевдоскалярных, векторных и аксиально векторных мезонов. Однако, как будет показано ниже, описание взаимодействий скалярных мезонов требует введения в Лагранжиан взаимодействия дополнительного члена.

Будем рассматривать скалярные мезоны как двухкварковые состо-

яния, описываемые Лагранжианом:

$$L_S^i = \frac{g_S}{\sqrt{2}} S^i \bar{q}_m^a \left( I - i \frac{H}{\Lambda} \vec{\delta} \right) \lambda^{mn} q_n^a \quad (2)$$

где  $\vec{\delta} \equiv \vec{\delta} - \vec{\delta}$ ,  $H$  – неизвестный параметр,

$$\lambda = \begin{cases} \text{diag}(1, -1, 0) \Rightarrow a_0(975) \\ \text{diag}(\cos \delta_s, \cos \delta_s, -\sqrt{2} \sin \delta_s) \Rightarrow f_0(600) \\ \text{diag}(-\sin \delta_s, -\sin \delta_s, -\sqrt{2} \cos \delta_s) \Rightarrow f_0(980) \end{cases}$$

Обсудим выбор вершины взаимодействия в более сложном, чем для остальных (псевдоскалярных, векторных и аксиально векторных) мезонов.

С этой целью рассмотрим диаграмму, описывающую распад  $S \rightarrow PP$ .

Соответствующий структурный интеграл, вычисленный в МКК при нулевых массах конечных состояний, может быть записан в виде:

$$I_{SPP}(m_S^2) = I_0(m_S^2) - 4H \cdot I_1(m_S^2), \quad (3)$$

где  $I_0(x), I_1(x)$  – структурные интегралы, вычисленные по правилам МКК [8].

Первое слагаемое соответствует выбору Лагранжиана взаимодействия в простейшем виде с  $\Gamma_S = I$ . Оказалось, что в случае простейшего Лагранжиана структурный интеграл  $I_0$  обращается в нуль при  $m_s \approx 1070$  МэВ, что, в свою очередь, приводит к значительно заниженному, по сравнению с экспериментальным, значению ширины распада  $f_0 \rightarrow \pi\pi$ .

Полученный результат, по-видимому, свидетельствует в пользу более сложной, нежели простейшая двухкварковая, структуры скалярных мезонов. Выбор вершины в виде (2) позволяет избежать обращения в нуль указанной величины.

Итак, одним из свободных параметров, входящих в Лагранжиан взаимодействия скалярных мезонов с кварками, является параметр  $H$ . Еще одним свободным параметром является угол смешивания скалярных мезонов  $\delta_s$ .

За основу фитирования возьмем, во-первых, условие согласованности Адлера, состоящее в требовании обращения в нуль амплитуды  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$  в пределе  $m_\pi \rightarrow 0$ , и, аналогичное ему требование обращения в нуль амплитуды  $\pi^0\gamma \rightarrow \pi^0\gamma$ ; во-вторых, экспериментальное значение ширины распада  $f_0 \rightarrow \pi\pi$ .

Условие согласованности Адлера в МКК получено в виде:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} du b(u) = 2\Lambda^2 \left[ \int_0^{\infty} du a(u) - 4H \int_0^{\infty} du ub(u) \right] h_f(H) D_f(0) \\ 5b(0) = -2\Lambda^2 \cos \delta_S (5 \cos \delta_S - \sqrt{2} \sin \delta_S) \cdot a(0) h_f(H) D_f(0) \end{cases} \quad (4)$$

$a(u), b(u)$  – функции, используемые в МКК для обеспечения конфайнмента [8].

Для фитирования удобно использовать частное от деления выражений, входящих в (4), которое не зависит от массы  $f_0(500)$  мезона и рассматривать равенство

$$R = - \frac{5b(0) \left[ \int_0^{\infty} du a(u) - 4H \int_0^{\infty} du ub(u) \right]}{\cos \delta_S (5 \cos \delta_S - \sqrt{2} \sin \delta_S) \cdot a(0) \int_0^{\infty} du b(u)} = 1 \quad (5)$$

в качестве одного из исходных для фитирования параметров  $H$  и  $\delta_S$ .

Матричный элемент распада  $S \rightarrow PP$  имеет следующий вид:

$$g_{SP_1P_2}(m_S^2, m_{P_1}^2, m_{P_2}^2) = \text{Tr} \lambda_S \{ \lambda_{P_1}, \lambda_{P_2} \} \cdot \Lambda \frac{\sqrt{h_{P_1} h_{P_2} h_S(H)}}{6} I_{SPP}(m_S^2, m_{P_1}^2, m_{P_2}^2) \quad (6)$$

В случае распада  $f_0(980) \rightarrow \pi\pi$   $\text{Tr} \lambda_S \{ \lambda_{P_1}, \lambda_{P_2} \} = 4 \sin \delta_S$ ,  $h_S(H)$  – константа связи, вычисленная из условия связности,  $I_{SPP}(m_S^2, m_{P_1}^2, m_{P_2}^2)$  – структурный интеграл, зависящий от  $H$ . Ширина распада  $f_0 \rightarrow \pi\pi$ , вычисленная по стандартным формулам, имеет вид:

Наиболее близкими к единице параметры  $R$  и  $\frac{g_{SPP}^t}{g_{SPP}^{exp}}$  оказываются при

$$\begin{aligned} H &= 0,54 \\ \sin \delta_S &= 0,3. \end{aligned} \quad (7)$$

## 2. Определение массы скалярного $f_0(600)$ мезона

Массу промежуточного скалярного мезона будем определять, используя данные о длинах  $\pi\pi$  – рассеяния. Матричный элемент рассеяния  $\pi$  мезона на  $\pi$  мезоне имеет вид

$$M_{\pi\pi}(s, t, u) = \delta^{ab} \delta^{cd} A(s, t, u) + \delta^{ac} \delta^{bd} A(t, u, s) + \delta^{ad} \delta^{bc} A(u, s, t),$$

где  $a, b, c, d$  – изотопические индексы.

Амплитуда определяется вкладом «бок» – диаграмм с промежуточными скалярными и векторными мезонами.

$$A(s, t, u) = I_{\text{box}}^{\pi\pi}(s, t, u) + S^{\pi\pi}(s, t, u) + V^{\pi\pi}(s, t, u). \quad (8)$$

Вклад промежуточных скалярных мезонов в (8) имеет вид:

$$S^{\pi\pi}(s, t, u) = F_{S\pi\pi}^2(s) \left( \frac{\cos^2 \delta_s}{\pi_s(s) - \pi_s(m_1^2)} + \frac{\sin^2 \delta_s}{\pi_s(s) - \pi_s(m_2^2)} \right) + \\ + F_{S\pi\pi}^2(t) \left( \frac{\cos^2 \delta_s}{\pi_s(t) - \pi_s(m_1^2)} + \frac{\sin^2 \delta_s}{\pi_s(t) - \pi_s(m_2^2)} \right), \quad (9)$$

где  $F_{S\pi\pi}(x) = F_{S\pi\pi}(x, m_\pi^2, m_\pi^2)$ ;  $m_1$  – масса  $f_0(500)$ ,  $m_2$  – масса  $f_0(980)$ .

Рассеяние  $\pi$ -мезона на  $\pi$ -мезоне возможно по трем каналам  $I = 0, 1, 2$ . Амплитуды рассеяния по различным каналам  $T^I$  могут быть выражены через  $A(s, t, u), A(t, s, u), A(u, t, s)$  следующим образом:

$$T^0(s, t, u) = 3A(s, t, u) + A(t, s, u) + A(u, t, s), \\ T^1(s, t, u) = A(t, s, u) - A(u, s, t), \\ T^2(s, t, u) = A(t, s, u) + A(u, s, t). \quad (10)$$

В силу симметрии между конечными мезонами имеет место равенство  $A(s, t, u) = A(s, u, t)$ , поэтому отличными от нуля оказываются только  $T^0(s, t, u)$  и  $T^2(s, t, u)$ .

Длины рассеяния  $a^I$  вычисляются по формуле

$$a^I = \frac{1}{32\pi} T^I(4m_\pi^2, 0, 0). \quad (11)$$

Экспериментальные значения для длин  $\pi\pi$  рассеяния  $a_0^0$  и  $a_0^2$  получены несколькими экспериментальными группами [9-11].

Оказалось, что для того, чтобы полученные численные значения длин  $\pi\pi$ - рассеяния  $a_0^0$  и  $a_0^2$  не противоречили экспериментальным данным, масса промежуточного  $f_0(500)$  мезона должна быть выбрана в диапазоне  $500 \div 515$  МэВ.

### Литература

1. Amsler, C. Note on Scalar Mesons below 2 GeV/C. Amsler et al//Chin. Phys. – 2016. – Vol. C40. – P. 100001.
2. Estabrooks, P. Where and what are the scalar mesons? / P. Estabrooks // Phys. Rev. – 1979. – Vol. D 19. – P. 2678.
3. Boglione, M. Dynamical generation of scalar mesons/ M. Boglione, M.R. Pennington // Phys. Rev. – 2002. – Vol. D65. – P. 114010.
4. Tornqvist, N. A. Understanding the scalar meson  $q$  anti- $q$  nonet/ N. A. Tornqvist// Z. Phys. – 1995. – Vol. C 68. – P. 647.



5. t'Hooft, G. A Theory of Scalar Mesons / G. t'Hooft, G. Isidori, L. Maiani, A.D. Polosa, V. Riquer // Phys.Lett. – 2008. – Vol. B662. – P.424.
6. Alford, M. Insight into the scalar mesons from a lattice calculation/ M. Alford, R. L. Jaffe // Nucl. Phys. – 2000. – Vol. B 578. – P. 367.
7. Kaminski, R. Gluonium nature of the sigma/f(0)(600) from its coupling to K anti-K / R. Kaminski, G. Mennessier, S. Narison // Phys. Lett. – 2009. – Vol. B680. – P.148.
8. Efimov, G.V. The Quark Confinement Model of Hadrons / G.V. Efimov, M.A. Ivanov // London: IOP Publishing Ltd, 1993. – 177 p.
9. Rosselet, L. Experimental Study of 30,000 K(e4) Decays / L. Rosselet [et al.] // Phys. Rev. – 1977. – Vol. D15. – P. 574.
10. Pislak, S. High statistics measurement of  $K_{14}$  decay properties / S. Pislak [et al.] // Phys. Rev. – 2003. – Vol. D67. – P. 072004.
11. Bizzeti A., Precision measurements of pi pi scattering lengths at NA48/2/ A. Bizzeti // AIP Conf.Proc. – 2011. – Vol. 1374. – P. 639.

**С.Л. Авакян, Е.З. Авакян**

УО «Гомельский государственный технический университет  
имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

## НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТРАННЫХ МЕЗОНОВ

### Введение

Изучение нелептонных распадов каонов помогает глубже понять структуру слабых взаимодействий, а также взаимосвязь последних с сильными взаимодействиями кварков. Одной из нерешенных проблем является описание распадов с изменением странности  $|\Delta S| = 1$ . Проблема заключается в том, что переходы с изменением изоспина  $I$  на  $3/2$  существенно подавлены по сравнению с переходами  $\Delta I = 1/2$ . Экспериментально это явление проявляется в том, что измеренное отношение [1]

$$\gamma_{+-} = \frac{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^0)} \cong 463.$$

Наряду с изучением процессов в которых странность  $S$  изменяется на 1, представляется интересным изучение переходов с  $|\Delta S| = 2$ , а именно  $K^0 - \bar{K}^0$ . Описание  $K^0 \bar{K}^0$  имеет важное значение при построении калибровочных теорий сильных взаимодействий. В рамках стан-

дартной шестикварковой схемы [2, 3] не удастся объяснить экспериментальное расщепление масс  $K_L^0 - K_S^0$  мезонов.

Изучение феномена смешивания и CP-нарушения в адронных системах является одной из основных задач при проверке Стандартной Модели (СМ).

Целью данной работы является изучение нелептонных взаимодействий каонов в рамках МКК [4], а именно, учет вкладов «больших расстояний» в матричные элементы процессов с  $|\Delta S| = 1; 2$  и полученные параметры распадов  $K \rightarrow \pi\pi$  и  $K^0 - \bar{K}^0$  переходов.

## 1. Модель Конфайнированных Кварков

Модель Конфайнированных Кварков (МКК) базируется на определенных предположениях о структуре глюонного вакуума и механизме адронизации. В результате получается лагранжиан взаимодействия адронов с кварками:

$$\mathcal{L}_M = \frac{g_M}{\sqrt{2}} M^i \bar{q}_m^a \Gamma_\mu \lambda^{mn} q_n^a. \quad (1)$$

Анзац конфайнмента в МКК состоит в случае однопетлевых кварковых диаграмм в замене:

$$\int d\sigma_{VAC} Tr |M(x_1) S(x_1, x_2 | B_{VAC}) \cdots M(x_n) S(x_n, x_1 | B_{VAC})| \rightarrow \int d\sigma_v Tr |M(x_1) S_v(x_1 - x_2) \cdots M(x_n) S_v(x_n - x_1)|, \quad (2)$$

где пропагатор кварка имеет вид

$$S_v(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4} e^{-ip(x_1 - x_2)} \frac{1}{v\Lambda_q - \hat{p}}. \quad (3)$$

Параметр  $\Lambda_q$  характеризует размер области конфайнмента кварка с ароматом  $q = u, d, s$ . Мера интегрирования  $d\sigma_v$  определена так, что:

$$\int \frac{d\sigma_v}{v - \hat{z}} = G(z) = a(-z^2) + \hat{z} b(-z^2). \quad (4)$$

Функция  $G(z)$  называется функцией конфайнмента и представляет собой целую функцию, убывающую в Евклидовой области быстрее любой степени  $z$  при  $z^2 \rightarrow \infty$ . Мы будем использовать  $a(-z^2)$  и  $b(-z^2)$  в виде:

$$\begin{aligned} a(u) &= a_0 e^{-u^2 - a_1 u}, \\ b(u) &= b_0 e^{-u^2 - b_1 u}. \end{aligned} \quad (5)$$

Требование выполнения в МКК аномальных тождеств Уорда дает дополнительные соотношения между  $a(0)$  и  $b(0)$ :  $b(0) = -a'(0)$ ,  $a(0) = 2$ .

Таким образом, свободными параметрами модели являются  $\Lambda_q, b_0, b_1$ .

Они были зафиксированы фитированием по хорошо известным константам низкоэнергетической физики  $f_\pi, g_{\rho\gamma}, g_{\pi\gamma\gamma}, g_{\omega\pi\gamma}, g_{\rho\pi\pi}$  и оказалось, что наилучшее описание всей совокупности констант достигается при  $b_0 = 2; b_1 = 0,2; \Lambda_\pi = 430$  МэВ [5].

Для описания странных мезонов необходимо зафиксировать дополнительный параметр  $\Lambda_s$ , описывающий область конфайнмента странного кварка. Для фитирования, используем константы основных распадов странных мезонов, происходящих при слабых, электромагнитных и сильных взаимодействиях ( $K^+ \rightarrow \mu^+\nu, K^* \rightarrow K\gamma, K^* \rightarrow K\pi, \phi \rightarrow K\bar{K}$ , перехода  $\phi \rightarrow \gamma$ ).

Оказалось, что наилучшее согласие с экспериментальными данными, достигается при  $\Lambda_s = 505$  МэВ [6].

## 2. Распады $K \rightarrow 2\pi$

Слабое взаимодействие кварков будем описывать с помощью эффективного четырехкваркового гамильтониана, полученного в рамках стандартной модели с учетом глюонных поправок КХД [7]:

$$\mathcal{H}_{eff}^{\Delta S=1} = \frac{G_F}{2\sqrt{2}} V_{ud}V_{us} \sum_{i=1}^6 c_i O_i$$

Коэффициенты  $c_i$ , входящие в эффективный гамильтониан являются решениями ренормгрупповых уравнений и зависят от КХД параметров: точки нормировки  $\mu$ , бегущей константы  $\alpha_s(\mu^2, \Lambda_{QCD})$  и масс тяжелых кварков [8]. Операторы  $O_i$  имеют стандартный вид и приведены в [7].

Диаграммы описывающие распады каонов,  $K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$  (изотопический спин изменяется на 1/2) и  $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$  (изотопический спин изменяется на 3/2) приведены на рисунке 1а и рисунке 1б соответственно. Следует подчеркнуть, что среди операторов  $O_1 - O_6$  только оператор  $O_4$  отвечает переходам с  $\Delta I = \frac{3}{2}$ .

Следует подчеркнуть, что промежуточные  $0^{++}$  ( $f_0(550)$  и  $f_0(980)$ ) вносят вклад только в матричный элемент распада с  $\Delta I = 1/2$   $K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ , поэтому могут обеспечить выполнение правила

$\Delta I = 1/2$ . Учет промежуточных склярных состояний привел к тому, что отношение ширины распадов

$$\gamma_{+-} = \frac{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+\pi^0)} = 433,84,$$

что хорошо согласуется с экспериментальным значением.

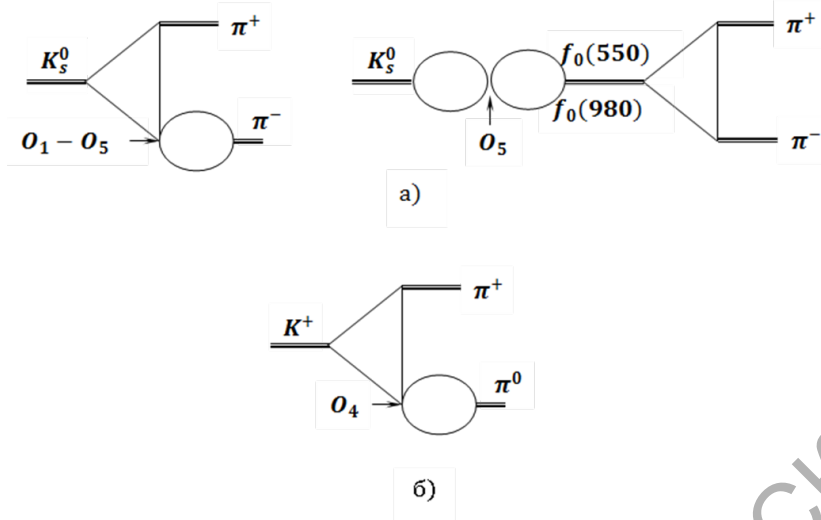


Рисунок 1 – а) диаграммы описывающие распад  $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ,  
 б) диаграмм описывающая распад  $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$

В таблице 1 приведены относительные вклады в амплитуду распада  $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$  «прямых» диаграмм, а также вклад от промежуточных скалярных состояний

Таблица 1

$A(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)$	$\frac{A_{O_1-O_4}(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{A(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}$	$\frac{A_{O_5}(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{A(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}$	$\frac{A_S(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{A(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}$
$38,2 \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}$	<b>0,229</b>	<b>0,017</b>	<b>0,754</b>

Из таблицы 1 видно, что учет промежуточных скалярных состояний вносит решающий вклад в объяснение правила  $\Delta I = 1/2$ .

### 3. $K \rightarrow \bar{K}$ переходы

Переход  $K \rightarrow \bar{K}$  описывается диаграммами приведенными на рисунке 2.

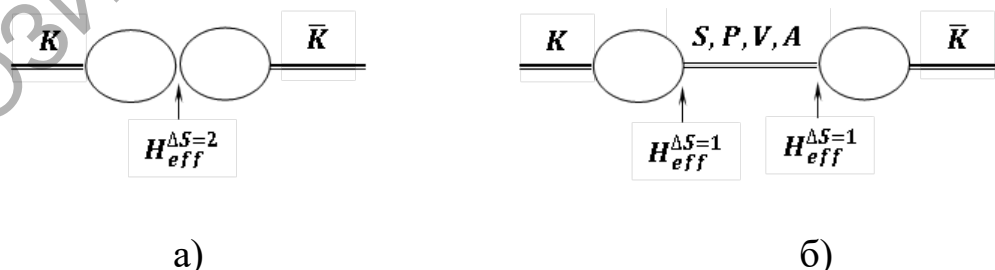


Рисунок 2 – а)  $K \rightarrow \bar{K}$  переход,  
 б)  $K \rightarrow \bar{K}$  переход с промежуточными адронными состояниями

где  $\mathcal{H}_{eff}^{\Delta S=2}$  – эффективные гамильтонианы с  $\Delta S = 2$ , определенный как [9]:

$$\mathcal{H}_{eff}^{\Delta S=2} = \frac{G_F^2}{16\pi^2} V_{ud}^2 V_{us}^2 m_c^2 \eta O^{\Delta S=2},$$

где  $m_c$  – масса с-кварка,  $\eta$  – параметр КХД, вычисленный при  $\mu = 0,25$  ГэВ и  $\alpha_s = 0,45$  равен  $\eta = 0,78$ . Разность масс, вычисленная по стандартным формулам оказалась равной

$$\Delta m^{SD} = 2,04 \times 10^{-15} \text{ ГэВ},$$

что составляет 58% от экспериментального значения [1]. Подчеркнем, что в силу постулатов МКК матричный элемент, описываемый диграммой, приведенной на рисунке 2а, не имеет мнимой части. Мнимая часть может возникнуть только за счет промежуточных адронных состояний, приведенных на рисунке 2б. Учет промежуточных состояний, а в частности скалярного состояния приводит к значению для разности масс длинного и короткого каонов

$$\Delta m_{LS} = 3,25 \times 10^{-15} \text{ ГэВ},$$

что хорошо согласуется с экспериментальными данными [1]

$$\Delta m_{LS}^{exp} = (3,484 \pm 0,006) \times 10^{-15} \text{ ГэВ}.$$

### Литература

1. Particle Data Group J. / Beringer [et al.] // Phys.Rev. – 2012. – Vol. D86, № 1. – P. 010001.
2. Gilman, F.  $K^0 - \bar{K}^0$  Mixing in the Six Quark Model / F.J. Gilman, M.B. Wise // Phys. Rev. – 1983. – V. D27. – P. 1128.
3. Высоцкий, М.И. Переход  $K^0 - \bar{K}^0$  в стандартной  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  схеме / М.И. Высоцкий // ЯФ. – 1981. – Т.31. – С. 1535.
4. Efimov, G.V. The Quark Confinement Model of Hadrons / G.V. Efimov, M.A. Ivanov // London: IOP Publishing Ltd, 1993. – 177 p.
5. Avakyan, E.Z. Scattering of Pseudo Scalar Mesons / E.Z. Avakyan, S.L. Avakyan // Nonlinear Dynamics and Applications.– 2014. – Vol. 20. – P. 14–20.
6. Avakyan, E.Z. Interactions of Strange Mesons at Low Energies / E.Z. Avakyan, S.L. Avakyan // Proceedings of XIII–th International School-Conference "Actual Problems of Microworld Physics". – 2015. – Vol. 1. – P. 227–241.

7. Вайнштейн, А.И. Нелептонные распады  $K$ -мезонов и гиперонов /А.И. Вайнштейн, В.И. Захаров, М.А. Шифман // ЖЭТФ. – 1977. – Т. 72. – С.1275.

8. Ciuchini, M.An. Upgraded analysis of  $\epsilon'/\epsilon$  at the next-to-leading order / M. Ciuchini, E. Franco, G. Martinelli, L. Reina, L. Silvestrini // Z. Phys. – 1995. –Vol. C68. – P. 239.

9. Gilman, F.J.  $K^0 - \bar{K}^0$  Mixing in the Six Quark Model / F.J.Gilman, M.B. Wise // Phys. Rev. – 1983. – V. D27. – P. 1128.

**В.В. Андреев, К.С. Бабич**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ S-СОСТОЯНИЙ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ СИСТЕМ**

### **Введение**

Спектроскопия водородоподобных систем была и остается одним из фундаментальных направлений в физике и способствовала развитию квантовой механики и квантовой электродинамики. По мере развития новых технологий спектроскопия становилась все более точной. В частности, точность спектроскопии перехода  $1S - 2S$  улучшилась на десять порядков за последние 30 лет, и теперь неопределенность в определении энергии перехода составляет порядка  $10^{-15}$  [1-3]. Высокая точность способствует определению различных фундаментальных констант, таких как константа Ридберга и радиус протона. Также изучение уровней энергии в водороде, водородоподобных атомах, таких как мюоний, позитроний и мюонный водород позволяют проводить наиболее точные проверки квантовой электродинамики [4, 5].

Состояние эксперимента требует сверхточных вычислений энергетических спектров. При этом возникает проблема расчета различных поправок, которые вносят вклад в соответствующие состояния водородоподобных систем.

В данной работе для вычисления электромагнитных поправок используется методика, основанная на использовании импульсного представления для описания релятивистской связанной системы и точном расчете ядра потенциала водородоподобной системы. Эта ме-

тодика позволяет рассчитать релятивистские вклады более высоких порядков, чем порядок приближения Брейта.

В отличие от работы [6], в данном исследовании рассмотрим релятивистские поправки высших порядков для систем  $e^-p$  (атом водорода) и  $\mu^-p$  (мюонный атом водорода), связанных с учетом поляризации вакуума и форм фактором Паули для точечного фермиона (электрон или мюон). Методика вычислений энергетических поправок остается такой же, как и в [6].

### 1. Связанная двухчастичная система в релятивистской модели, основанной на ПИКМ

Для описания водородоподобной системы используется релятивистская модель связанной системы, основанная на пуанкареинвариантной квантовой механике (ПИКМ).

Связанная система двух частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$  и с 4-импульсами  $p_1 = (\omega_{m_1}(p_1), \mathbf{p}_1)$  и  $p_2 = (\omega_{m_2}(p_2), \mathbf{p}_2)$  в рамках мгновенной и точечной форм ПИКМ в системе центра инерции описывается уравнением с волновой функцией (ВФ)  $\Phi_{\ell,S}^J(k)$ :

$$\sum_{\ell',S'_0}^{\infty} \int V_{\ell,S;\ell',S'}^J(k,k') \Phi_{\ell',S'}^J(k') k'^2 dk' = (E - M_0) \Phi_{\ell,S}^J(k), \quad (1)$$

где  $M_0 = \omega_{m_1}(k) + \omega_{m_2}(k)$  – эффективная масса системы невзаимодействующих частиц, имеющих импульс относительного движения  $\mathbf{k}$  ( $k = |\mathbf{k}|$ ).

Применяя методику работы [7], где для построения потенциала взаимодействия  $V$  используется амплитуда упругого рассеяния фермионов системы (импульсы частиц и спиновые индексы указаны в скобках):

$$e^-(k_1, \lambda_{k_1}) + p(k_2, \lambda_{k_2}) \rightarrow e^-(p_1, \lambda_{p_1}) + p(p_2, \lambda_{p_2}). \quad (2)$$

Согласно теории возмущений матричный элемент потенциала системы фермион-фермион будет представлять ряд матричных элементов, пропорциональных различным степеням постоянной тонкой структуры  $\alpha$ . Основной вклад в потенциал системы определяет однофотонный обмен между фермионами. Также в потенциале учтем слагаемые, содержащие более высокие порядки по константе взаимодействия  $\alpha$  (поляризация вакуума, обмен фотоном между электронами).

В итоге приходим к потенциалу взаимодействия (без учета протонных структурных поправок) в виде [8]:

$$\langle \mathbf{k}', \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} | V | \mathbf{k}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} \rangle = - \frac{Z\alpha}{\sqrt{\omega_{m_1}(k)\omega_{m_1}(k')\omega_{m_2}(k)\omega_{m_2}(k')}} \times$$

$$\times \frac{\Pi(\alpha, q^2)}{8\pi^2 q^2} J_{\lambda_{p_1}, \lambda_{k_1}}^\mu(p_1, k_1) \left( g_{\mu\rho} - \frac{q_\mu q_\rho}{q^2} \right) J_{\lambda_{p_2}, \lambda_{k_2}}^\rho(p_2, k_2), \quad (3)$$

где фермионные токи записываются в виде:

$$J_{\lambda_{p_1}, \lambda_{k_1}}^\mu(p_1, k_1) = \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) \left( F_1^e(q^2) \gamma^\mu + \frac{F_2^e(q^2)}{2m_1} i\sigma^{\mu\nu} q_{1,\nu} \right) u_{\lambda_{k_1}}(k_1), \quad (4)$$

$$J_{\lambda_{p_2}, \lambda_{k_2}}^\mu(p_2, k_2) = \bar{u}_{\lambda_{p_2}}(p_2) \gamma^\mu u_{\lambda_{k_2}}(k_2).$$

Форм факторы в (3) и (4) определяются соотношениями

$$\Pi(\alpha, q^2) = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \frac{1}{3} - \left( 3 - \frac{1}{b^2} \right) \left( 1 - \frac{\text{arcth}(b)}{b} \right) \right], \quad (5)$$

$$F_1^e(\alpha, q^2) = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{b} \left\{ (1+b^2) \text{arth}(b) - b \right\} \ln \left( \frac{2\omega_{\min}}{m_e} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2b} \left\{ \left[ (1+b^2) \ln \left( \frac{1-b^2}{4} \right) + 4 + b^2 \right] \text{arth}(b) - 2b \right\} - \frac{(1+b^2)}{2b} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \text{Li}_2 \left( \frac{1-b}{2} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{1+b}{2} \right) + 2 \text{Li}_2(b) - \frac{1}{2} \text{Li}_2(b^2) \right] \right], \quad (6)$$

$$F_2^e(\alpha, q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{(1-b^2) \text{arcth}(b)}{b}, \quad (b = \frac{|q|}{\sqrt{|q|^2 + 4m_e^2}}). \quad (7)$$

Импульсы фермионов в системе центра инерции определяются соотношениями:

$$\mathbf{k}_1 = (\omega_{m_1}(k), \mathbf{k}), p_1 = (\omega_{m_1}(k'), \mathbf{k}'), k_2 = (\omega_{m_2}(k), -\mathbf{k}), p_2 = (\omega_{m_2}(k'), -\mathbf{k}'),$$

а 4-импульс виртуального фотона  $q: q = \{q_0 = 0, \mathbf{k} - \mathbf{k}'\}$ . Параметр  $Z$  определяет величину электрического заряда второго фермиона.

Ядро фермион-фермионной системы  $V_{\ell, S; \ell', S'}^J(k, k')$  уравнения (1) в  $\ell - S$  базисе для произвольного полного углового момента  $J$ , после



точного вычисления спинорной части методом базисных спиноров [9], запишется в виде [7, 8]:

$$V_{\ell, S; \ell', S'}^J(k, k') = -\frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{2J+1} \sum_{\lambda_{k_i}, \lambda_{p_i} = -1}^1 \mathbf{C}_{\lambda_{k_1}/2, \lambda_{k_2}/2, \lambda/2}^{1/2, 1/2, S} \mathbf{C}_{0, 0, \lambda}^{\ell, S, J} \mathbf{C}_{0, 0, \lambda'}^{\ell', S', J} \times$$

$$\mathbf{C}_{\lambda_{p_1}/2, \lambda_{p_2}/2, \lambda'/2}^{1/2, 1/2, S'} \frac{Z \alpha}{4\pi} \left( \sum_{i=I-IV} V^i_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}} + V_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^{(B)} \right), \quad (8)$$

где  $V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^i(k, k')$  представляют собой комбинацию функций  $\tilde{R}_\ell^{(i)}(k, k')$  и  $\tilde{U}_\ell^{(i)}(k', k)$ . Эти функции выражаются в виде одномерных интегралов:

$$\tilde{R}_\ell^{(i)}(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{K^i(\tilde{q}^2) P_\ell(x)}{q^2} dx, \quad \tilde{U}_\ell^{(i)}(k', k) \sim \int_{-1}^1 \frac{K^i(\tilde{q}^2) P_\ell(x)}{q^4} dx$$

с функциями  $K^i(\tilde{q}^2)$  зависящими только от формфакторов. Для обозначения коэффициентов Клебша-Гордана используем выражение вида  $\mathbf{C}_{\lambda_{k_1}/2, \lambda_{k_2}/2, \lambda/2}^{1/2, 1/2, S}$ .

## 2. Энергетические поправки к $s$ -состояниям водородоподобных систем

Для нахождения энергетических поправок для  $s$ -состояний ( $J = S, \ell = 0$ ) релятивистской водородоподобной системы, связанных с форм факторами  $F_2^e(\alpha, q^2)$  и  $\Pi(\alpha, q^2)$ , используем выражение

$$\Delta E = \iint_{0,0}^{\infty, \infty} \tilde{R}_{n\ell=0}^C(k) \Delta V^{J=S}(k, k') \tilde{R}_{n\ell=0}^C(k') k'^2 k^2 dk' dk, \quad (9)$$

где  $\Delta V^{J=S}(k, k')$  – добавка к потенциалу с точечными фермионами и  $R_{n\ell}^C(k)$  волновые функции в импульсном приближении нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом

$$R_{n\ell}^C(k, \beta) = \sqrt{\frac{2(n-\ell-1)!}{\pi(n+\ell)!}} \frac{n^2 2^{2(\ell+1)} \ell! n^\ell (k/\beta)^\ell}{\beta^{3/2} (n^2 (k/\beta)^2 + 1)^{\ell+2}} \mathbf{G}_{n-\ell-1}^{\ell-1} \left( \frac{n^2 (k/\beta)^2 + 1}{n^2 (k/\beta)^2 + 1} \right) \quad (10)$$

с полиномами Гегенбауэра  $\mathbf{G}_n^\ell(x)$  и  $\beta = \mu\alpha$ .

Проведем вычисления трех видов поправок:  $\Delta E_{NR}$ ,  $\Delta E_{LC}$  и  $\Delta E_{rel}$ , используя различные приближения:

- нерелятивистское значение  $\Delta E_{NR}$  получается в результате приближения

$$k^2 / m_{1,2}^2, k'^2 / m_{1,2}^2 = 1 \text{ и } q^2 = m_1^2. \quad (11)$$

- лидирующий вклад  $\Delta E_{LC}$  вычисляется для случая, когда в потенциале остаются слагаемые порядка  $\square k^2 / m_{1,2}^2, \square k'^2 / m_{1,2}^2$ . Это соответствует использованию потенциала Брейта в уравнении (1).

- точное вычисление  $\Delta E_{rel}$  (без разложения по степеням  $k^2, k'^2 / m_{1,2}^2$  и  $q^2 / m_1^2$ ).

Величина  $\Delta E_{Rel}$  с потенциалом (8) включает поправки с учетом релятивистского движения фермионов системы (протона и электрона). Оценку релятивистских вкладов высших порядков найдем, используя величину:

$$\Delta_{HO} = \Delta E_{Rel} - \Delta E_{LC}. \quad (12)$$

Ядро потенциала (3) было получено без всяких допущений относительно скоростей фермионов и величины  $q^2$ , и, следовательно, является приемлемым способом анализа релятивистских вкладов более высокого порядка, чем приближение Брейта.

### 3. Численная оценка релятивистских вкладов

Численные расчеты проведем для вкладов поляризации вакуума и форм-фактора Паули, используя значения фундаментальных физических констант, взятых из [10].

#### 3.1 Вклады поляризации вакуума в однопетлевом приближении

Рассмотрим релятивистские дополнительные вклады к энергии для  $1s$  и  $2s$  состояний водородоподобных систем, которые связаны с поляризацией вакуума за счет электрон-позитронной петли.

Вычисление лидирующего (приближение Брейта) порядка проделано во многих работах. Это было индуцировано ситуацией, что для  $\mu^- p$  системы разложение по степеням  $q^2 / m_1^2$  является неприемлемым и соответственно использование такого разложения дает явно неверный ответ (см., например, [10]). Поправки для  $1s$  и  $2s$  состояний имеют вид:

$$\Delta E_{1-loop}^{LC}(1s) = -\frac{\mu_{red}(Z\alpha)^2\alpha}{18\pi\beta_1^3} \times \left[ \frac{6(2\beta_1^4 - \beta_1^2 - 4)\arccos\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + (9\pi\beta_1^2 - 22\beta_1^3 - 24\beta_1 + 12\pi) \right], \quad (13)$$

$$\Delta E_{1-loop}^{LC}(2s) = \frac{\mu_{red}(Z\alpha)^2\alpha}{18\pi\beta_1^3} \frac{1}{(4-\beta_1^2)^{5/2}} \left[ \sqrt{4-\beta_1^2} \times \right. \\ \left. \times (2688\beta_1 - 3\pi(\beta_1^2 - 4)^2(56 + 3\beta_1^2) + \beta_1^3 [7\beta_1^2(7 + \beta_1^2) - 1088]) - \right. \\ \left. - 3\arccos(\beta_1/2)(\beta_1^8 - 10\beta_1^6 - 300\beta_1^4 + 2048\beta_1^2 - 3584) \right], \quad (14)$$

где  $\beta_1 = \mu_{red}Z\alpha / m_1$ ,  $\mu_{red}$  – приведенная масса.

В таблице 1 представлены расчеты энергетических сдвигов для атома водорода, в том числе и с учетом релятивистских поправок высоких порядков.

Таблица 1 – Поправки, связанные с электрон-позитронной однопетлевой поляризацией вакуума в различных приближениях: нерелятивистское  $\Delta E_{1-loop}$ , лидирующий вклад  $\Delta E_{1-loop}^{LC}$  и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков  $\Delta E_{1-loop}^{Rel}$  для атома водорода ( $e^- p$ -система) (в кГц)

$n$	$\Delta E_{1-loop}$	$\Delta E_{1-loop}^{LC}$	$\Delta E_{1-loop}^{Rel}$	$\Delta_{1-loop}^{HO}$
1	-216675,846	-214751,238	-214027,933	723,305
2	-27084,481	-26843,677	-26754,973	88,704

Результаты вычислений показывают, что лидирующий вклад  $\Delta E_{1-loop}^{LC}$  (уравнения (13) и (14)) дает 0,90% по отношению к вкладу  $\Delta E_{1-loop}$  с форм фактором (5) в приближении  $q^2 / m_1^2 \ll 1$  как для  $1s$ , так и  $2s$ -состояния соответственно. Дополнительный вклад  $\Delta_{1-loop}^{HO}$  к поправкам (13) и (14), связанный с релятивистским движением электрона и протона, составляет  $723 \pm 2$  и  $89 \pm 3$  кГц. Поскольку экспериментальная точность интервала ( $1s - 2s$ ) составляет порядка  $10^{-2}$  кГц, поэтому такие поправки необходимо учитывать при расчете энергетических уровней.

В таблице 2 представлены аналогичные таблице 1 результаты вычислений для мюонного водорода.

Таблица 2 – Поправки, связанные с электрон-позитронной однопетлевой поляризацией вакуума в различных приближениях: нерелятивистское  $\Delta E_{1-loop}$ , лидирующий вклад  $\Delta E_{1-loop}^{LC}$  и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков  $\Delta E_{1-loop}^{Rel}$  для мюонного водорода ( $\mu^- p$  система) (в миллиэВ)

$n$	$\Delta E_{1-loop}$	$\Delta E_{1-loop}^{LC} (nS)$	$\Delta E_{1-loop}^{Rel}$	$\Delta_{1-loop}^{HO}$
1	-5760,8813	-1898,8296	-1898,9331	-0,1035
2	-720,1102	-219,5840	-219,5975	-0,0135

Релятивистские поправки высших порядков  $\Delta_{1-loop}^{HO}$ , рассчитанные с помощью точного выражения для потенциала взаимодействия, следует учитывать при вычислениях спектра мюонного водорода, так как предполагаемая точность измерений составляет  $10^{-4}$  миллиэВ.

### 3.2 Вклад форм-фактора Паули $F_2^e(q^2)$

Для расчетов вкладов структуры электрона (мюона) за счет форм фактора Паули  $F_2^e(q^2)$  введем поправку, связанную с лидирующим вкладом

$$\Delta E_{F_2^e}^{LC} = \int_0^\infty \int_0^\infty dk dk' R_{n\ell=0}^C(k, \beta) R_{n\ell=0}^C(k', \beta) k^2 k'^2 \times \\ \times \frac{Z\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{2\mu_p}{(4S-1)m_1 m_2} \right) \left[ 2k' k \tilde{F}_{2,\ell=1}^e(k', k) - (k'^2 + k^2) \tilde{F}_{2,\ell=0}^e(k', k) \right], \quad (15)$$

где форм факторная функция при  $q^2 \ll m_1^2$  имеет вид:

$$\tilde{F}_{2,\ell}^e(k', k) = \int_{-1}^1 F_2^e(q^2) \frac{P_\ell(x)}{q^2} dx \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left[ (-1) \frac{Q_\ell(z)}{k' k} + \frac{\delta_{\ell 0}}{3 m_1^2} \right]. \quad (16)$$

Процедура численного расчета для атома водорода приводит к результатам, представленным в таблице 3.

Как следует из таблицы, что использование точного выражения для форм-фактора  $F_2^e(q^2)$ , так и релятивистские эффекты высших порядков приводят к уменьшению поправок по сравнению с нерелятивистским приближением. Эффект, связанный с включением высоких

степеней  $q^2 / m_1^2$  и релятивистского движения частиц системы, составляет  $-8413,32$  кГц  $-1053,196$  кГц или  $2,08\%$  для  $1s$  и  $2s$ -состояний. Такие вклады должны учитываться в теоретических вычислениях сдвигов атома водорода.

Таблица 3 – Поправки, связанные внутренней структурой электрона за счет  $F_2^e$  и вклады  $\Delta E_{NR}$ ,  $\Delta E_{LC}$  и релятивистские поправки высоких порядков  $\Delta E_{Rel}$  для атома водорода (в кГц)

$n$	$\Delta E_{F_2^e}^{NR}$	$\Delta E_{F_2^e}^{LC}$	$\Delta E_{F_2^e}^{Rel}$	$\Delta_{F_2^e}^{HO}$ , кГц
1	405031,32	400433,84	396618,00	-3815,84
2	50628,91	50053,57	49575,72	-477,85

Результаты для мюонного атома водорода, отображенные в таблице 4, также подтверждают необходимость учета такого рода поправок и для этой системы.

Таблица 4 – Поправки, связанные внутренней структурой электрона за счет  $F_2^e$  и вклады  $\Delta E_{NR}$ ,  $\Delta E_{LC}$  и релятивистские поправки высоких порядков  $\Delta E_{Rel}$  для мюонного атома водорода (в миллиэВ)

$n$	$\Delta E_{F_2^e}^{NR}$	$\Delta E_{F_2^e}^{LC}$	$\Delta E_{F_2^e}^{Rel}$	$\Delta_{F_2^e}^{HO}$
1	0,0937	0,0928	0,0920	-0,0008
2	0,0117	0,0116	0,0115	-0,0001

Полный вклад этих поправок, как и в случае атома водорода, составляют по отношению нерелятивистскому вкладу около  $2\%$  или  $-0,0018$  миллиэВ и  $-0,0002$  миллиэВ соответственно для  $1s$  и  $2s$ -состояний.

### Заключение

Ядро уравнения (1) с точно вычисленной спинорной частью позволяет проводить с высокой точностью вычисление энергетических поправок, обусловленных эффектами поляризации вакуума и радиационными поправками для релятивистских фермионов. Результаты вычислений показывают, что учет релятивистских эффектов высшего порядка, как для атома водорода, так и для  $\mu^- p$ -системы важен с точки зрения современных экспериментальных измерений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского Фонда Фундаментальных Исследований (г.Минск, Беларусь).

### Литература

1. Phase-coherent measurement of the hydrogen  $1S - 2S$  transition frequency with an optical frequency interval divider chain / T. Udem [et al.] // *Phys.Rev.Lett.* – 1997. – Vol. 79, № 14. – P. 2646–2649.
2. Hansch, T.W. Laser spectroscopy and quantum optics / T.W. Hansch, H. Walther // *Rev. Mod. Phys.* – 1997. – Vol. 71, № 2. – P. S242–S252.
3. Improved Measurement of the Hydrogen  $1S - 2S$  Transition Frequency // C.G. Parthey [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – Vol. 107, № 20. – P. 203001-1–203001-5.
4. Karshenboim, S.G. Precision physics of simple atoms: QED tests, nuclear structure and fundamental constants / S.G. Karshenboim // *Phys. Rept.* – 2005. – Vol. 422. – P.1–63.
5. Eides, M.I. Theory of light hydrogenlike atoms / M.I. Eides, H. Grotch, V.A. Shelyuto // *Phys. Rept.* – 2001. – Vol. 342. – P. 63–261.
6. Андреев, В.В. Структурные релятивистские эффекты высших порядков для водородоподобных систем / В.В. Андреев, К.С. Бабич, А. Дорохов // IV Международная научная конференция «Проблемы взаимодействия излучения с веществом», посвященная 90-летию со дня рождения Б.В. Бокутя, 9–11 ноября 2016 г.: [материалы] в 2 частях. Ч. 1 / редкол.: С.А.Хахомов (гл. ред.) [и др.] / УО «ГГУ им.Ф.Скорины». – Гомель, 2016. – С.102–108.
7. Lucha, W. Relativistic treatment of fermion anti-fermion bound states / W. Lucha, H. Rupprecht, F.F. Schoberl // *Phys. Rev.* – 1991. – Vol. D44. – P. 242–249.
8. Андреев, В.В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами // В.В. Андреев. – Гомель: УО «Гомельский государственный университет им.Ф.Скорины», 2008. – 294 с.
9. Андреев, В.В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // *Ядерная физика.* – 2003. – Т. 66, № 2. – С. 410–420.
10. Martynenko, A.P.  $2S$  hyperfine splitting of muonic hydrogen / A.P. Martynenko // *Phys. Rev.* – 2005. – Vol. A71. – P. 022506.

**В.В. Андреев<sup>1</sup>, В.Ю. Гавриш<sup>2</sup>, А.Ф. Крутов<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

<sup>3</sup>Самарский университет, Самара, Россия

## **ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ФОРМ-ФАКТОР ПЕРЕХОДА $\omega \rightarrow \pi^0 \ell^+ \ell^-$ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ**

### **Введение**

С появлением современных экспериментальных данных по распадам псевдоскалярных и векторных мезонов [1-3] возродился интерес к изучению радиационных переходов легких адронов. Такие распады, как  $V \rightarrow P\gamma$  и  $V \rightarrow P\ell^+\ell^-$  наиболее удобны для апробации различных подходов и моделей: очевидно, что такие распады имеют простейший механизм взаимодействия конститuentных кварков, и, как следствие, являются более удобным полигоном для исследования кваркового взаимодействия, чем адронные переходы псевдоскалярных и векторных мезонов. Из указанного следует, что такие процессы позволяют получить численную оценку не только различных форм-факторов адронов, но и оценить углы смешивания, а также дать численные расчеты по структуре кварков, входящих в мезон. Данная проблема особенно актуальна для мезонов легкого сектора, поскольку такие системы являются чисто релятивистскими, что позволяет оценить магнитные моменты кварков с высокой точностью.

Среди разнообразия подходов и моделей, служащих для описания релятивистских кварковых систем, особое место занимают модели, основанные на алгебре Пуанкаре: данные модели называют пуанкаре-ковариантными или релятивистскими моделями прямого взаимодействия частиц.

Из трех форм пуанкаре-инвариантной квантовой механики (ПиКМ) для решения задач по расчету наблюдаемых радиационных переходов, наиболее используемой, в силу особенностей коммутационных соотношений генераторов с взаимодействием и без него, является динамика на световом фронте. В работах, посвященных радиационным распадам, тем не менее, кварк полагается бесструктурной частицей, в отличие от мгновенной формы динамики, где в работах было показано, что для совпадения расчетов с экспериментальными

данными необходимо учитывать аномальный магнитный момент кварка. Данная идея не нова, поскольку в работах по анализу барионных наблюдаемых были введены аномальные магнитные моменты.

Из большого количества работ, посвященных использованию пункаре-инвариантной механики, из трех форм ПиКМ, точечная форма динамики менее используется для расчетов экспериментальных характеристик мезонов. Несмотря на развитый математический аппарат по расчету электромагнитных форм-факторов мезонов и успешное применение для расчета барионных наблюдаемых в рамках точечной формы ПиКМ, существенные отличия для мезонов легкого сектора повлекло к появлению различных модификаций данной формы (см. [4, 5]). Из указанного выше следует, что развитие данной формы динамики с последующим применением для расчетов наблюдаемых переходов является актуальной задачей физики связанных состояний.

В данной работе, авторы, используя разработанную методику расчета наблюдаемых в точечной форме ПиКМ и полученные параметры модели, изучают поведение форм-факторов легких нейтральных мезонов. Отметим, что параметры модели в данной статье не анализируются: статья носит вычислительный характер. В разделе 1 авторы резюмируют полученные ранее параметры модели, в разделе 2 кратко обсуждается схемы смешивания легких нейтральных мезонов, в разделе 3 – получено поведение форм-фактора

для распада  $\omega \rightarrow \pi^0 \ell^+ \ell^-$  при различных переданных импульсах лептонной паре  $q$ .

## 1. Параметры модели, основанной на точечной форме ПиКМ

Процедура получения параметров модели с использованием интегральных представлений распадов  $P \rightarrow \ell \nu_\ell$ ,  $V \rightarrow \ell^+ \ell^-$  и константы псевдоскалярной плотности  $g_p$  подробно изложена в [6], поэтому в данной работе приведем полученные результаты для осцилляторной волновой функции

$$\Phi(k, \beta_{q\bar{Q}}^I) = \frac{2}{\pi^{1/4} (\beta_{q\bar{Q}}^I)^{3/2}} \exp\left[-\frac{k^2}{2(\beta_{q\bar{Q}}^I)^2}\right], \quad I = P, V: \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} m_u &= (219,48 \pm 9,69) \text{ МэВ}, \quad m_d = (221,97 \pm 9,69) \text{ МэВ}, \quad m_s = (416,95 \pm 61,2) \text{ МэВ}, \\ \beta_{u\bar{d}}^P &= (367,93 \pm 25,10) \text{ МэВ}, \quad \beta_{u\bar{d}}^V = (311,95 \pm 2,14) \text{ МэВ}, \\ \beta_{u\bar{s}}^P &= (375,53 \pm 19,66) \text{ МэВ}, \quad \beta_{u\bar{s}}^V = (313,62 \pm 24,22) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (1.2)$$



Для дальнейших вычислений, полагая, что изотопическая симметрия кварков  $u$  и  $d$  слабо нарушена, имеем

$$\beta_{u\bar{u}}^V = \beta_{u\bar{d}}^V - \Delta\beta_{u\bar{d}}, \quad \beta_{d\bar{d}}^V = \beta_{u\bar{d}}^V + \Delta\beta_{u\bar{d}}, \quad \beta_{d\bar{s}}^V = \beta_{u\bar{s}}^V + \Delta\beta_{u\bar{d}}, \quad \beta_{d\bar{s}}^P = \beta_{u\bar{s}}^P + \Delta\beta_{u\bar{d}}, \quad (1.3)$$

где  $\Delta\beta_{u\bar{d}} = m_d - m_u = (2,5 \pm 0,2)$  МэВ.

Полученные результаты расчетов были проанализированы в работе [6], поэтому мы сразу переходим к описанию процедуры смешивания векторных мезонов.

## 2. Схемы смешивания векторных мезонов

В физических приложениях наиболее часто используются следующие схемы базиса для смешивания:

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\bar{u} - d\bar{d}\rangle, \\ \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\bar{u} + d\bar{d}\rangle, \\ \psi_s = |s\bar{s}\rangle \end{cases} \quad \text{И} \quad \begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\bar{u} - d\bar{d}\rangle, \\ \psi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}|u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\rangle, \\ \psi_s = \frac{1}{\sqrt{3}}|u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\rangle. \end{cases} \quad (2.1)$$

В данной работе предполагается, что оба базиса дают эквивалентное описание смешивания кварковых состояний в векторных мезонах.

В итоге состояния векторных мезонов определяются выражениями:

$$\begin{cases} |\phi\rangle = \cos\phi_V \psi_q - \sin\phi_V \psi_8 = \cos\theta_V \psi_8 - \sin\theta_V \psi_1, \\ |\omega\rangle = \sin\phi_V \psi_q + \cos\phi_V \psi_8 = \sin\theta_V \psi_8 + \cos\theta_V \psi_1, \\ |\rho^0\rangle = \psi_1, \end{cases} \quad (2.2)$$

где углы смешивания  $\phi_V$  и  $\theta_V$  связаны соотношением

$$\theta_V = \phi_V - \arctan\sqrt{2}. \quad (2.3)$$

## 3. Моделирование поведения форм-фактора $\omega \rightarrow \pi^0 \ell^+ \ell^-$

Процедура получения интегрального представления константы распада  $V \rightarrow P\gamma^*$  подробно изложена в [10], поэтому здесь мы приведем только конечное выражение:

$$\begin{aligned} g_{VP\gamma^*}(q^2) = & \frac{1}{4\pi} \sum_{v_1, v_1'} \int dk \sqrt{\frac{3+4v_1(\lambda_V - v_1)}{4}} \frac{v_1'}{\sqrt{M_0(k)}} \Phi(k, \beta_{q\bar{Q}}^V) \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k)\omega_Q(k)}} \times \\ & \times \left( e_q \sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k_2)}{\omega_{m_q}(k_2)}} \bar{u}_{v_1'}(k_2, m_q) B(\nu_Q) (K^*(\lambda_V) \cdot \Gamma_q) u_{v_1}(k, m_q) \frac{1}{\sqrt{\omega_{12}^2(k, t) - 1}} \frac{\Phi^*(k_2, \beta_{q\bar{Q}}^P)}{\sqrt{M_0(k_2)}} \right) \times \\ & \times D_{-v_1', \lambda_V - v_1}(n_{W_2}(k, \nu_Q)) \frac{1}{\sqrt{\omega_{12}^2(k, t) - 1}} \frac{\Phi^*(k_2, \beta_{q\bar{Q}}^P)}{\sqrt{M_0(k_2)}} D_{-v_1', \lambda_V - v_1}(n_{W_2}(k, \nu_Q)) + e_{\bar{Q}} \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(k_1)}{\omega_{m_{\bar{Q}}}(k_1)}} \times \\ & \times \bar{v}_{\lambda_V - v_1}(k, m_{\bar{Q}}) B(-\nu_Q) (K^*(\lambda_V) \cdot \Gamma_{\bar{Q}}) v_{-v_1'}(k_1, m_{\bar{Q}}) \times \frac{1}{\sqrt{\omega_{12}^2(k, t) - 1}} \frac{\Phi^*(k_1, \beta_{q\bar{Q}}^P)}{\sqrt{M_0(k_1)}} D_{v_1, v_1}(n_{W_1}(k, \nu_Q)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

В выражении (3.1)

$$\begin{aligned} \nu_Q &= \frac{V_Q}{V_0}, n_{W_{2,1}}(k, \nu_Q) = -\frac{[k \times V_Q]}{\omega_{m_{q,\bar{Q}}}(k) + m_{q,\bar{Q}} - (kV_Q)}, \\ \Gamma_{q,\bar{Q}} &= F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{1}{2m_{q,\bar{Q}}}F_2(q^2)\sigma^{\mu\nu}q_\nu, K(\lambda_V) = \sqrt{\frac{\varpi_{12}(k,t)-1}{2}}\{0, \lambda_V, i, 0\}, \\ k_{1,2} &= k \pm \nu_Q((\varpi_{12}(k,t)+1)\omega_{m_{q,\bar{Q}}}(k) - k\sqrt{\varpi_{12}^2(k,t)-1}\cos\theta_k), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $q^2 = t = (Q-Q')^2$ . Используя параметризацию форм-факторов [11]

$$F_1(q^2) = \frac{e_q}{1 - \frac{a}{6m_q^2}t}, F_2(q^2) = \frac{e_q \kappa_q}{\left(1 - \frac{a}{12m_q^2}t\right)^2}, \quad (3.3)$$

получаем поведение  $\left|\frac{g_{VP\gamma^*}(q^2)}{g_{VP\gamma}(0)}\right|^2$  для распада  $\omega \rightarrow \pi^0 \ell^+ \ell^-$  при различных значениях переданного импульса  $q$ , представленное на рисунке 1.

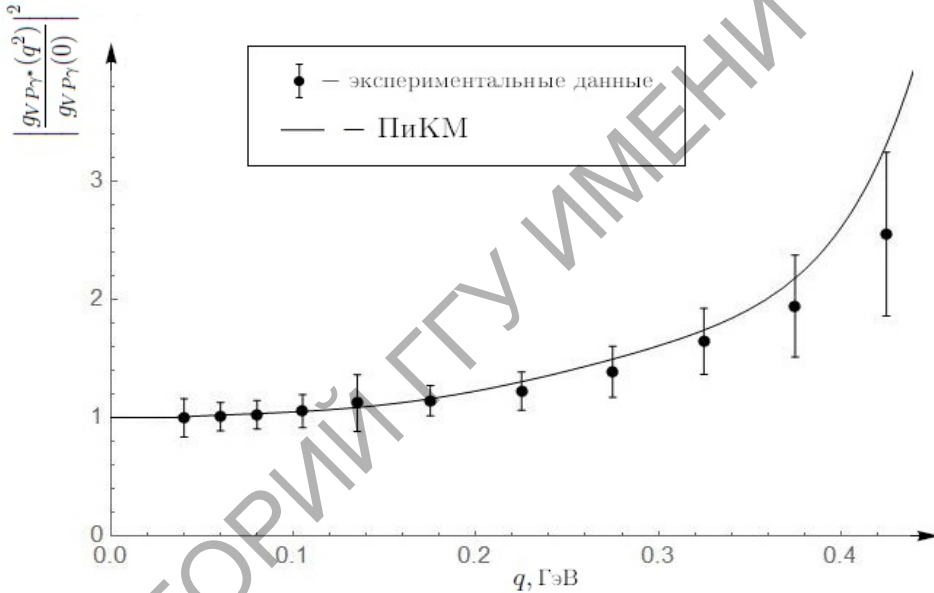


Рисунок 1 – Поведение форм-фактора распада  $\omega \rightarrow \pi^0 \ell^+ \ell^-$  при различных  $q$ . Экспериментальные данные взяты из [3]

Значение параметра  $a$  в (3.3) принимаем  $a=0,3$ , как и в работе [11]; угол смешивания векторных мезонов, следуя [7], при расчетах принимался равным  $\theta_V = (31,92 \pm 0,2)^\circ$ . Исходя из вычислений, очевидно, что для  $q \in [0, 0,45)$  ГэВ предложенная в работе релятивистская кварковая модель удовлетворительно описывает современные экспериментальные данные.

## Заклучение

В ходе работы было изучено поведение константы распада  $V \rightarrow P\gamma^*$  в точечной форме ПиКМ. Сравнительный анализ показывает, что полученное в рамках релятивистской кварковой модели поведение форм-фактора  $\left| \frac{g_{VP\gamma^*}(q^2)}{g_{VP\gamma}(0)} \right|^2$  описывает современные экспериментальные данные, что делает предложенную модель самосогласованной: полученное в работе поведение форм-факторов согласуется с экспериментом при параметрах модели, описывающие радиационные и лептонные распады легких мезонов.

Работа выполнена при поддержке Белорусского Республиканского фонда Фундаментальных Исследований.

## Литература

1. Babusci, D. Study of the Dalitz decay  $\phi \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  with the KLOE detector / D. Babusci, I. Balwierz-Pytkog, G. Bencivenni [and etc.] // Phys. Lett. B. – 2015. – Vol. 742. – P. 1–6.
2. Anastasi, A. Measurement of the  $\phi \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  transition form factor with the KLOE detector / A. Anastasi [KLOE] // Phys. Lett. B. – 2016. – Vol. 752. – P. 362–367.
3. Adlarson, P. Measurement of the  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  and  $\eta \rightarrow e^+ e^-$  Dalitz decays with the A2 setup at MAMI / P. Adlarson [MAMI] // Phys. Rev. C. – 2017. – Vol. 95. – P. 035208.
4. Desplanques, B. Dirac's inspired point form and hadron form factors / B. Desplanques // Nuclear Physics A. – 2005. – Vol. 755. – P. 303–306.
5. Melde, T. Spectator-model operators in point-form relativistic quantum mechanics / T. Melde, L. Canton, W. Plessas, R. F. Wagenbrunn // Eur. Phys. J. A. – 2005. – Vol. 25. – P. 97–105.
6. Andreev, V. Constituent quark masses in Poincaré-invariant quantum mechanics / V. Andreev, V. Haurysh // J. Phys. Conf. Ser. – 2016. – Vol. 938. – P. 012030.
7. Amelino-C. G. Physics with the KLOE-2 experiment at the upgraded DAFNE / G. Amelino-Camelia [KLOE] // Eur. Phys. J. – 2010. – Vol. C68. – P. 619–681.
8. Ambrosino, F. Measurement of the pseudoscalar mixing angle and eta-prime gluonium content with KLOE detector / F. Ambrosino [KLOE] // Phys. Lett. – 2007. – Vol. B648. – P. 267–273.
9. Feldmann, T. Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons:

The Sequel / T. Feldmann, P. Kroll, B. Stech // Phys. Lett. – 1999. – V. B449. – P. 339–346.

10. Andreev, V. Radiative decays of light vector mesons in Poincare invariant quantum mechanics/ V. Andreev, V. Haurysh // J. Phys. Conf. Ser. – 2016. – Vol. 678. – P. 012041.

11. Petronzio, R. Possible evidence of extended objects inside the proton/ R. Petronzio, S. Simula, G. Ricco // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 67. – P. 094004.

**В.В. Андреев, Н.В. Максименко, О.М. Дерюжкова**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ БЕССПИНОВОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ДИПОЛЬНЫХ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ**

Изучение механизмов электромагнитных взаимодействий адронов, а также физическая интерпретация их свойств и характеристик, проявляющихся при данных взаимодействиях, возможно на основе использования эффективных лагранжианов, полученных в рамках теоретико-полевых подходов и согласующихся с низкоэнергетическими теоремами [1, 2].

Чтобы получить уравнения движения заряженной структурной частицы спина  $\theta$  в электромагнитном поле используем релятивистские уравнения Лагранжа-Эйлера. При этом лагранжиан будет содержать электрическую  $\alpha$  и магнитную  $\beta$  поляризуемости структурной частицы. Чтобы согласовать поляризуемости  $\alpha$  и  $\beta$  с поляризуемостями, которые входят в амплитуду комптоновского рассеяния на бесспиновой частице, выполним вычисления этой амплитуды. На основании принципа соответствия с релятивистской классической электродинамикой определим лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля со структурной бесспиновой частицей с учетом дипольных поляризуемостей, следующим образом [3]:

$$L = -\frac{1}{4}F^2 + \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2(\varphi^* \varphi) + L_I^{(e)} + L_I^{(\alpha)}, \quad (1)$$

где  $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ,  $F_{\mu\nu}$  – тензор электромагнитного поля  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $A_\mu$  – векторный потенциал электромагнитного поля,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ,  $\partial_\mu$  – 4-мерная производная,  $\varphi = \varphi(x)$  – волновая функция бесспиновой частицы,  $\varphi^* = \varphi^*(x)$  – комплексно сопряженная волновая функция,  $m$  – масса структурной бесспиновой частицы. В уравнении (1) члены, отвечающие за вклады от взаимодействия заряда бесспиновой частицы с электромагнитным полем  $L_I^{(e)}$  и вклады от учета дипольных поляризуемостей, связанных с электрическими и магнитными дипольными моментами адронов  $L_I^{(\alpha)}$ , определены следующим образом [4]:

$$L_I^{(e)} = j_\mu A^\mu + e^2 A^2(\varphi^* \varphi),$$

где  $J_\mu$  – сохраняющийся ток,  $j_\mu A^\mu = -ieA_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + ieA^\mu \partial_\mu \varphi^* \varphi$ ;  $e$  – элементарный заряд;

$$L_I^{(\alpha)} = \frac{2\pi}{m} \left[ \partial_\mu \varphi^* \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^* \partial_\mu \varphi \right] \left[ (\alpha + \beta) F^{\rho\mu} F_{\rho\nu} - \frac{\beta}{2} \delta_\nu^\mu F^2 \right]. \quad (2)$$

В этом уравнении  $\alpha$  и  $\beta$  – электрическая и магнитная поляризуемости структурной бесспиновой частицы,  $\delta_\nu^\rho$  – дельта-символ Кронекера.

Тогда полный лагранжиан имеет вид:

$$L = -\frac{1}{4} F^2 + \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2(\varphi^* \varphi) - ieA_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + ieA^\mu \partial_\mu \varphi^* \varphi + e^2 A^2(\varphi^* \varphi) + \frac{2\pi}{m} \left[ \partial_\mu \varphi^* \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^* \partial_\mu \varphi \right] \left[ (\alpha + \beta) F^{\rho\mu} F_{\rho\nu} - \frac{\beta}{2} \delta_\nu^\mu F^2 \right]. \quad (3)$$

Используя выражение для лагранжиана (3) получим уравнения движения структурной заряженной бесспиновой частицы в электромагнитном поле. Запишем релятивистские уравнения Лагранжа-Эйлера для волновой функции  $\varphi$  бесспиновой частицы, комплексно сопряженной волновой функции  $\varphi^*$  и векторного потенциала электромагнитного поля  $A_\mu$ :

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi^*} = 0,$$

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0.$$

Вычисляя частные производные  $\partial_\mu$  от лагранжиана (3) по  $\varphi$ ,  $\varphi^*$  и  $A_\mu$  получим уравнения движения в виде:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi + ie \partial_\mu A^\mu \varphi + ie A_\mu \partial^\mu \varphi - e^2 A^2 \varphi + 2 \partial_\mu K_\nu^\mu \partial^\nu \varphi = 0, \quad (4)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^* + m^2 \varphi^* - ie \partial_\mu A^\mu \varphi^* - ie A^\mu \partial_\mu \varphi^* - e^2 A^2 \varphi^* + 2 \partial_\mu K_\nu^\mu \partial^\nu \varphi^* = 0, \quad (5)$$

где в уравнениях (4) и (5) использовано обозначение:

$$K_\nu^\mu = \frac{2\pi}{m} \left\{ (\alpha + \beta) F^{\rho\mu} F_{\rho\nu} - \frac{\beta}{2} \delta_\nu^\mu F^2 \right\}.$$

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu} + ie \varphi^* \partial^\nu \varphi - ie \partial^\nu \varphi^* \varphi - 2e^2 A^\nu \varphi^* \varphi + \partial_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (6)$$

В уравнении (6) введено обозначение в слагаемом, отвечающее за учет дипольных поляризуемостей:

$$G^{\mu\nu} = \frac{2\pi}{m} \left\{ (\alpha + \beta) (\theta^{\nu\rho} F_\rho^\mu - \theta^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \theta_\sigma^\nu F^{\mu\sigma} - \theta_\sigma^\mu F^{\nu\sigma}) - \frac{\beta}{2} 4\theta_\sigma^\sigma F^{\mu\nu} \right\}.$$

Уравнения (4)–(6) можно представить в виде, удобном для интерпретации, а именно:

$$\square \varphi + m^2 \varphi = -\partial_\mu \pi_I^\mu(\varphi) - ie A_\mu \partial^\mu \varphi + e^2 A^2 \varphi, \quad (7)$$

где  $\pi_I^\mu(\varphi) = ie A^\mu \varphi + \frac{4\pi}{m} K_\nu^\mu \partial^\nu \varphi$ .

$$\square \varphi^* + m^2 \varphi^* = -\partial_\mu \pi_I^\mu(\varphi^*) + ie A^\mu \partial_\mu \varphi^* + e^2 A^2 \varphi^*, \quad (8)$$

где  $\pi_I^\mu(\varphi^*) = -ie A^\mu \varphi^* + \frac{4\pi}{m} K_\nu^\mu \partial^\nu \varphi^*$ .

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu - \partial_\mu G^{\mu\nu}, \quad (9)$$

где  $j^\nu = ie (\varphi^* \partial^\nu \varphi - \partial^\nu \varphi^* \varphi) - 2e^2 A^\nu \varphi^* \varphi$ .

В уравнениях (7) и (8) правая часть отвечает за взаимодействие заряженной структурной частицы спина  $\theta$  с электромагнитным полем с учетом вкладов дипольных поляризуемостей. Эти уравнения переходят в уравнения Клейна-Гордона-Фока, т.е. уравнения движения свободной заряженной частицы относительно  $\varphi$  и  $\varphi^*$ , если положить правую часть выражений равной нулю.

Вычислим теперь амплитуду комптоновского рассеяния на скалярной частице в релятивистски-инвариантной форме с учетом поляризуемостей для проверки правильности выбранного лагранжиана (2). Из низкоэнергетической теоремы следует, что амплитуда комптоновского рассеяния в области низких энергий определяется борновской частью, а также вкладом поляризуемостей и среднеквадратичного радиуса частицы. Воспользуемся определением  $S$ -матричного элемента согласно работам [5, 6]. Его можно определить, используя правую часть уравнений (7) или (8) с помощью функции Грина и асимптотических условий. Тогда для  $S$ -матричного элемента, учитывающего поляризуемость структурной частицы, получим:

$$S_{fi} = i \frac{2\pi}{m} \int d^4x \left[ \partial_\rho \varphi^* \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^* \partial_\rho \varphi \right] \left[ \alpha F^{\mu\rho} F_{\mu\nu} + \beta \tilde{F}^{\mu\rho} \tilde{F}_{\mu\nu} \right], \quad (10)$$

где  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$  – дуальный тензор электромагнитного поля,  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  – 4-мерный тензор Леви-Чивита. Если в выражении (10) воспользоваться соотношением  $\tilde{F}^{\mu\rho} \tilde{F}_{\mu\nu} = \left( F^{\mu\rho} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\rho F^2 \right)$ , то амплитуду можно представить в виде:

$$S_{fi} = i \frac{2\pi}{m} \int d^4x \left[ \partial_\rho \varphi^* \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^* \partial_\rho \varphi \right] \left[ (\alpha + \beta) F^{\mu\rho} F_{\mu\nu} - \frac{\beta}{2} \delta_\nu^\rho F^2 \right]. \quad (11)$$

В импульсном представлении амплитуда (11) определяется следующим образом:

$$S_{fi} = \frac{(-i)(2\pi)^4 \delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^6 \sqrt{16\omega_1\omega_2 E_1 E_2}} M, \quad (12)$$

где  $\omega$  – частота излучения,  $k_1, p_1$  и  $k_2, p_2$  – импульсы падающего и рассеянного фотонов и скалярной частицы в начальном и конечном состоянии соответственно,  $\delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)$  – дельта-функция Дирака, позволяющая учесть закон сохранения 4-мерных импульсов в процес-

се комптоновского рассеяния. В выражении (12) введена матрица  $M$ , которая представляет собой два слагаемых:

$$M = M_1 + M_2, \quad (13)$$

$$M_1 = e^2 \left[ \frac{(e^{\lambda_2} (2p_2 + k_2))(e^{\lambda_1} (2p_1 + k_1))}{(p_1 + k_1)^2 - m^2} + \frac{(e^{\lambda_1} (2p_2 - k_1))(e^{\lambda_2} (2p_1 - k_2))}{(p_1 + k_1)^2 - m^2} - 2(e^{\lambda_2} e^{\lambda_1}) \right],$$

$$M_2 = -\frac{2\pi}{m} (p_{2\nu} p_1^\mu + p_2^\mu p_{1\nu}) \left[ (\alpha + \beta) (F_{\mu\rho}^{(2)} F_{(1)}^{\rho\nu} + F_{\mu\rho}^{(1)} F_{(2)}^{\rho\nu}) - \beta \delta_\rho^\nu F_{(2)}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(1)} \right],$$

где  $e^{\lambda_1}$  и  $e^{\lambda_2}$  – векторы поляризации падающего и рассеянного фотонов соответственно, через которые определяются тензоры энергии электромагнитного поля:

$$F_{(1)}^{\mu\nu} = k_1^\mu e^{(\lambda_1)\nu} - k_1^\nu e^{(\lambda_1)\mu},$$

$F_{(2)}^{\mu\nu} = k_2^\mu e^{(\lambda_2)\nu} - k_2^\nu e^{(\lambda_2)\mu}$ . Выражение  $M_1$  дает борновскую часть амплитуды рассеяния, а  $M_2$  определяет релятивистский вклад поляризуемостей в амплитуду.

Из соотношения (13) следует калибровочно-инвариантное выражение для амплитуды комптоновского рассеяния на структурной частице спина  $\theta$  с учетом поляризуемостей. Данная амплитуда удовлетворяет условию перекрестной симметрии.

Если перейти в систему покоя мишени, то для рассеяния фотона на произвольный угол на любой бесспиновой частице амплитуда (12) с учетом (13) примет вид:

$$S_{fi} = \frac{(-i)\delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^2 \sqrt{16\omega_1\omega_2 E_1 E_2}} \times$$

$$\times \left\{ -2e^2 (\vec{e}^{(\lambda_2)} \vec{e}^{(\lambda_1)}) + 8\pi t \omega_1 \omega_2 \left( \alpha (\vec{e}^{(\lambda_2)} \vec{e}^{(\lambda_1)}) + \beta \left( [\vec{k}_2 \vec{e}^{(\lambda_2)}] [\vec{k}_1 \vec{e}^{(\lambda_1)}] \right) \right) \right\}.$$

Таким образом, в низкоэнергетическом пределе, введенные в лагранжиан (2) поляризуемости согласуются с комптоновскими поляризуемостями, установленными в работах [7-9]. Данный лагранжиан и амплитуда комптоновского рассеяния на бесспиновой частице с учетом ее дипольных поляризуемостей получены опираясь на калибровочно-инвариантный подход и решения электродинамических уравнений методом функции Грина. С использованием релятивистских уравнений Лагранжа-Эйлера получены уравнения движения структурной заряженной бесспиновой частицы в электромагнитном поле.



## Литература

1. Paz, G. An introduction to NRQED / G. Paz // [Electronic resource]. – 2015. – Mode of access: <http://hep-ph/1503.07216>. – Date of access: 24.03.2015.
2. Hill, R.J. The NRQED lagrangian at order  $\frac{1}{M^4}$  / R.J. Hill, G. Lee, G. Paz, M.P. Solon // Phys. Rev. D. – 2013. – Vol. 87, № 5. – P. 053017–1–13.
3. Anandan, J. S. Classical and quantum interaction of the dipole / J.S. Anandan // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 1354–1357.
4. Максименко, Н.В. Ковариантный калибровочно-инвариантный формализм Лагранжа с учетом поляризуемостей частиц / Н.В. Максименко, О.М. Дерюжкова // Весці НАН Беларусі, серыя фіз.-мат. навук. – М.: «Беларуская навука», 2011. – № 2. – С. 27–30.
5. Богуш, А. А. Введение в теорию классических полей / А. А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск: Наука и техника, 1968. – 387 с.
6. Богуш, А. А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / А. А. Богуш. – Минск: Наука и техника, 1987. – 359 с.
7. Петрунькин, В.А. Электрическая и магнитная поляризуемости адронов / В.А. Петрунькин // ЭЧАЯ. – 1981. – Т. 12. – С. 692–753.
8. Максименко, Н.В. Низкоэнергетическое разложение амплитуды комптоновского рассеяния на адроне и одновременные коммутаторы токов / Н.В. Максименко, С.Г. Шульга // Ядерная физика. – 1990. – Т. 52. – Вып. 2(8). – С. 524–534.
9. Feinberg, G. General Theory of the van der Waals interaction: a model-independent approach / G. Feinberg, J. Sucher // Phys. Rev. A2. – 1970. – P. 2395–2415.

**Н.А. Ахраменко, А.П. Павленко**

УО «Белорусский государственный университет транспорта»,  
Гомель, Беларусь

## ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ МАССИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

### Введение

Гравитационная масса в теории тяготения Ньютона является источником гравитационного поля. Напряженность гравитационного

поля, представляет собой его силовую характеристику. В теории тяготения Ньютона напряженность статического поля тяготения определяется величиной силы, действующей на покоящееся тело единичной массы, помещенное в это поле [1-2]. В настоящее время существуют разнообразные теории тяготения, обобщающие теорию тяготения Ньютона, доминирующее положение среди которых занимает общая теория относительности (ОТО). Имеются среди них и теории гравитации, учитывающие как массу вещества, так и массу поля. Например, по предположению Бриллюэна [3] в формировании гравитационного поля вместе с массой вещества должна учитываться и масса самого поля. В [4] также учитывается масса гравитационного поля.

В данной работе определяются характеристики гравитационного поля массивной плоскости с учетом его массы. При этом используются некоторые положения классической механики.

### 1. Определение напряженности гравитационного поля плоскости

В известной аналогичной задаче электростатики напряженность электрического поля равномерно заряженной плоскости определяется выражением

$$E = \frac{\sigma_{эл}}{2\varepsilon_0}, \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{эл}$  – поверхностная плотность электрических зарядов,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная.

Сопоставляя закон Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (1.2)$$

(где  $q_1$  и  $q_2$  – точечные заряды,  $r$  – расстояние между ними) и закон всемирного тяготения

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.3)$$

(где  $G$  – гравитационная постоянная,  $m_1$  и  $m_2$  – точечные массы) замечаем, что коэффициенту  $1/4\pi\varepsilon_0$  (в соотношении (1.2)) можно поставить в соответствие  $-G$  (в соотношении (1.3)).

Тогда величине  $1/2\varepsilon_0$  будет соответствовать  $-2\pi G$  и напряженность гравитационного поля плоскости в классической механике (с учетом выражения (1.1)) можно записать в виде

$$g = -2\pi G\sigma, \quad (1.4)$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность массы плоскости.

В выражении (1.4) знак минус указывает на то, что вектор  $\mathbf{g}$  направлен к плоскости.

Пусть существующее в пространстве поле напряженности  $\mathbf{g}$  формируется как этой плоскостью, так и самим полем. Ввиду симметрии это поле будет зависеть только от одной переменной  $x$  (рисунок 1).

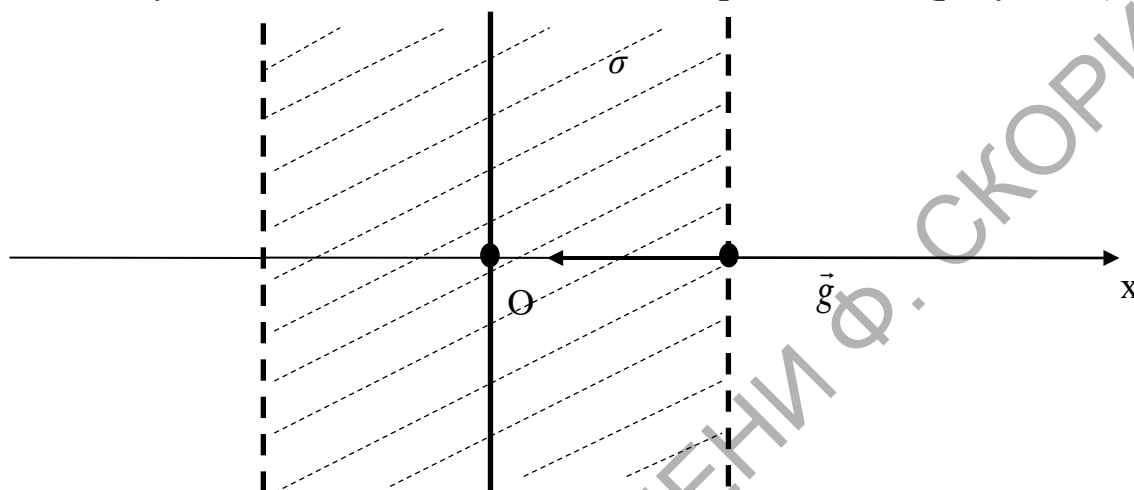


Рисунок 1 – Массивная плоскость с поверхностной плотностью массы  $\sigma$  ( $x=0$ )

Напряженность гравитационного поля в точке с координатой  $x$  будет определяться самой плоскостью и частью поля, заштрихованного на рисунке 1.1. На единицу площади поверхности с поверхностной плотностью массы  $\sigma$  будет приходиться масса поля  $\sigma_{\text{п}}$ . Величину  $\sigma_{\text{п}}$  можно выразить через объемную плотность массы этого поля  $\rho$ .

$$\sigma_{\text{п}} = 2 \int_0^x \rho dx. \quad (1.5)$$

В выражении (1.5) коэффициент два введен ввиду симметрии и учитывает поле в интервале от минус  $x$  до нуля.

С учетом массы поля выражение (1.4) преобразуется к виду

$$g = -2\pi G(\sigma + \sigma_{\text{п}}). \quad (1.6)$$

Подставив в (1.6) величину  $\sigma_{\text{п}}$  из выражения (1.5), получим

$$g = -2\pi G \left( \sigma + 2 \int_0^x \rho dx \right). \quad (1.7)$$

Объемную плотность энергии гравитационного поля запишем в следующем виде [5, с. 437]

$$w = -\frac{g^2}{8\pi G}. \quad (1.8)$$

Соответствующая ей плотность массы с учетом (1.8) запишется в виде

$$\rho = \frac{w}{c^2} = -\frac{g^2}{8\pi Gc^2}, \quad (1.9)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

Подставив  $\rho$  из выражения (1.9) в соотношение (1.7), получим уравнение

$$g = -2\pi G \left( \sigma - 2 \int_0^x \frac{g^2}{8\pi Gc^2} dx \right). \quad (1.10)$$

Дифференцируя соотношение (1.10) можно получить

$$\frac{dg}{dx} = \frac{g^2}{2c^2}. \quad (1.11)$$

После разделения переменных получим

$$\frac{dg}{g^2} = \frac{dx}{2c^2}. \quad (1.12)$$

Решение уравнения (1.12) можно записать в виде

$$-\frac{1}{g} = \frac{x}{2c^2} + const. \quad (1.13)$$

Константу в выражении (1.13) выбираем такой, чтобы при стремлении  $x$  к нулю напряженность поля стремилась к величине  $-2\pi\sigma G$ .

С учетом этого соотношение (1.13) преобразуется к виду

$$g = -\frac{2c^2}{x + \frac{c^2}{\pi\sigma G}}. \quad (1.14)$$

Выражение (1.14) определяет напряженность поля при  $x > 0$ .

Окончательно для напряженности гравитационного поля запишем

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{2c^2}{x - \frac{c^2}{\pi\sigma G}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{2c^2}{x + \frac{c^2}{\pi\sigma G}}, & x > 0 \end{cases}. \quad (1.15)$$

В выражении (1.15) напряженность гравитационного поля при  $x = 0$  записана из соображений симметрии. Из выражения (1.15) следует,

что при  $x \rightarrow \infty$  напряженность гравитационного поля стремится к нулю в отличие ньютоновского поля тяготения.

## 2. Приближение для слабых гравитационных полей

Для слабых гравитационных полей (при  $c \rightarrow \infty$ ) напряженность гравитационного поля можно представить в виде

$$g(x) = \begin{cases} 2\pi\sigma G, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2\pi\sigma G, & x > 0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

которое является ньютоновским полем тяготения.

Выражения (1.15) и (2.1) показывают, что напряженность гравитационного поля претерпевает разрыв при переходе через плоскость с распределенной на ней массой.

### Заключение

Таким образом, определена напряженность гравитационного поля массивной плоскости с учетом предположения Бриллюэна о том, что в формировании гравитационного поля вместе с массой вещества должна участвовать и масса самого поля. Полученные соотношения являются обобщением для величины напряженности гравитационного поля в нерелятивистском случае. Из этих соотношений для случая слабых гравитационных полей следуют выражения напряженности, соответствующие ньютоновскому полю тяготения.

### Литература

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики в 5-ти т. Т. 1. Механика / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2005. – 560 с.
2. Матвеев, А.Н. Механика и теория относительности. / А.Н. Матвеев. – М.: ОНИКС 21 век, 2003. – 432 с.
3. Бриллюэн, Л. Новый взгляд на теорию относительности / Л. Бриллюэн. – М.: Мир, 1972. – 143 с.
4. Сердюков, А.Н. Калибровочная теория скалярного гравитационного поля. / А.Н. Сердюков. – Гомель, изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.
5. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. Наука, 1988. – 512 с.

А.В. Бужан, Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай  
УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО АНГАРМОНИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

### Введение

Рассмотрим решение трёхмерного уравнения Шрёдингера в сферически-симметричном случае с потенциалом следующего вида:

$$V(r) = g^2 [\operatorname{ch}(\alpha r) - 1], \quad r \geq 0, \quad (1)$$

где  $g, \alpha$  – постоянные величины. Данное выражение можно рассматривать как один из вариантов обобщения потенциала ангармонического осциллятора [1]. Так как при разложении функции (1) в ряд Маклорена по степеням  $r$  получается формула, содержащая как слагаемое с  $r^2$ , так и слагаемые с более высокими степенями аргумента:

$$V(r) = \frac{g^2 \alpha^2}{2!} r^2 + \frac{g^2 \alpha^4}{4!} r^4 + \frac{g^2 \alpha^6}{6!} r^6 + \frac{g^2 \alpha^8}{8!} r^8 + \dots \quad (2)$$

Если в формуле (2) отбросить слагаемые, содержащие  $r$  в степени больше, чем 4, то мы получим хорошо известный в квантовой механике потенциал [1].

### 1. Решение уравнения Шрёдингера

Уравнение Шрёдингера с потенциалом (1) представим в форме

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + q^2 \right) \Psi(r) = g^2 [\operatorname{ch}(\alpha r) - 1] \Psi(r), \quad (3)$$

где параметр  $q$  связан с энергией  $E$  частицы массы  $m$  как  $q^2 = 2mE/\hbar^2$ ,  $\Psi(r)$  – волновая функция. Дополнив уравнение (3) граничными условиями, налагаемыми на волновую функцию

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi(\infty) \cong 0, \quad (4)$$

получим задачу Штурма-Лиувилля.

Воспользуемся экспоненциальным представлением гиперболического косинуса в уравнении (3) и выполним следующую замену переменной:

$$z = g/\alpha \sqrt{2} e^{\frac{\alpha r}{2}}. \quad (5)$$

После указанной замены уравнение (3) представим в следующей форме:

$$\left[ \left( z \frac{d}{dz} \right)^2 + \frac{4}{\alpha^2} (q^2 + g^2) - z^2 \right] \Psi(z) = \frac{4g^4}{\alpha^4} \frac{1}{z^2} \Psi(z). \quad (6)$$

Граничные условия (4) для волновой функции, зависящей теперь от переменной  $z$ , примут вид

$$\Psi(g/\alpha\sqrt{2}) = 0, \quad \Psi(\infty) \cong 0. \quad (7)$$

Уравнение (3) (так же, как и уравнение (6)) является модифицированным уравнением Матье [2]. Точное решение задачи Штурма-Лиувилля для этого уравнения – громоздкая задача. Поэтому, найдём приближенное аналитическое решение уравнения (6).

При малых значениях величины  $4g^4/\alpha^4$ , слагаемым в правой части уравнения (6) можно пренебречь. Полученное таким образом уравнение является модифицированным уравнением Бесселя [3, 4], общее решение которого может быть представлено в виде суперпозиции модифицированной функции Бесселя и функции Макдональда:

$$\Psi(z) = A_\nu I_{i\nu}(z) + C_\nu K_{i\nu}(z), \quad \nu = 2/\alpha \sqrt{q^2 + g^2}. \quad (8)$$

Второму из граничных условий (7), удовлетворяет функция Макдональда [3, 4]. Поэтому, упростим выражение (8) до вида

$$\Psi(z) = C_\nu K_{i\nu}(z). \quad (9)$$

Учёт первого из граничных условий (7) приводит к следующему трансцендентному уравнению для величины  $\nu$ :

$$K_{i\nu}(g/\alpha\sqrt{2}) = 0, \quad (10)$$

которое фактически является условием квантования энергии. Таким образом, энергия частицы, в случае потенциала (1) будет определяться по формуле

$$E_{(n)} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\alpha^2}{4} \nu^2 - g^2 \right). \quad (11)$$

где  $n$  – номер состояния частицы. Множитель  $C_\nu$  в выражении (9) может быть определён исходя из условия нормировки волновой функции:

$$\int_0^\infty |\Psi(r)|^2 dr = 1. \quad (12)$$

Уравнение (10) имеет бесконечно большое количество корней. При этом спектр возможных значений энергии частицы дискретен. На

рисунке 1 приведена диаграмма распределения первых десяти энергетических уровней, которые может занимать частица в поле с потенциалом (1), при значениях параметров  $g=1$  и  $\alpha=10$ .

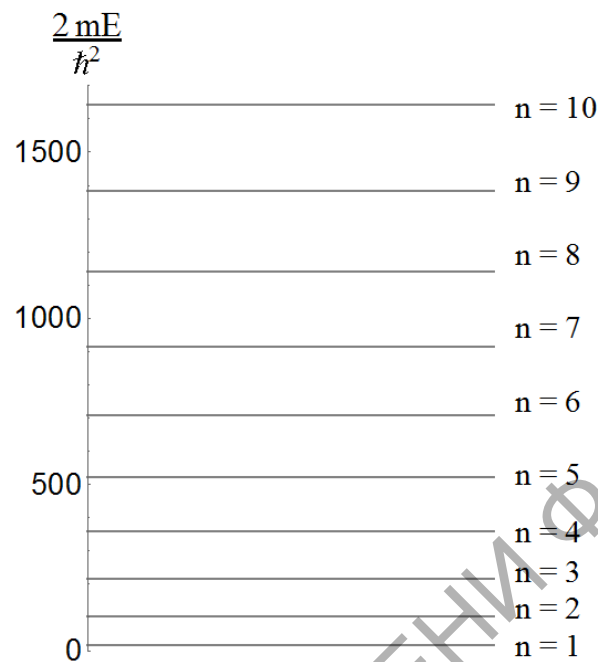


Рисунок 1 – Спектр энергетических состояний частицы

На рисунке 2 приведены графики волновых функций  $\Psi(r)$  первых четырёх состояний при тех же значениях параметров  $g$  и  $\alpha$ .

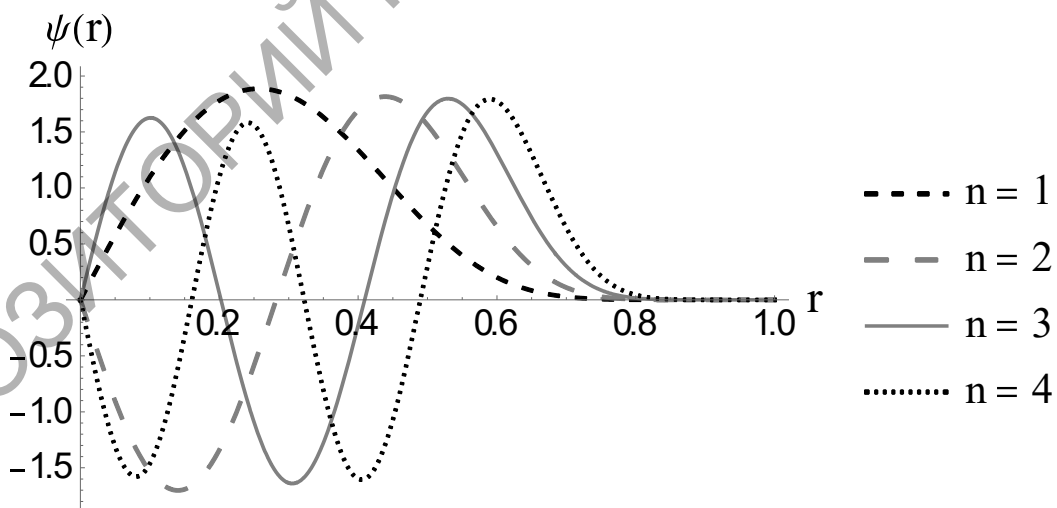


Рисунок 2 – Графики волновых функций для первых четырёх состояний

Как видно на рисунке 1, расстояние между соседними энергетическими уровнями увеличивается с ростом номера состояния, то есть



спектр энергетических уровней частицы в случае обобщенного ангармонического потенциала (1) не обладает свойством эквидистантности, в отличие от случая потенциала гармонического осциллятора [1]. На рисунке 2 видно, что число нулей функции  $\Psi(r)$  равно номеру состояния, что оказывается в согласии с теоремой об узлах волновых функций связанных состояний [5].

### **Заключение**

В данной работе получено приближенное аналитическое решение уравнения Шрёдингера для одного из вариантов обобщения ангармонического потенциала. Найденные волновые функции выражены через функцию Макдональда. Собственные значения энергии являются корнями трансцендентного уравнения. Частица в таком потенциале может иметь дискретный спектр, состоящий из бесконечного числа энергетических уровней, не обладающих свойством эквидистантности. В дальнейшем мы планируем провести исследование границ применимости рассмотренного приближённого метода, а также получить решения уравнения Шрёдингера и релятивистских уравнений квантовой теории с другими вариантами потенциалов, содержащих гиперболические функции.

### **Литература**

1. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 5-е изд. – Москва: Физматлит, 2002. – Т. 3: Квантовая механика: нерелятивистская теория. – 808 с.
2. Мак-Лахлан, Н.В. Теория и приложения функций Матье / Н.В. Мак-Лахлан. – М.: издательство иностранной литературы, 1953. – 475 с.
3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – 2-е изд. – М.: Наука, гл. ред. физ-мат. лит., 1974. – Т 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами; под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука. – 1979. – 830 с.
5. Мессиа, А. Квантовая механика: в 2 т. / А. Мессиа. – М.: Наука. – 1978. – Т 2. – 480 с.

**Е.В. Вакулина<sup>1</sup>, Н.В. Максименко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Брянский государственный университета им. академика  
И.Г. Петровского, Новозыбков, Россия

<sup>2</sup>УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»,  
Гомель, Беларусь

## **ЧАСТИЦА С ПОЛЯРИЗУЕМОСТЯМИ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ**

### **Введение**

Свойства элементарных частиц проявляются в их взаимодействиях. Так у адронов при взаимодействии с электромагнитным полем проявляются дипольные магнитные и квадрупольные моменты. В процессах рассеяния фотонов важную роль играют такие структурные константы, как поляризуемости адронов, интерпретация которых была получена на основе общих принципов релятивистской квантовой теории поля [1-3].

В работах [4-6] в рамках релятивистской квантовой теории поля построены эффективные лагранжианы двухфотонного взаимодействия с адронами с учетом поляризуемостей, которые согласуются с амплитудами в низкоэнергетическом представлении [1-3].

На основе этих лагранжианов получены релятивистские квантово-полевые уравнения движения частиц с поляризуемостями в электромагнитном поле [7, 8].

В процессах взаимодействия адронов с электромагнитным полем проявляются свойства как самих адронов, так и свойства электромагнитного поля. Использование эффективных лагранжианов представляет непосредственный интерес, поскольку с их помощью можно реализовать изучение различных процессов адронной электродинамики. Особый интерес вызывают исследования влияния интенсивного электромагнитного поля на проявления важных квантовых и релятивистских процессов взаимодействия элементарных частиц [9].

Нахождение точных решений релятивистских волновых уравнений для адронов в электромагнитном поле является основой в выполнении исследований процессов взаимодействия адронов во внешних электромагнитных полях. Настоящая работа посвящена точному решению релятивистских волновых уравнений для адронов со спинами ноль и половина с учетом их дипольных поляризуемостей во внешнем электромагнитном поле.

Точные решения уравнений взаимодействия адронов спина ноль и половина с учетом дипольных поляризуемостей с линейно поляризованным электромагнитным полем выполнены на основе релятивистских волновых уравнений первого порядка и представлены в работах [10-12].

### 1. Частица спина $1/2$ в поле плоской электромагнитной волны с учетом поляризуемостей

Обычно решение уравнения движения частицы спина  $1/2$  в поле плоской электромагнитной волны получают приведением дифференциального уравнения первого порядка к дифференциальному уравнению второго порядка [13].

Метод решения уравнения движения частицы в плоской электромагнитной волне, предложенный в работе [10], позволяет решать дифференциальные уравнения первого порядка в ковариантной форме.

Следуя работам [10, 11] получим решение дифференциального уравнения первого порядка движения частицы спина  $1/2$  в поле плоской электромагнитной волны в ковариантной форме с учетом поляризуемостей.

В работе [7] получен эффективный лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицей спина  $1/2$  с учетом дипольных поляризуемостей:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\vec{\partial}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + K_{\sigma\nu}\theta_{\sigma\nu}, \quad (1)$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $\psi$  – биспиноры,  $\vec{\partial}_\mu = \vec{\partial}_\mu - \vec{\delta}_\mu$ , четырехмерный вектор определяется компонентами  $a_\mu\{\vec{a}, ia_0\}$ .

Тензоры в последнем слагаемом имеют вид:

$$K_{\sigma\nu} = \frac{\pi}{2m} [\alpha_E F_{\sigma\mu} F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}_{\sigma\mu} \tilde{F}_{\mu\nu}],$$

$$\theta_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\sigma \vec{\delta}_\nu \psi,$$

где  $\alpha_E$  и  $\beta_M$  – электрическая и магнитная дипольная поляризуемости частицы спина  $1/2$ ,  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ .

Из лагранжиана (1) следует ковариантное уравнение движения частицы спина  $1/2$  в электромагнитном поле [7]

$$\left[ \hat{D} + m + \frac{1}{2} D_\mu (K_{\sigma\mu} \gamma_\sigma) + K_{\sigma\mu} \gamma_\sigma D_\mu \right] \psi = 0, \quad (2)$$

где  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ ,  $\widehat{D} = D_\mu \gamma_\mu$  матрицы  $\gamma_\mu$  удовлетворяют перестановочным соотношениям  $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$ .

На основании лагранжиана (1) и уравнения (2) в работе [7] показано согласование с низкоэнергетическим представлением амплитуды комптоновского рассеяния на нуклоне [1, 2]. Для решения уравнения (2), когда частица взаимодействует с полем плоской электромагнитной волны, будем использовать подход работы [12].

В случае плосковолнового поля вектор-потенциал зависит от  $\varphi = kx = k_\mu x_\mu$

$$A_\mu = A_\mu(\varphi). \quad (3)$$

При нахождении решения уравнения (2) будем считать, что

$$k^2 = k_\mu^2 = 0$$

и потенциал  $A_\mu$  удовлетворяет условию Лоренца:

$$\partial_\mu A_\mu = A'_\mu k_\mu = 0,$$

где  $A'_\mu = \frac{\partial A_\mu(\varphi)}{\partial \varphi}$ . В этом случае тензор электромагнитного поля выражается используя  $A'_\mu$  в следующем виде:

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu.$$

Если воспользоваться соотношением

$$\tilde{F}_{\sigma\nu} \tilde{F}_{\nu\mu} = F_{\sigma\nu} F_{\nu\mu} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\sigma} F_{\nu\rho} F_{\nu\rho},$$

то тензор  $K_{\sigma\mu}$  можно представить в виде:

$$K_{\sigma\mu} = \frac{2\pi}{m} \left[ (\alpha_E + \beta_M) F_{\sigma\nu} F_{\nu\mu} + \frac{\beta_M}{2} \delta_{\mu\sigma} F_{\nu\rho} F_{\nu\rho} \right]. \quad (4)$$

Поскольку потенциалы  $A'_\mu(\varphi)$  удовлетворяют условию Лоренца, то из (4) следует:

$$K_{\sigma\mu} = \frac{2\pi}{m} (\alpha_E + \beta_M) k_\sigma k_\mu (A')^2. \quad (5)$$

Удлиненная производная  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  от этого тензора равна нулю:

$$D_\mu K_{\sigma\mu} = \frac{2\pi}{m} (\alpha_E + \beta_M) \hat{k}_\sigma k^2 [(A')^2]' = 0$$

Таким образом, уравнение (2) можно записать в следующем виде:

$$[\widehat{D} + m + K_{\sigma\mu} \gamma_\sigma D_\mu] \psi = 0. \quad (6)$$

Следуя работам [10-12] решение уравнения (6) представим в виде:

$$\psi = \chi(\varphi) e^{i(px - \varepsilon(\varphi))}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{b^2 + m^2}{2kp} d\varphi'$ ,  $b_\mu = p_\mu - eA_\mu$ .

В этом случае  $\chi(\varphi)$  функция удовлетворяет уравнению:

$$\hat{k}\chi' + [(m + i\hat{c}) + i\Omega\hat{k}]\chi = 0. \quad (8)$$

В этом уравнении введены обозначения:

$$c_\mu = b_\mu - k_\mu \frac{b^2 + m^2}{2kp}, \quad c^2 = -m^2, \quad \Omega = \frac{2\pi}{m} (\alpha_E + \beta_M)(pk)(A')^2.$$

Умножим уравнение (8) на матрицу  $\hat{k}$ . В результате получим:

$$\hat{k}(m + i\hat{c})\chi = 0.$$

В таком случае, согласно [10], функцию  $\chi$  можно представить в виде

$$\chi(\varphi) = (m - i\hat{c})\hat{k}\chi_1(\varphi). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получим

$$\hat{k}\chi_1' + i\Omega\hat{k}\chi_1 = 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) представляется следующим образом:

$$\hat{k}\chi_1(\varphi) = e^{-i\int_0^\varphi \Omega(\varphi')d\varphi'} \hat{k}\chi_0, \quad (11)$$

где  $\chi_0$  – биспинор, независящий от  $\varphi$ , и удовлетворяет уравнению Дирака для свободно движущейся частицы.

Учитывая соотношения (9), (11) в определении функции (7), получим выражение общего решения уравнения (2) взаимодействия частицы с поляризуемостями с полем плоской электромагнитной волны:

$$\psi(x) = (m - i\hat{c})\hat{k}\chi_0 e^{i(px - \varepsilon(\varphi) - \int_0^\varphi \Omega(\varphi')d\varphi')}. \quad (12)$$

Если у частицы поляризуемости отсутствуют, то есть  $\alpha_E + \beta_M = 0$ , то волновая функция переходит в известное решение Волкова [14].

## 2. Мезон спина ноль в поле плоской электромагнитной волны

Для получения точного решения ковариантного дифференциального уравнения первого порядка взаимодействия с учетом поляризуемостей теоретическим методом работ [10] воспользуемся формализмом ДКП. В этом формализме лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с мезоном спина ноль имеет вид [8]:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\vec{\partial}_\mu\beta_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + ie\bar{\psi}\hat{A}\psi + K_{\sigma\nu}\theta_{\sigma\nu}. \quad (13)$$

В уравнении (13)  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  – пятимерные волновые функции скалярных частиц, а четырёхмерный импульс определяется компонентами  $a_\mu\{\vec{a}, a_4 = ia_0\}$ . Пятимерные матрицы  $\beta_\mu = \beta_\mu^{(5)}$  являются матрицами Даффина–Кеммера и удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho + \beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\rho + \delta_{\rho\nu}\beta_\mu$$

Тензоры в (13) определены следующим образом:

$$K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m} [\alpha_E F_{\sigma\mu} F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}_{\sigma\mu} \tilde{F}_{\mu\nu}],$$

$$\theta_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta_\sigma \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi,$$

где стрелки над производными указывают их действие на волновые функции частицы в пятимерном пространстве, а  $\alpha_E$  и  $\beta_M$  – электрическая и магнитная поляризуемости пиона.

Уравнение взаимодействия пиона с электромагнитным полем с учетом заряда и поляризуемостей, как следует из (13), можно представить следующим образом:

$$[\widehat{D} + m + \frac{1}{2} D_\mu K_{\sigma\mu} \beta_\sigma + K_{\sigma\mu} \beta_\sigma D_\mu] \psi = 0, \quad (14)$$

где  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ ,  $\widehat{D} = D_\mu \beta_\mu$ .

Используя метод функции Грина в работе [8] установлено, что амплитуда комптоновского рассеяния, которая следует из лагранжиана (13) в низкоэнергетическом пределе имеет вид [12]:

$$M = \left( \frac{e^2}{m} + 4\pi\omega^2 \alpha_E \right) (\vec{e}^{(\lambda_2)*} \vec{e}^{(\lambda_1)}) + 4\pi\omega^2 \beta_M [\vec{n}_2 \vec{e}^{(\lambda_2)*}] [\vec{n}_1 \vec{e}^{(\lambda_1)}],$$

где  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  – единичные вектора, направленные по импульсам падающего и рассеянного фотонов  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$ ,  $\vec{e}^{(\lambda_1)}$  и  $\vec{e}^{(\lambda_2)}$  соответственно векторы поляризации,  $\omega$  – энергия фотонов.

Поскольку установлено, что  $\alpha_E$  и  $\beta_M$  являются поляризуемостями комптоновского рассеяния, рассмотрим решение уравнения (14) в случае взаимодействия пиона с полем плоской электромагнитной волны с учетом поляризуемостей.

Потенциал  $A_\mu$  поля плоской электромагнитной волны зависит от координат через инвариантную фазу  $\varphi = kx$

$$A_\mu = A_\mu(\varphi) \quad (15)$$

и удовлетворяет условию Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad (16)$$

Согласно (15) условие (16) принимает вид:

$$\partial_\mu A_\mu = k_\mu A'_\mu = 0,$$

где  $k \{ \vec{k}, k_4 = i\omega \}$ ,  $k^2 = 0$ ,  $A'_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial \varphi}$ .

В случае, когда внешнее поле является плоской электромагнитной волной, решение уравнения (14) определим следуя работе [10]

$$\psi(x) = f(\varphi) e^{i(px)}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (14) и учитывая, что

$$k_{\sigma\mu} = \left(\frac{2\pi}{m}\right) (\alpha_E + \beta_M) k_\sigma k_\mu (A')^2,$$

а производная от тензора  $k_{\sigma\mu}$  равна нулю, приходим к выводу, что:

$$D_\mu k_{\sigma\mu} \beta_\sigma = 0,$$

и тогда получим уравнение

$$\hat{k}f' + \{i\hat{b} + m + \Omega\hat{k}\}f = 0, \quad (18)$$

где  $b_\mu = p_\mu - qA_\mu$ ,  $\Omega = \left(\frac{2\pi}{m}\right) (\alpha_E + \beta_M)(px)(A')^2$ .

Согласно работе [10] решение уравнения (18) можно представить в виде:

$$f(\varphi) = \chi(\varphi)e^{-i\varepsilon(\varphi)},$$

где  $\varepsilon(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{b^2 + m^2}{2kp} d\varphi'$ .

В результате из (18) получаем

$$\hat{k}\chi' + [(m + i\hat{c}) + i\Omega\hat{k}]\chi = 0. \quad (19)$$

В уравнении (19)

$$c_\mu = b_\mu - k_\mu \frac{b^2 + m^2}{2kp}, \quad c^2 = -m^2.$$

Следуя работе [10] представим  $\chi$  в виде пятимерного столбца

$$\chi = \begin{pmatrix} tu_0 \\ u_\mu \end{pmatrix},$$

где  $\mu = 1, 2, 3, 4$ .

Поскольку  $\hat{k} = k_\mu \beta_\mu$ , то, используя явный вид пятимерных матриц, можно показать, что

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таком случае свертки  $\hat{k}\chi$  и  $\hat{c}\chi$  имеют вид

$$\hat{k}\chi = \begin{pmatrix} k_\mu u_\mu \\ tu_0 k_\mu \end{pmatrix}, \quad \hat{c}\chi = \begin{pmatrix} c_\mu u_\mu \\ tu_0 c_\mu \end{pmatrix}.$$

В результате уравнение (18) распадается на два уравнения

$$\begin{cases} (ku') + m^2 u_0 + i(cu) + i\Omega(ku) = 0, \\ (k_\mu u'_0) + u_\mu + iu_0 c_\mu + i\Omega u_0 k_\mu = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из второго уравнения системы (20) следует, что

$$u_\mu = -(k_\mu u'_0) - iu_0 c_\mu - i\Omega u_0 k_\mu.$$

Если умножим это уравнение на вектор  $k_\mu$ , то получим

$$(ku) = -iu_0(ck),$$

а производная  $(ku)'$  принимает вид:

$$(ku)' = -i(u_0 c)'k. \quad (21)$$

Подставляя (21) в первое уравнение системы (20), приходим к выводу, что

$$(u'_0 + i\Omega u_0)ck = 0. \quad (22)$$

Решением уравнения (22) является:

$$u_0(\varphi) = \exp\left[-i \int \Omega d\varphi\right].$$

Из второго уравнения системы (20) получим:

$$u_\mu = -iu_0 c_\mu.$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$\psi(x) = e^{ipx} \begin{pmatrix} m \\ -ic_\mu \end{pmatrix} e^{-i \int \Omega d\varphi} = \begin{pmatrix} m \\ -i(b_\mu - k_\mu \frac{b^2 + m^2}{2kp}) \end{pmatrix} e^{i(px - \int \Omega d\varphi)},$$

$$\psi(x) = N \begin{pmatrix} im \\ c_\mu \end{pmatrix} e^{i(px - \varepsilon(\varphi) - \int_0^\varphi \Omega d\varphi')},$$

где  $N$  – нормированный множитель.

### Заключение

Таким образом, в данной работе получены решения уравнений для частиц спина 0 и  $1/2$  с учетом поляризуемостей в поле плоской электромагнитной волны.

Решения были получены путем использования матричного метода и формализма ДКП.

### Литература

1. Петрунькин, В.А. Двухфотонные взаимодействия элементарных частиц при малых энергиях / В.А. Петрунькин // Труды ФИАН. – 1968. – Т. 41. – С. 165–223.
2. Максименко, Н.В. Низкоэнергетическое разложение амплитуды комптоновского рассеяния на адроне и одновременные коммутаторы токов / Н.В. Максименко, С.Г. Шульга // Ядерная физика. – 1990. – Т. 52. – Вып. 2 (8). – С. 524–534.
3. Ragusa, S. Third-order spin polarizabilities of the nucleon: I / S. Ragusa // Phys. Rev. D. – 1993. – Vol. 47, № 9. – P. 375–3767.



4. Максименко, Н.В. Феноменологическое описание поляризуемостей элементарных частиц в полевой теории / Н.В. Максименко, Л.Г. Мороз // Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике / ОИЯИ. – Дубна, 1979. – С. 53–543.

5. Андреев, В. В. Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полевом подходе / В.В. Андреев, Н.В. Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4(9). – С. 7–11.

6. Vakulina, E.V. Spin Polarizabilities and Characteristics of Spin-1 Hadrons Related to Parity Nonconservation in the Duffin-Kemmer-Petiau Formalism / E.V. Vakulina, N.V. Maksimenko // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2017. – Vol. 14, № 5. – P. 713–718.

7. Andreev, V.V. Covariant equations of motion of a spin  $1/2$  particle in an electromagnetic field with allowance for polarizabilities / V.V. Andreev, O.M. Deryuzhkova, N.V. Maksimenko // Russ. Phys. Journ. – 2014. – Vol. 56, № 9. – P. 1069–1075.

8. Вакулина, Е. В. Поляризуемость пиона в формализме Даффина–Кеммера / Е.В. Вакулина, Н.В. Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3. – С. 16–18.

9. Ritus, V.I. The quantum effects of the interaction of elementary particles with the intense electromagnetic field / V.I. Ritus // Trudy FIAN. – 1979. – № 5. – P. 111.

10. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – Минск: Наука и техника, 1979. – 384 с.

11. Радюк, А.Ф. Поляризуемая частица со спином  $1/2$  в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном магнитном поле / А.Ф. Радюк // Сборник научных трудов «Ковариантные методы в теоретической физике» / Минск, 1986. – С. 93–101.

12. Крылов, В.Б. Спиновые частицы в поле плоской электромагнитной волны / В.Б. Крылов, А.Ф. Радюк, Ф.И. Федоров // Препринт №113 / Минск, 1976. – 59 с.

13. Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М. Наука, 1980. – 704 с.

14. Волков, Д.М. Электрон в поле плоских неполяризованных электромагнитных волн с точки зрения уравнения Дирака / Д.М. Волков // ЖЭТФ. – 1937. – Т. 7. – С. 1286–1289.

Л.С. Гайда, А.Ч. Свистун, Е.В. Матук  
УО «Гродненский государственный университет  
имени Янки Купалы», Гродно, Беларусь

## СФЕРОИДАЛЬНАЯ ЧАСТИЦА В ПОЛЕ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ ГАУССОВОГО ПУЧКА

### Введение

Управление локализацией наночастиц с помощью лазерного излучения широко используется при исследовании вирусов и бактерий, молекул ДНК, процессов, происходящих внутри живой клетки, и др. [1]. На сегодняшний день существует множество работ, посвященных перемещению наночастиц сферической формы под действием сил светового давления лазерным излучением (назовем лишь некоторые из них [1-4]). В этих же работах можно найти ссылки и на результаты исследований других авторов по данной тематике.

Одним из примеров светового давления на наночастицы в жидкости является случай несферических наночастиц (сфероидов). Для сфероидов значение компонент силы светового давления значительно отличается от тех же компонент, действующих на сферические наночастицы, что связано с ориентацией частиц в электромагнитном поле падающей волны. Сфероиды являются более адекватными, чем сферы, моделями для многих биологических частиц, в частности, эритроцитов и их линейных агрегатов [5, 6]. Правильный выбор фазовой функции рассеяния света, как отдельным эритроцитом, так и эритроцитарными агрегатами и другими сфероидальными частицами важен при моделировании распространения света в крови и в содержащих кровь тканях [6].

### 1. Основные соотношения

При рассмотрении сил светового давления, действующих на наночастицу, условно выделяют две составляющие: компоненту силы, действующую вдоль градиента интенсивности поля и отличную от нуля только в неоднородном электрическом поле, т.е. градиентную силу  $F^{grad}$  ( $F^{grad,x}$  и  $F^{grad,y}$  – компоненты силы, действующие поперек лазерного луча, и  $F^{grad,z}$  – компонента, действующая вдоль лазерного луча), и силу, действующую вдоль направления распространения излучения, являющуюся суммой сил поглощения  $F^{abs}$  и рассеяния

$F^{scat}$ . Таким образом, полную силу светового давления можно представить в виде [2, 4]:

$$\vec{F}^{light} = \vec{F}^{grad} + \vec{F}^{abs} + \vec{F}^{scat} \quad (1)$$

Для сферических наночастиц общий вид для всех компонент силы светового давления можно найти в работах [2, 4], для частиц произвольной формы и объема задача вычисления силы светового давления является весьма сложной. Поэтому в настоящей работе мы будем рассматривать частицу в форме сфероида.

Для получения явного вида выражений для компонент силы светового давления рассмотрим сфокусированный тонкой линзой пучок гауссовой формы распространяющийся вдоль оси  $z$  в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ . В случае поглощающей наночастицы в приближении Рэлея, когда размеры наночастицы малы по сравнению с длиной волны излучения, компоненты силы светового давления имеют вид [7, 8]:

$$F^{grad} = \frac{2\pi n_m |\alpha(x, y, z)|}{c} \nabla I(x, y, z), \quad F^{abs} = \frac{n_m I(x, y, z) \sigma_{abs}(z)}{c}$$

$$F^{scat} = \frac{n_m I(x, y, z) \sigma_{scat}(z)}{c}, \quad (2)$$

где  $\alpha(x, y, z) = \alpha'(x, y, z) + i\alpha''(x, y, z)$  – поляризуемость металлической наночастицы,  $I(x, y, z)$  – интенсивность излучения действующего на наночастицу,  $\nabla$  – оператор градиента,  $\sigma_{abs}(z)$  и  $\sigma_{scat}(z)$  – сечение поглощения и рассеяния,  $c$  – скорость света в вакууме,  $n_m$  – показатель преломления жидкости.

Выражение для интенсивности падающего электромагнитного поля имеет вид [9–11]:

$$I(x, y, z) = \frac{I_0}{(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{\rho_0 [(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2]}\right\}, \quad (3)$$

где  $f$  – фокусное расстояние линзы,  $I_0$  – входная интенсивность излучения в центре пучка,  $z_d = k_m \rho_0^2$  – дифракционная длина пучка,  $\rho_0$  – радиус пучка,  $k_m$  – волновое число.

## 2. Зависимость сечения поглощения и рассеяния от формы сфероида

С точки зрения практического применения больший интерес имеют наночастицы в форме сплюснутых или вытянутых сфероидов, которые получаются вращением эллипса вокруг короткой или длинной осей соответственно (рисунок 1). В случае вытянутого сфероида две

его малые полуоси равны друг другу, тогда как в случае сплющенного сфероида две его большие полуоси равны друг другу. На рисунке 1 а изображен вытянутый сфероид  $R_{\perp} < R_{\parallel}$ , где  $R_{\perp}$  – малая полуось сфероида,  $R_{\parallel}$  – большая полуось. В случае сплюснутого сфероида (рисунок 1 б),  $R_{\parallel} < R_{\perp}$ , где  $R_{\perp}$  – большая полуось сфероида,  $R_{\parallel}$  – малая полуось [12].

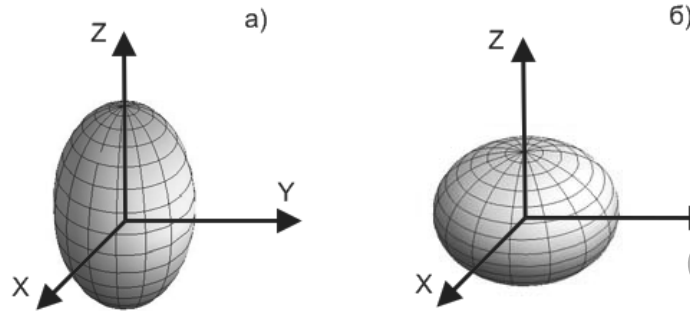


Рисунок 1 – Геометрия вытянутых сфероидальной наночастицы (а) и сплюснутой сфероидальной наночастицы (б)

Значение поляризуемости для сфероида изменяет свое значение в зависимости от положения частицы. Выражения для поляризуемости вдоль оси  $x = y$  и  $z$  имеют вид [12]:

$$\alpha(x) = \alpha(y) = \frac{R_{\parallel} R_{\perp}^2}{3} \frac{\varepsilon_p(\omega) - \varepsilon_m}{\varepsilon_m + L_{\perp}(\varepsilon_p(\omega) - \varepsilon_m)},$$

$$\alpha(z) = \frac{R_{\parallel} R_{\perp}^2}{3} \frac{\varepsilon_p(\omega) - \varepsilon_m}{\varepsilon_m + L_{\parallel}(\varepsilon_p(\omega) - \varepsilon_m)},$$
(4)

где  $L_{\parallel}$  и  $L_{\perp}$  – геометрические факторы деполаризации [13] удовлетворяют соотношению  $L_{\parallel} + 2L_{\perp} = 1$  и для сфер  $L = 1/3$ ,  $\varepsilon_m$  – диэлектрическая проницаемость среды в которой расположен сфероид,  $\varepsilon_p(\omega)$  – диэлектрическая проницаемость металлической наночастицы, зависящая от частоты падающего излучения  $\omega$ .

Геометрический фактор деполаризации сфероида  $L_{\parallel}$ , в случае  $R_{\perp} < R_{\parallel}$ , имеет вид [14]:

$$L_{\parallel} = (e_s^2 - 1) \left( \frac{e_s}{2} \ln \frac{1 + e_s}{e_s - 1} - 1 \right),$$
(5)

где  $e_s = \sqrt{1 - R_{\perp}/R_{\parallel}}$  – эксцентриситет сфероида.

В случае  $R_{\parallel} < R_{\perp}$  геометрический фактор деполаризации  $L_{\parallel}$  имеет вид

$$L_{\parallel} = (1 + e_s^2)(1 - e_s \operatorname{arctg} e_s).$$
(6)

Выражения для сечения поглощения и рассеяния имеют вид [12]:

$$\sigma_{abs} = \frac{4\pi}{3} k_m \text{Im}(\alpha(x, y, z))$$

$$\sigma_{scat} = \frac{8\pi}{9} k_m^4 \alpha^2(x, y, z)$$
(7)

### Заключение

Показано, что силы светового давления существенно зависят от формы частицы, а также от ее ориентации по отношению к направлению падающего излучения. Получены численные значения для трех компонент силы светового давления, действующих на серебряную сфероидальную наночастицу, находящуюся на оси лазерного пучка.

Результаты работы могут стать основой для дальнейших теоретических и экспериментальных исследований по влиянию сил светового давления лазерного излучения гауссовой формы на металлические сфероидальные наночастицы в жидкостях.

### Литература

1. Гайда, Л.С. Сила светового давления, действующая на металлическую сферическую наночастицу в интерференционном поле двух плоских монохроматических электромагнитных волн / Л.С. Гайда, Д.В. Гузатов, А.А. Афанасьев // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. Сер. 2. – 2008. – № 3 (73). – С. 84–89.

2. Кац, А.В. Радиационная сила, действующая на частицу в электромагнитном поле при произвольном соотношении между размером частицы и длиной волны / А.В. Кац // Изв. высш. уч. зав. Радиофиз. – 1975. – Т. XVIII, № 4. – С. 566–575.

3. Эшкин, А. Давление лазерного излучения / А. Эшкин // УФН. – 1973. – Т. 110, № 1. – С. 101–116.

4. Гузатов, Д.В. Теоретическое исследование силы светового давления, действующей на сферические наночастицы в поле лазерного излучения / Д.В. Гузатов, Л.С. Гайда // Вестник БГУ: Серия 1. – 2010. – № 3. – С. 29–33.

5. Ярославская, А.Н. Оптическая биомедицинская диагностика / А.Н. Ярославская и др. // М: Физматлит. – 2007. – Гл.2. – С.157–196.

6. Луговцов, А.Е. Лучеволновое приближение для расчета рассеяния лазерного излучения прозрачной диэлектрической сфероидальной частицей / А.Е. Луговцов, С. Ю.Никитин, А. В. Приезжев // Квантовая электроника. – 2008. – Т.38. – № 6. – С.606–611.

7. Bosanac, L. Efficient Optical Trapping and Visualization of Silver Nanoparticles / Lana Bosanac, Thomas Aabo, Poul M. Bendix, and Lene

V. Oddershede // NANO LETTERS. – 2008. – Vol. 8, No. 5. – P.1486–1491.

8. Матук, Е.В. Движение металлической наночастицы вблизи поверхности пузырька воздуха в жидкости под действием силы светового давления /Е.В. Матук, Л.С. Гайда, Д.В. Гузатов // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3. – С.17–20.

9. Ахманов, С.А. Физическая оптика / С.А. Ахманов, С.Ю. Никитин. – Москва: Наука, 2004. – 654 с.

10. Афанасьев, А.А. О радиационных силах, действующих на прозрачную наночастицу в поле сфокусированного лазерного пучка / А.А. Афанасьев, Л. С. Гайда, Д. В. Гузатов, А. Н. Рубинов, А. Ч. Свистун // Квантовая электроника. – 2015. – Т.45. – № 10. – С.604–607.

11. Афанасьев, А.А. Движение серебряных наночастиц в жидкости с различной вязкостью под действием сил светового давления /А. А. Афанасьев, Л.С. Гайда, Е.В. Матук, А. Ч. Свистун // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4(29). – С.7–12.

12. Климов, В.В. Наноплазмоника / В.В. Климов. – Москва: Физмалит, 2009. – 480 с.

13. Хлебцов, Н.Г. Оптика и биофотоника наночастиц с плазмонным резонансом / Н. Г. Хлебцов // Квантовая электроника. – 2008. – 38(6), – 504 с.

14. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – Москва: Наука, 1982. – 620 с.

**Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай**

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПИРАЮЩИМ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛОМ**

### **Введение**

Рассмотрим решение ковариантных двухчастичных уравнений квазипотенциального типа [1, 2] с одним из вариантов модели линейного запирающего потенциала в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) [3], имеющего форму

$$V(r) = \lambda r, \quad (1)$$

где  $\lambda > 0$  – константа,  $r \geq 0$  – модуль радиус-вектора в РКП. В данной работе найдены численные решения интегральных квазипотенциальных уравнений в РКП. Решение модифицированного уравнения Кадышевского также получено приближённо аналитически.

### 1. Численное решение квазипотенциальных уравнений в РКП

В случае сферически-симметричных волновых функций  $\psi_{(j)}(\chi_q, r)$  системы двух скалярных частиц одинаковой массы  $m$  квазипотенциальные уравнения в РКП имеют вид [4]

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \int_0^{\infty} dr' G_{(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r'), \quad (2)$$

где индекс  $j=1,2,3,4$  соответствует одному из четырёх вариантов уравнений:  $j=1$  ( $j=3$ ) – Логунова-Тавхелидзе (модифицированное),  $j=2$  ( $j=4$ ) – Кадышевского (модифицированное). В уравнениях (2) величина  $\chi_q$  связана с энергией  $2E_q$  системы как  $2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$ ,  $G_{(j)}(\chi_q, r, r')$  – функции Грина, соответствующие рассматриваемым вариантам квазипотенциального подхода и имеющие следующий вид [4]:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'), \quad (3)$$

где

$$G_{(1)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{m \operatorname{sh} 2\chi_q} \frac{\operatorname{sh}(\pi/2 + i\chi_q)mr}{\operatorname{sh}(\pi mr/2)};$$

$$G_{(3)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{2m \operatorname{sh} \chi_q} \frac{\operatorname{ch}(\pi/2 + i\chi_q)mr}{\operatorname{ch}(\pi mr/2)};$$

$$G_{(2)}(\chi_q, r) = \frac{(4m \operatorname{ch} \chi_q)^{-1}}{\operatorname{ch}(\pi mr/2)} - \frac{i}{m \operatorname{sh} 2\chi_q} \frac{\operatorname{sh}(\pi + i\chi_q)mr}{\operatorname{sh} \pi mr};$$

$$G_{(4)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{2m \operatorname{sh} \chi_q} \frac{\operatorname{sh}(\pi + i\chi_q)mr}{\operatorname{sh}(\pi mr)}.$$

Для численного решения интегральных уравнений (2) был использован метод, неоднократно применявшийся для нахождения решений ковариантных двухчастичных уравнений в случае резонансных состояний. Метод состоит в замене интегралов в уравнениях (2) интегральными суммами по одной из квадратурных формул с последующим

сведением полученных таким образом равенств к линейным системам однородных алгебраических уравнений:

$$M\psi = 0; \quad M_{mn} = \delta_{mn} - w_n G_{(j)}(\chi_q, r_m, r_n) V(r_n), \quad (4)$$

где  $M$  – основная матрица системы,  $\psi$  – вектор, составленный из значений волновой функции в узловых точках  $r_n$  квадратурной формулы,  $w_n$  – весовые коэффициенты квадратурной формулы,  $\delta_{mn}$  – элементы единичной матрицы. Условие существования ненулевых решений системы уравнений (4) – равенство нулю детерминанта матрицы  $M$

$$f(\chi_q) = \det M = 0 \quad (5)$$

является трансцендентным уравнением относительно дискретных значений величины  $\chi_q$ . Таким образом, уравнение (5), фактически, является условием квантования энергии. Предварительный поиск корней уравнения (14) целесообразно представить графически на комплексной плоскости величины  $\chi_q$ . На рисунке 1 сплошной линией изображены нули действительной части  $f(\chi_q)$ , штриховой – мнимой части, кружками обведены корни уравнения (5), соответствующего уравнению Логунова-Тавхелидзе.

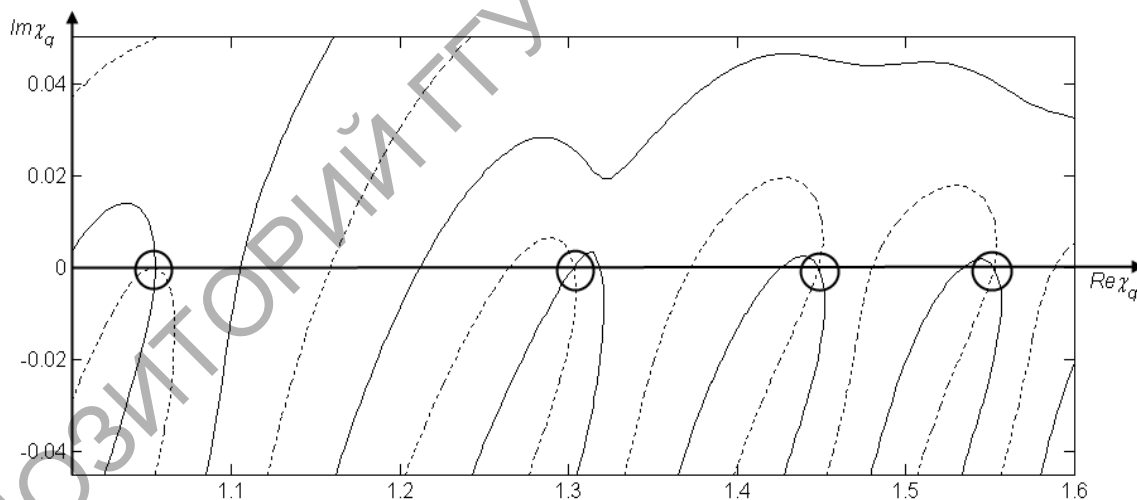


Рисунок 1 – Корни уравнения (14) при  $m = 1$ ,  $\lambda = 0,5$

Как видно на рисунке 1, корни расположены на вещественной оси. Рисунки, выполненные для других вариантов уравнений, имеют аналогичный вид, поэтому мы их здесь не приводим.



## 2. Приближённое решение модифицированного уравнения Кадышевского

Обсудим теперь метод приближённого аналитического решения модифицированного уравнения Кадышевского с потенциалом (1). Выполним над уравнением (2) в случае  $j = 4$  преобразование Лапласа [5]. В результате получим следующее равенство:

$$\varphi(\chi_q, p) = \frac{\lambda}{m^2} g(\chi_q, ip/m) \frac{d}{dp} \varphi(\chi_q, p) + \frac{\lambda}{\text{sh } \chi_q} \sum_{s=0}^{\infty} \left[ \frac{\chi_s^{(1)}}{(m\chi_s^{(1)})^2 + p^2} \times \frac{d}{dp} \varphi(\chi_q, p') \Big|_{p'=-i\chi_s^{(1)}m} - \frac{\chi_s^{(2)}}{(m\chi_s^{(2)})^2 + p^2} \times \frac{d}{dp} \varphi(\chi_q, p') \Big|_{p'=-i\chi_s^{(2)}m} \right], \quad (6)$$

где  $\varphi(\chi_q, p)$  – изображение волновой функции, определяемое по формуле [5]

$$\varphi_{(j)}(\chi_q, p) = \int_0^{\infty} dr \exp(-pr) \psi_{(j)}(\chi_q, r), \quad (7)$$

$p$  – переменная функции-изображения. В выражении (6) мы также использовали обозначение  $g(\chi_q, ip/m) = [2(\cos(p/m) - \text{ch } \chi_q)]^{-1}$ . Величины  $\chi_s^{(1)} = \chi_q + 2i\pi s$ ,  $\chi_s^{(2)} = -\chi_q + 2\pi i + 2\pi is$  – полюса функции  $g(\chi_q, ip/m)$ .

Предположим, что в выражении (6) можно пренебречь суммой. Тогда равенство (6) упрощается до дифференциального уравнения первого порядка, которое мы представим в форме:

$$\frac{d}{dp} \varphi(\chi_q, p) = \frac{m^2}{\lambda} g^{-1}(\chi_q, ip/m) \varphi(\chi_q, p). \quad (8)$$

Решение уравнения (8) и последующая подстановка полученной функции в формулу для обращения [5]

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp \exp(pr) \varphi_{(j)}(\chi_q, p) \quad (9)$$

приводит к следующему интегральному выражению для волновой функции:

$$\psi(\chi_q, r) = C \int_0^{\infty} dt \cos \left[ m \left( r - \frac{2m^2 \text{ch } \chi_q}{\lambda} \right) t + \frac{2m^3}{\lambda} \text{sh } t \right], \quad (10)$$

где  $C$  – неизвестная константа, возникшая при решении уравнения (8). Интеграл в формуле (10) может быть выражен через функцию Макдональда  $K_\nu(z)$  [5] и представлен в виде

$$\psi(\chi_q, r) = C \exp\left[-\pi m/2\left(r - 2m^2 \operatorname{ch} \chi_q/\lambda\right)\right] K_{im(r-2m^2 \operatorname{ch} \chi_q/\lambda)}\left(2m^3/\lambda\right). \quad (11)$$

Из уравнений (2) следует, что волновые функции обращаются в ноль при  $r = 0$ . Взяв формулу (11) в указанной точке и приравняв её к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение относительно величины  $\chi_q$

$$K_{i2m^3 \operatorname{ch} \chi_q/\lambda}\left(2m^3/\lambda\right) = 0, \quad (12)$$

которое, по сути, является условием квантования энергии системы  $2E_q^{(n)} = 2m \operatorname{ch} \chi_q^{(n)}$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, выражения (11), (12) являются приближённым решением модифицированного уравнения Кадышевского. Насколько полученные приближённые решения оказываются близкими к найденным с высокой точностью численным, можно судить по результатам, приведенным в таблице 1.

Таблица 1 – Значения обезразмеренной энергии  $2E_q/m$

	Номер состояния $n$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 1,0$	$\lambda = 2,0$	$\lambda = 8,0$	$\lambda = 16,0$
Приближённое аналитическое решение	1	3,5082	4,4255	5,9251	12,5604	19,6222
	2	4,6767	6,3325	9,0690	21,4114	34,7529
	3	5,6566	7,9468	11,7597	29,1824	48,2163
Численное решение	1	3,5068	4,4209	5,9109	12,4510	19,3476
	2	4,6756	6,3292	9,0598	21,3526	34,6160
	3	5,6557	7,9442	11,7527	29,1412	48,1232

Как видно из таблицы, с ростом величины константы связи  $\lambda$  точность значений энергии, найденных приближённо аналитически снижается.

На рисунке 2 приведены волновые функции, удовлетворяющие модифицированному уравнению Кадышевского, найденные приближённо аналитически и численно для  $m = 1$ ,  $\lambda = 1$ . Как видно на рисунке 2, графики волновых функций, найденных приближённо визуально неотличимы от графиков, построенных на основании численных решений.

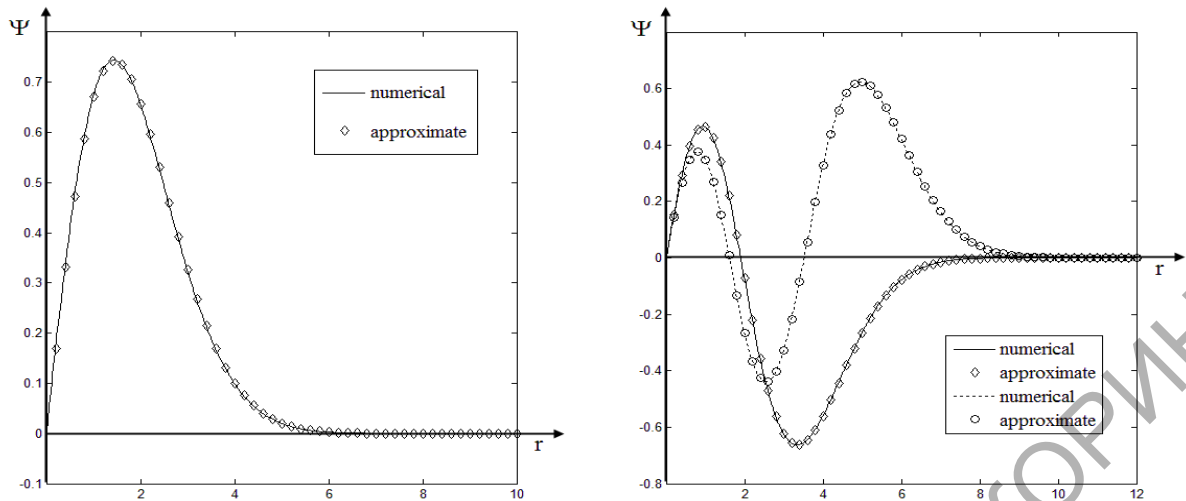


Рисунок 2 – Волновые функции первых трёх состояний

Таким образом, рассмотренный метод позволяет найти решения с хорошей точностью для указанных значений константы связи  $\lambda$ .

### Заключение

В данной работе получены численные решения уравнений квази-потенциального типа с линейным запирающим в релятивистском конфигурационном представлении потенциалом. Решение модифицированного уравнения Кадышевского найдено также приближённо аналитически. При этом полученные волновые функции выражены через функцию Макдональда, а собственные значения энергии являются решениями трансцендентного уравнения.

### Литература

1. Logunov, A.A. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.
2. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, №1. – P. 125–148.
3. Кадышевский, В.Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.
4. Kapshai, V.N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of  $\delta$ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

**Е.А. Дей**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА**

### **Введение**

Проведение исследований в области наноразмерных физических систем связано с изучением и практическим использованием все новых объектов, поведение которых подчиняется законам квантовой механики. Наряду с развитием экспериментальных средств этот процесс требует и совершенствования методов расчета трехмерных квантовых систем на основе численного решения трехмерного уравнения Шредингера.

Для расчета параметров трехмерных квантовых структур в работах [1-3] использовался стандартный метод конечных разностей, обеспечивающий точность на уровне второго порядка по шагу расчетной сетки. В работе [4] предложено обобщение метода Нумерова для трехмерной схемы, что повышает точность результатов до четвертого порядка. В силу того, что уменьшение шага расчетной сетки при решении трехмерных уравнений жестко ограничено техническими возможностями компьютера, повышение точности результатов требует использования высших порядков конечно-разностной аппроксимации частных производных от волновой функции системы.

В работах [5, 6] была исследована вычислительная эффективность метода конечных разностей, основанного на высших порядках аппроксимации вторых производных, при численном решении одномерного и двумерного стационарного уравнения Шредингера. По результатам вычислений отмечена высокая практическая точность такого подхода и удобство его программной реализации.

В данной работе использованы варианты метода конечных разностей с высшими порядками аппроксимации частных производных ( $p=2..10$ ) применительно к задаче численного решения трехмерного

стационарного уравнения Шредингера. Получены расчетные формулы и выполнена их программная реализация в системе Matlab. В качестве тестовой задачи рассмотрен расчет уровней энергии и волновых функций трехмерного гармонического осциллятора. Для каждого порядка аппроксимации вычислены собственные значения энергии, рассчитан практический порядок сходимости численной схемы. Реализовано графическое отображение трехмерной волновой функции построением линий равного уровня в сечениях  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=0$ . Разработанная программа использована далее для численного решения уравнения Шредингера с трехмерным аналогом потенциала Хенона-Хейлеса.

### 1. Конечно-разностная аппроксимация трехмерного уравнения Шредингера

Трехмерное уравнение Шредингера в декартовых координатах имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} \right) + V(x, y, z)\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z). \quad (1)$$

Для запирающих потенциалов численное решение выполняется в ограниченной области изменения аргументов  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ ,  $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ ,  $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$ . По каждой переменной введем равномерную согласованную сетку с шагом  $h$ , так что  $x_i = x_{\min} + i \cdot h$ ,  $y_j = y_{\min} + j \cdot h$ ,  $z_k = z_{\min} + k \cdot h$ . Количество шагов по каждой переменной  $N_x = (x_{\max} - x_{\min})/h$ ,  $N_y = (y_{\max} - y_{\min})/h$ ,  $N_z = (z_{\max} - z_{\min})/h$ . Значения функций в узлах сетки обозначаются стандартным способом  $\psi_{i,j,k} \equiv \psi(x_i, y_j, z_k)$ ,  $V_{i,j,k} \equiv V(x_i, y_j, z_k)$ . По аналогии с [5, 6] используем центральные конечно-разностные аппроксимации порядка  $P$  для вторых частных производных волновой функции

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{x_i, y_j, z_k} &= \frac{1}{h^2} \sum_{s=-p/2}^{p/2} C_s \psi_{i+s, j, k} + O(h^p), & \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{x_i, y_j, z_k} &= \frac{1}{h^2} \sum_{s=-p/2}^{p/2} C_s \psi_{i, j+s, k} + O(h^p), \\ \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right|_{x_i, y_j, z_k} &= \frac{1}{h^2} \sum_{s=-p/2}^{p/2} C_s \psi_{i, j, k+s} + O(h^p). \end{aligned} \quad (2)$$

Значения коэффициентов для соотношений (2) приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Коэффициенты конечно-разностных аппроксимаций вторых производных для четных порядков  $P=2..10$

$P$	$C_0$	$C_{\pm 1}$	$C_{\pm 2}$	$C_{\pm 3}$	$C_{\pm 4}$	$C_{\pm 5}$
2	-2	1				
4	-5/2	4/3	-1/12			
6	-49/18	3/2	-3/20	1/90		
8	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560	
10	-5269/1800	5/3	-5/21	5/126	-5/1008	1/3150

Замена вторых производных в уравнении Шредингера (1) на конечно-разностные выражения (2) приводит к системе линейных однородных уравнений относительно значений волновой функции во внутренних узлах сетки  $i = 1..N_x - 1$ ,  $j = 1..N_y - 1$ ,  $k = 1..N_z - 1$ . В системе единиц  $\hbar = 1$ ,  $m = 1$  уравнения системы имеют вид

$$-\frac{1}{2h^2} \sum_{s=-p/2}^{p/2} C_s \psi_{i+s,j,k} - \frac{1}{2h^2} \sum_{s=-p/2}^{p/2} C_s \psi_{i,j+s,k} - \frac{1}{2h^2} \sum_{s=-p/2}^{p/2} C_s \psi_{i,j,k+s} + V(x_i, y_j, z_k) \psi_{i,j,k} = E \psi_{i,j,k} \quad (3)$$

Для связанных состояний на границе расчетной области и за ее пределами волновая функция при численном расчете считается равной нулю, поэтому значения функции с неположительными номерами узлов и с номерами, превышающими  $N_x, N_y, N_z$ , не дают вклада в уравнения:

$$\psi_{-s,j,k} = \psi_{N_x+s,j,k} = 0, \quad \psi_{i,-s,k} = \psi_{i,N_y+s,k} = 0, \quad \psi_{i,j,-s} = \psi_{i,j,N_z+s} = 0, \quad s = 0..P/2.$$

На основании (3) несложно записать явный вид системы линейных уравнений для любого значения  $P$ .

При  $P=2$  из (3) получаем стандартный вариант системы линейных однородных уравнений метода конечных разностей для трехмерного уравнения Шредингера [1, 2]

$$-\frac{1}{2h^2} (\psi_{i-1,j,k} + \psi_{i+1,j,k} + \psi_{i,j-1,k} + \psi_{i,j+1,k} + \psi_{i,j,k-1} + \psi_{i,j,k+1}) + \left( \frac{3}{h^2} + V_{i,j,k} \right) \psi_{i,j,k} = E \psi_{i,j,k}.$$

При  $P=4$  система уравнений (3) принимает вид

$$\frac{1}{24h^2} (\psi_{i-2,j,k} + \psi_{i+2,j,k} + \psi_{i,j-2,k} + \psi_{i,j+2,k} + \psi_{i,j,k-2} + \psi_{i,j,k+2}) - \frac{2}{3h^2} (\psi_{i-1,j,k} + \psi_{i+1,j,k} + \psi_{i,j-1,k} + \psi_{i,j+1,k} + \psi_{i,j,k-1} + \psi_{i,j,k+1}) + \left( \frac{15}{4h^2} + V_{i,j,k} \right) \psi_{i,j,k} = E \psi_{i,j,k}.$$

## 2. Исследование вычислительных свойств метода конечных разностей при решении трехмерного уравнения Шредингера

В качестве тестовой задачи было рассмотрено уравнение Шредингера с потенциалом трехмерного гармонического осциллятора

$V(x) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$  в области  $-L \leq x \leq L$ ,  $-L \leq y \leq L$ ,  $-L \leq z \leq L$ . Эта задача позволяет протестировать метод для случая гладкого запирающего потенциала и сравнить результаты с точными значениями  $E_n^{точн} = n + 1$ , где  $n = n_x + n_y + n_z$ ,  $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$ . Специфика трехмерной задачи состоит в высокой степени вырождения энергетических уровней [4]. Для уровня  $E_n$  кратность вырождения равна  $(n+1)(n+2)/2$ .

Для численного решения использована сплошная нумерация узловых значений функции  $g = (N_x - 1)(N_y - 1)(k - 1) + (N_x - 1)(j - 1) + i$ , тогда система (3) представляется в матричной форме и образует стандартную матричную задачу на собственные значения относительно энергии трехмерной квантовой системы

$$\sum_{g'=1}^N M_{g,g'} \psi_{g'} = E \psi_g, \quad (4)$$

где  $M$  – матрица коэффициентов.

Расчет матричных соотношений (4) и численное решение задачи на собственные значения реализованы в вычислительной среде Matlab с использованием технологии разреженных матриц. Полученные в ходе решения значения абсолютной погрешности  $|E_i^{числен} - E_i^{точн}|$  первых последовательных  $i=1..50$  вычисленных уровней  $E_i^{числен}$  для значений параметров  $L=4,8$ ;  $h=0,24$  и различных порядков аппроксимации частных производных  $P$  приведены в таблице 2.

Таблица 2 – погрешность вычисленных уровней энергии трехмерного гармонического осциллятора для различных порядков аппроксимации частных производных ( $L=4,8$ ;  $h=0,24$ )

$i$	$n$	$E_n^{точн}$	$P=2$	$P=4$	$P=6$	$P=8$	$P=10$
1	0	1,5	5,41e-03	1,01e-04	3,22e-06	1,42e-07	6,30e-09
5	2	3,5	2,72e-02	9,07e-04	4,48e-05	2,35e-06	1,50e-08
10	2	3,5	1,99e-02	5,07e-04	2,02e-05	1,03e-06	3,66e-07
15	3	4,5	3,44e-02	1,11e-03	5,33e-05	2,79e-06	3,61e-07
20	3	4,5	2,71e-02	7,09e-04	2,87e-05	1,47e-06	6,79e-06
25	4	5,5	5,64e-02	2,36e-03	1,37e-04	3,40e-06	7,38e-07
30	4	5,5	4,90e-02	1,71e-03	8,64e-05	3,24e-06	6,79e-06
35	4	5,5	4,17e-02	1,31e-03	6,18e-05	4,05e-05	6,84e-05
40	5	6,5	8,58e-02	4,48e-03	2,70e-04	5,16e-06	6,79e-06
45	5	6,5	7,10e-02	2,97e-03	1,70e-04	3,85e-06	7,17e-06
50	5	6,5	7,10e-02	2,97e-03	1,70e-04	4,00e-05	6,84e-05

В ходе численного решения потребовалось использование квадратной матрицы размером  $59319 \times 59319$ , содержащей 406107 ненулевых элементов для  $P=2$  и 1701999 ненулевых элементов для  $P=10$ .

По результатам трех последовательных расчетов при значениях шага  $h, 2h, 4h$  был рассчитан практический порядок сходимости численных схем

$$\tilde{P} = \log_2 \left( \frac{E_n^{(4h)} - E_n^{(2h)}}{E_n^{(2h)} - E_n^{(h)}} \right) \quad (5)$$

для различных значений теоретического порядка  $P$ . Значения практического порядка сходимости  $\tilde{P}$  приведены в таблице 3. Результаты показывают, что вычисленный практический порядок сходимости несколько ниже теоретического значения. Снижение практического порядка можно объяснить большим количеством вырожденных уровней, вычисление которых подпрограммами линейной алгебры выполняется с различной точностью.

Таблица 3 – Расчет практического порядка сходимости  $\tilde{P}$  для различных порядков аппроксимации частных производных при  $L=4,8$ ;  $h=0,24$ .

$i$	$n$	$E_n^{точн}$	$P=2$	$P=4$	$P=6$	$P=8$	$P=10$
1	0	1,5	2,141	3,874	5,559	7,163	8,689
5	2	3,5	2,629	4,163	5,908	7,430	8,870
10	2	3,5	2,029	4,164	5,147	6,479	7,638
15	3	4,5	2,517	5,160	5,800	7,316	8,744
20	3	4,5	2,304	2,011	5,119	6,437	7,076
25	4	5,5	2,404	3,001	5,213	6,532	7,803
30	4	5,5	1,652	3,002	4,617	5,516	5,571
35	4	5,5	1,983	4,467	5,110	5,992	5,786
40	5	6,5	2,206	5,049	5,623	7,044	8,372
45	5	6,5	1,857	5,050	4,646	5,760	6,709
50	5	6,5	1,857	2,908	4,646	5,735	6,598

Нетривиальным вопросом является способ графического отображения трехмерной волновой функции. В определенной степени представление о распределении значений функции в пространстве дают двумерные графики линий равных значений, построенные в сечениях  $X=0, Y=0, Z=0$ . На рисунке 1 такие изображения приведены для ненормированной волновой функции основного состояния трехмерного гармонического осциллятора. Вид функции указывает на корректность полученных результатов.



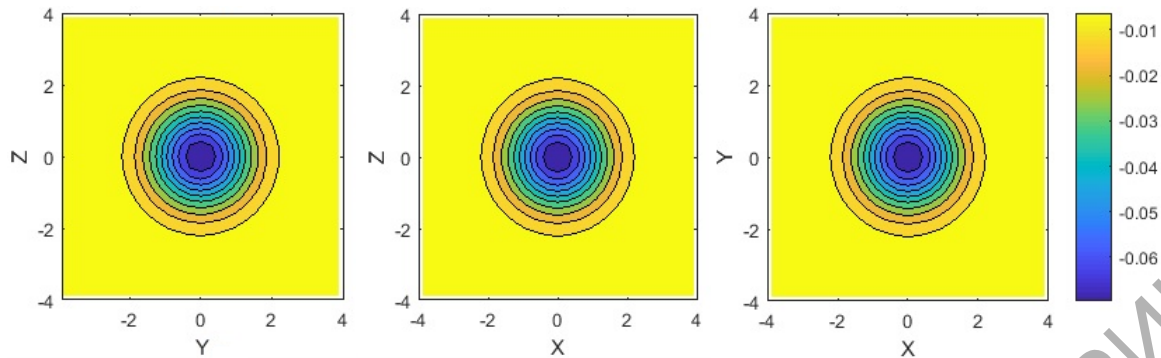


Рисунок 1 – Линии равных значений волновой функции состояния  $n=1$  трехмерного осциллятора в плоскостях  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=0$  соответственно

### 3. Численное решение уравнения Шредингера с трехмерным аналогом потенциала Хенона-Хейлеса

Изложенные расчетные схемы метода конечных разностей были использованы для численного решения трехмерного уравнения Шредингера с потенциалом, являющимся трехмерным обобщением потенциала Хенона-Хейлеса [7]

$$V(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2 - 0,1(xy^2 + 0,1x^3 + yz^2 + 0,1y^3). \quad (8)$$

В таблице 4 приведены значения энергетических уровней в сравнении с результатами работы [7], полученными методом дискретного представления переменных (DVR-method). На рисунке 2 приведены графики ненормированной волновой функции состояния  $i=6$  для случая потенциала (8).

Таблица 4 – вычисленные уровни энергии для трехмерного аналога потенциала Хенона-Хейлеса

$i$	Результаты [7]	МКР, $P=10$ , $L=4,8$ $h=0,24$	$i$	Результаты [7]	МКР, $P=10$ , $L=4,8$ $h=0,24$
1	1,49388975	1,493889752	11	4,36246632	4,362541470
2	2,47041786	2,470418049	12	4,37333156	4,373350879
3	2,47996173	2,479961786	13	4,39593487	4,395949334
4	2,49168459	2,491684617	14	4,41909346	4,419114039
5	3,42714282	3,427147984	15	4,42935670	4,429372997
6	3,43827646	3,438277425	16	4,45122547	4,451233703
7	3,45388584	3,453887286	17	4,45262411	4,452630002
8	3,47192175	3,471922700	18	4,47208896	4,472093174
9	3,48408013	3,484080275	19	4,48245731	4,482471319
10	3,48631241	3,486313523	20	4,48258834	4,482589363

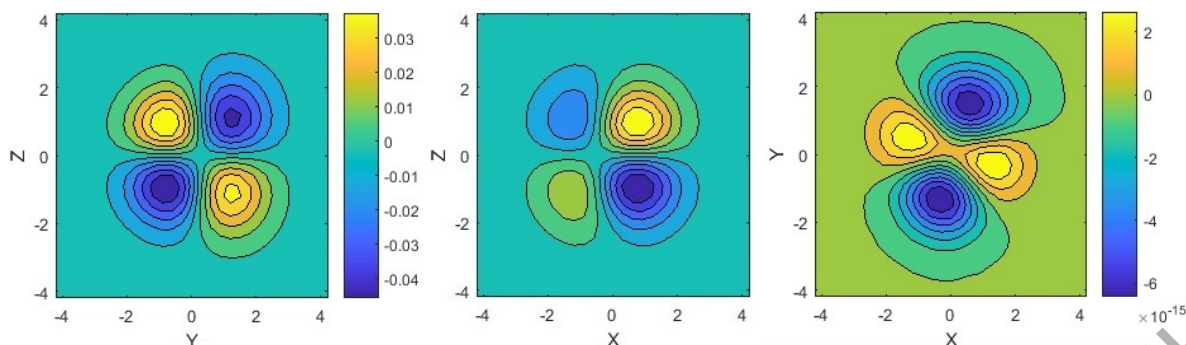


Рисунок 2 – Линии равных значений волновой функции состояния  $i=6$  трехмерного аналога потенциала Хенона-Хейлеса в плоскостях  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=0$  соответственно

### Заключение

В работе выполнено исследование вычислительной эффективности высших порядков метода конечных разностей при решении трехмерного уравнения Шредингера. Реализовано графическое отображение трехмерных волновых функций построением линий равного уровня в сечениях  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=0$ .

Результаты расчетов показывают, что получить приемлемые результаты при решении трехмерного уравнения Шредингера методом конечных разностей можно только с использованием высших порядков аппроксимации частных производных волновой функции. Существенно то, что метод конечных разностей приводит к стандартной, а не обобщенной матричной задаче на собственные значения.

Дальнейшее повышение точности результатов может быть достигнуто развитием обобщенного метода Нумерова для конечно-разностных схем высших порядков, предложенного в [8], на трехмерный случай и использованием экстраполяции расчетов на последовательности сеток.

### Литература

1. Deyasi, A. Computation of intersubband transition energy in normal and inverted core-shell quantum dots using finite difference technique / A. Deyasi, S. Bhattacharyya, N.R. Das // Superlattices and Microstructures. – 2013. – Vol. 60. – P. 414–425.
2. Liang, Gong Numerical analysis on quantum dots-in-a-well structures by finite difference method / Gong Liang, Shu Yong-chun, Xu Jing-jun, Zhu Qin-sheng, Wang Zhan-guo // Superlattices and Microstructures. – 2013. – Vol. 60. – P. 311–319.

3. Bouazra, A. Numerical modelling of InAs quantum dot with application of coordinate transformation and finite difference method / A. Bouazra, S. Mnasri, S. Abdi-Ben Nasrallah, M. Said // Computer Physics Communications. – 2014. – Vol.185. – P. 1290–1298.

4. Graen, T. NuSol – Numerical solver for the 3D stationary nuclear Schrödinger equation / T. Graen, H. Grubmüller // Computer Physics Communications. – 2016. – Vol. 198. – P. 169–178.

5. Дей, Е.А. Эффективность высших порядков метода конечных разностей при решении стационарного уравнения Шредингера / Е.А. Дей // Известия ГГУ – 2013. – № 6. – С. 178–183.

6. Дей, Е.А. Эффективность метода конечных разностей при решении двумерного стационарного уравнения Шредингера / Е.А. Дей // Материалы IV Международной научной конференции «Проблемы взаимодействия излучения с веществом», посвященной 90-летию со дня рождения Б.В. Бокутя (9-11 ноября 2016 г.) – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2016, часть 1, с. 141–146.

7. Yu, Hua-Gen A coherent discrete variable representation method for multidimensional systems in physics / Hua-Gen Yu // Journal of Chemical Physics. – 2005. – Vol. 122. – P. 164107-1–164107-6.

8. Дей, Е.А. Численное решение стационарного уравнения Шредингера обобщенным методом Нумерова / Е.А. Дей // Известия ГГУ. – 2012, №6. – С. 31–37.

**Т.П. Желонкина, С.А. Лукашевич, А.А. Гузовец**  
УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ**

Одним из фундаментальных физических законов является закон сохранения электрического заряда. Выразим его математически через макроскопические величины: плотность заряда  $\rho$  и плотность электрического тока  $\mathbf{j}$ . Выбираем в этом случае в некоторой среде произвольную замкнутую поверхность  $E$ , ограниченную объемом  $v$  (рисунок 1).

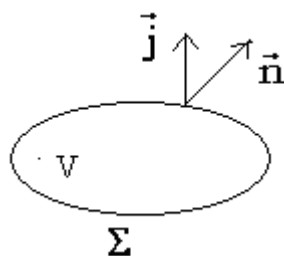


Рисунок 1

В этом случае баланс заряда в объеме  $v$ , ограниченном замкнутой поверхностью  $\Sigma$  представляется в дифференциальном виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint j_n d\Sigma. \quad (1)$$

Сам заряд

$$q = \int \rho dV. \quad (2)$$

Преобразовав поверхностный интеграл в объемный  $\int \text{div} j dV$ , мы придем к следующему соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} d\Sigma \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\int \text{div} j dV.$$

Это соотношение должно выполняться для произвольного объема  $v$ , а поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} j. \quad (3)$$

Формула (3) выражает закон сохранения заряда в макроскопической электродинамике. Такой же вид в дифференциальной форме должны иметь все законы сохранения физических величин.

Рассмотрим следующий закон – закон сохранения энергии

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\text{div} \vec{S}, \quad (4)$$

где  $\omega$  – плотность электромагнитной энергии,  $\vec{S}$  – вектор потока энергии.

Это равенство верно в случае, когда не происходит преобразование энергии данного вида в другие виды энергии. В некотором бесконечно малом объеме может быть несколько видов энергии – энергия покоя частиц  $m_0 \vec{v}^2$ , энергия их взаимодействия, энергия хаотического теплового движения, энергия электромагнитного поля.

Формула  $\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\text{div} \vec{S}$  верна только для одного вида энергии и только в том случае, когда нет перехода одного вида энергии в другие.

В интегральной форме данное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\oint_{\Sigma} S_n d\Sigma, \quad (5)$$

где  $w$  – полная энергия, а  $S_n$  – имеет смысл потока энергии.

Если имеет место преобразование одного вида энергии в другой внутри самого объема  $v$ , то  $\frac{\partial w}{\partial t}$  будет определяться не только перетеканием через поверхность, но также убылью (или увеличением) энергии за счет перехода в другой вид энергии. Поэтому уравнение нужно дополнить в правой части одним или несколькими членами, отражающими преобразование энергии, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \omega dv = -\oint_{\Sigma} S_n d\Sigma + P - Q, \quad (6)$$

где  $P$  – работа сторонних сил,  $Q$  – Джоулево тепло, выделяемое в единицу времени.

$$P = \int_v N dv, \quad Q = \int_v q dv,$$

где  $N$  – плотность мощности сторонних сил,  $q$  – плотность секундного выделения Джоулева тепла

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \omega dv = -\int_v \text{div} S + \int_v N dV - \int_v q dV. \quad (7)$$

В дифференциальном виде закон сохранения энергии представляется следующим образом

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\text{div} \vec{S} + N - q. \quad (8)$$

Величины  $\omega$  и  $\vec{S}$  должны быть связаны с напряженностями электрического и магнитного полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Эту связь считаем известной

$$\omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (9)$$

В курсе общей физики плотность энергии электрического поля плюс плотность энергии магнитного поля получается в частных случаях заряженного конденсатора и соленоида, по которому протекает

ток, а затем эти выражения обобщаются на все случаи, исходя из принципа близко действия.

В формальной теории поля рассуждения те же самые, только применяется другой математический аппарат. Для вектора Пойтинга  $\vec{S}$  следует поступить таким же образом, а именно установить функциональную связь между векторами  $\vec{S}$  и векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  для частного случая (или по крайней мере не для самого общего случая), а затем принять эту функциональную связь верной в любом случае.

Рассмотрим процедуру доказательства теоремы Пойтинга:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} + \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} + \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}. \quad (11)$$

Далее используем уравнения Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} - \vec{j} &= \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\vec{H} \text{rot} \vec{E} + \vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (13)$$

А теперь используем тождество:

$$\vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b} - \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} = -\text{div}[\vec{a} \times \vec{b}], \quad (14)$$

получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\text{div} \vec{E} \times \vec{H} - \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (15)$$

Сравнение с дифференциальной формой закона сохранения энергии (8) позволяет сделать вывод, что

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (16)$$

В данной формуле нет ограничений на зависимость  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  от времени, хотя в процедуре получения этой формулы использовались явно

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  (точнее  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ). Это обстоятельство является по видимому методическим препятствием для обобщения формулы (16) на все случаи, в том числе на стационарные поля.

Для преодоления этого препятствия методически целесообразно дать некоторое количество задач на использование вектора Пойтинга в стационарных полях.

В стационарном случае  $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$  и уравнение баланса энергии принимает вид:

$$0 = -\operatorname{div} \vec{S} + N - \vec{j} \vec{E}. \quad (17)$$

Знак минус плотности мощности внешних сил, за счет которых происходит преобразование электромагнитной энергии в другие виды и наоборот, следует определять в конкретных случаях, знак  $\operatorname{div} \vec{S}$  может быть отрицательным, т.е. это значит, что энергия притекает к данной точке.

### Литература

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики Т.3. Электричество / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1977. – 688с.
2. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М.Сэндс. – М.: Мир, 1977. – 348с.
3. Матвеев, А.Н. Электричество и магнетизм / А.Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1987. – 464с.

**М.И. Левчук<sup>1</sup>, А.И. Львов<sup>2</sup>, М.Н. Невмержицкий<sup>3</sup>,  
Р.Г. Шуляковский<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси,  
Минск, Беларусь,

<sup>2</sup>Физический институт РАН, Москва, Россия,

<sup>3</sup>ГНУ «Институт прикладной физики Национальной академии наук  
Беларуси», Минск, Беларусь

### **ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ НЕЙТРОНА В КОМПТОНОВСКОМ РАССЕЯНИИ НА ДЕЙТРОНЕ**

В последнее время значительный интерес проявляется к изучению комптоновского рассеяния на протоне и нейтроне в области низких и средних энергий. Это связано с тем, что в указанных процессах могут быть определены фундаментальные структурные постоянные нуклонов – их электрическая ( $\alpha$ ) и магнитная ( $\beta$ ) поляризуемости. Они содержат важную информацию о структуре нуклонов на средних и

больших расстояниях, в частности, о радиусе кваркового кора, о мезонной шубе, о вкладе в мезонную шубу коррелированных  $\pi\pi$ -пар или  $\sigma$ -мезона и т.д. Соответствующие вопросы подробно обсуждаются в обзорах [1, 2].

Знание амплитуд  $\gamma p$ - и  $\gamma n$ -рассеяния необходимо также для интерпретации данных по рассеянию фотонов на ядрах. Такого рода исследования могут, например, дать ответ на вопрос о том, насколько различаются электромагнитные свойства свободных и связанных нуклонов. Ниже мы обсудим современный статус поляризуемостей нуклона.

Вследствие того, что нуклон имеет внутреннюю структуру, он может деформироваться во внешнем электромагнитном поле, приобретая в результате дополнительную энергию

$$V_{pol}(r) = -\frac{1}{2}4\pi[\alpha\mathbf{E}^2(r) + \beta\mathbf{H}^2(r)], \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – напряженности электрического и магнитного полей, соответственно. Отметим здесь, что появление фактора  $4\pi$  в (1) связано с тем, что мы в дальнейшем будем использовать систему единиц Хевисайда для зарядов и полей, в которой, например,  $e^2 = 4\pi / 137$ , но, по историческим причинам, используем систему Гаусса для поляризуемостей.

Поляризационное взаимодействие (1) приводит к дополнительному вкладу в амплитуду комптоновского рассеяния на нуклоне

$$T_{pol} = 4\pi \left[ \omega^2 \alpha \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* + \beta (\mathbf{e} \times \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e}^* \times \mathbf{k}') \right], \quad (2)$$

где  $\mathbf{e}$  ( $\mathbf{e}'$ ) и  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}'$ ) – векторы поляризации и импульса начального (конечного) фотонов,  $\omega$  – энергия фотона.

Существует различие в ситуациях, связанных с определением поляризуемостей протона и нейтрона. Можно показать, что разложение дифференциального сечения комптоновского рассеяния на протоне в лабораторной системе с учетом поляризуемостей имеет вид [1]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{po} - \frac{e^2}{4\pi m} \omega^2 \left[ \frac{\alpha + \beta}{2} (1 + \cos\Theta)^2 + \frac{\alpha - \beta}{2} (1 - \cos\Theta)^2 \right] + O(\omega^4), \quad (3)$$

где  $e$  и  $m$  – заряд нуклона и его масса. Первый член в правой части – это т.н. сечение Поуэлла для рассеяния фотона на точечной заряженной частице спина  $\frac{1}{2}$ , имеющей также аномальный магнитный момент. Второй член обусловлен интерференцией томсоновской амплитуды и членов с поляризуемостями (2). Анализ выражения (3) пока-



зывает, что в случае протона этот член становится измеримым при достаточно малых энергиях фотона (начиная примерно с 50 МэВ).

Поляризуемости же нейтрона проявляют себя только в члене порядка  $\omega^4$ . Следовательно, соответствующее сечение может быть измерено только при бóльших энергиях (мы не приводим здесь выражения для дифференциального сечения в этом порядке ввиду его громоздкости).

Сумма поляризуемостей может быть рассчитана с помощью известного правила сумм Балдина [3], связывающего  $\alpha_N + \beta_N$  с интегралом от полного сечения адронного фотопоглощения на нуклоне  $\sigma_N(\omega)$ :

$$\alpha_N + \beta_N = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\sigma_N(\omega)}{\omega^2} d\omega. \quad (4)$$

В выражении (4)  $\omega_0$  – это порог фотопоглощения на нуклоне ( $\omega_0 \approx 150$  МэВ). Вследствие фактора  $\omega^{-2}$  в подынтегральном выражении интеграл в правой части (4) быстро сходится и может быть вычислен весьма надежно [4]:

$$\alpha_p + \beta_p = 14,0 \pm 0,5; \quad \alpha_n + \beta_n = 15,2 \pm 0,5 \quad (5)$$

в единицах  $10^{-4}$  Фм<sup>3</sup>, которые мы будем использовать в дальнейшем для поляризуемостей. Разница же поляризуемостей  $\alpha_N - \beta_N$  не может быть рассчитана с достаточной точностью и обычно считается свободным параметром.

### Результаты измерений поляризуемостей протона

Выполненный недавно наиболее полный анализ всех (ранних и поздних) экспериментальных данных по дифференциальному сечению упругого  $\gamma p$  рассеяния при энергиях  $\omega < 150$  МэВ [5] дал значения  $\alpha_p = 11,7 \pm 0,8(exp) \pm 0,7(theory)$  и  $\beta_p = 2,3 \pm 0,9(exp) \pm 0,7(theory)$ .

### Результаты измерений поляризуемостей нейтрона

Что касается поляризуемостей нейтрона, то здесь ситуация гораздо хуже, несмотря на то, что эксперименты по определению  $\alpha_n$  начались раньше, чем для протона. Основные трудности при измерении поляризуемостей нейтрона связаны с отсутствием плотной, стабильной нейтронной мишени и с малостью дифференциального сечения комптоновского рассеяния на нейтроне.

До недавнего времени  $\alpha_n$  измерялась в основном в экспериментах по рассеянию медленных нейтронов в кулоновском поле тяжелых ядер. Результатом этих измерений стала только область возможных значений  $\alpha_n$  – от 7 до 19.

Таким образом, ситуация с измерением электрической поляризуемости нейтрона в указанных экспериментах весьма неудовлетворительная, и следует искать альтернативные методы для измерения  $\alpha_n$ . Что касается магнитной поляризуемости нейтрона  $\beta_n$ , то до 90-х годов прошлого столетия не было никакой экспериментальной информации об ее величине, кроме той, которая может быть получена при совместном использовании "измеренной" электрической поляризуемости и предсказаний правила сумм Балдина (4) для нейтрона (5).

В работе [6] предложен и разработан метод изучения комптоновского рассеяния на нейтроне в реакции  $\gamma d \rightarrow \gamma' np$  в области нейтронного квази-упругого пика, т.е. в области малых импульсов протона. Этот метод был использован в эксперименте группы Геттингген-Майнца [7]. Было измерено дифференциальное сечение указанной реакции при угле рассеяния фотона  $136^\circ$  в области энергий фотона от 200 до 400 МэВ. Фиксируя сумму поляризуемостей нейтрона согласно (5), авторы получили значения

$$\alpha_n = 12.5 \pm 1.8(stat)_{-0.6}^{+1.1}(syst) \pm 1.1(model), \quad \beta_n = 2.7 \mp 1.8(stat)_{-1.1}^{+0.6}(syst) \mp 1.1(model)$$

Еще один метод получения информации о поляризуемостях нейтрона состоит в использовании комптоновского рассеяния на дейтроне. Конечно, при использовании дейтронной мишени можно определить не сами нейтронные поляризуемости, а только изоскалярные поляризуемости нуклонов  $\alpha_s = (\alpha_p + \alpha_n)/2$ ,  $\beta_s = (\beta_p + \beta_n)/2$ . Но этот факт не имеет принципиального значения, поскольку, как сказано выше, поляризуемости протона измерены достаточно надежно. Вычитая из изоскалярных поляризуемостей  $\alpha_s$  и  $\beta_s$  протонные значения, можно определить нейтронные поляризуемости.

Из рисунка 1 видно, что учет поляризуемостей сильно изменяет величину дифференциального сечения. Поэтому можно ожидать, что измерение этого сечения с хорошей точностью позволит получить надежные значения поляризуемостей нейтрона.

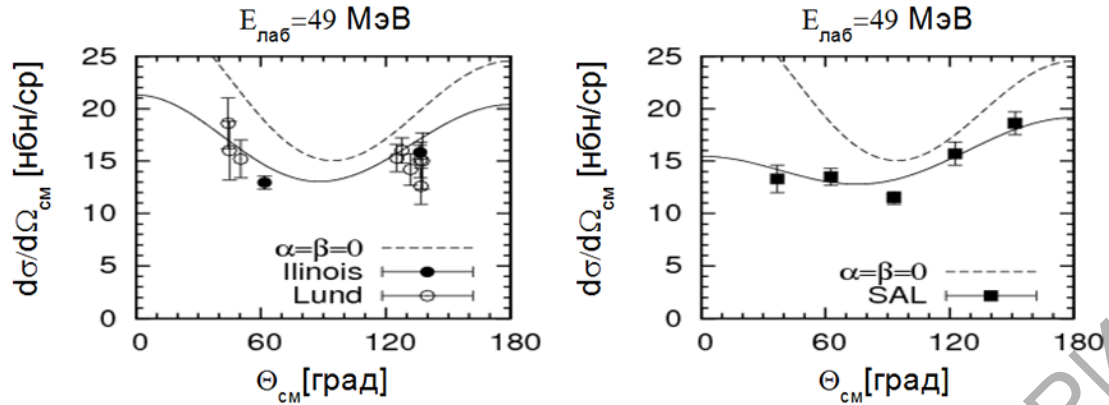


Рисунок 1 – Дифференциальное сечение реакции комптоновского рассеяния на дейтроне. Показаны сечения без поляризуемостей (штрихованные кривые) и с учетом поляризуемостей (сплошные кривые). Приведены данные экспериментов из Иллинойса [8], Саскачевана [9] и Лунда [10]

Фит данных, показанных на рисунке 2 в рамках модели [4], дал следующие значения для изоскалярных электрической и магнитной поляризуемостей нуклона

$$\alpha_s = 12,7 \pm 0,7, \quad \beta_s = 2,1 \pm 0,6. \quad (6)$$

При этом  $\chi^2 / N_{dof} = 49 / 48$ . В этом фите из анализа были исключены три точки, отмеченные овалами на рисунке 2, так как они явно выпадают из поведения других точек. Если все-таки учитывать эти точки, то получаем такие значения поляризуемостей:

$$\alpha_s = 13,0 \pm 0,7, \quad \beta_s = 2,2 \pm 0,6. \quad (7)$$

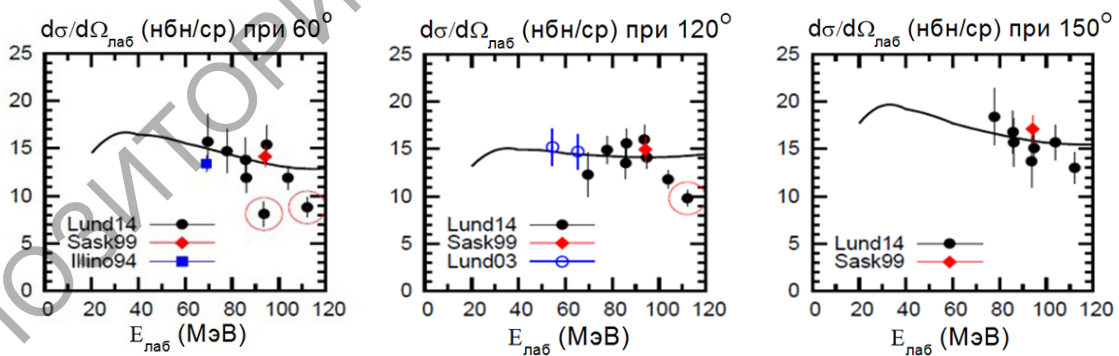


Рисунок 2 – Дифференциальное сечение реакции комптоновского рассеяния на дейтроне. Показаны данные экспериментов из Иллинойса [8], Саскачевана [9] и Лунда [10,11]

Они близки к значениям (6), но с большим  $\chi^2 / N_{dof} = 88 / 51$ . Результаты (6) совместно с протонными значениями

$\alpha_p = 11,7 \pm 1,1$ ,  $\beta_p = 2,3 \pm 1,1$  дают следующие поляризуемости нейтрона

$$\alpha_n = 13,7 \pm 1,8, \quad \beta_n = 1,9 \pm 1,6. \quad (8)$$

Эти результаты близки к значениям, полученным в реакции  $\gamma d \rightarrow \gamma' np$ .

Работа поддержана грантами Ф17Д-001 и Ф18Д-010 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

### Литература

1. Петрунькин, В.А. Электрическая и магнитная поляризуемости адронов // В.А. Петрунькин / ЭЧАЯ. – 1981. – Т. 12, вып. 3. – С. 692–753.

2. L'vov, A.I. Photon scattering as a tool for study of nucleon and nucleus structure // A.I. L'vov, V.A. Petrun'kin / Lect. Notes Phys. – 1990. – Vol. 365. – P. 123–144.

3. Baldin, A.M. Polarizability of nucleons // A.M. Baldin / Nucl. Phys. – 1960. – Vol. 18, № 2 – P. 310–317.

4. Levchuk, M.I. Deuteron Compton scattering below pion photoproduction threshold / M.I. Levchuk, A.I. L'vov // Nucl. Phys. – 2000. – Vol. A674, № 3,4. – P. 449–492.

5. Экспериментальный статус электрической и магнитной поляризуемостей протона / П.С. Баранов [и др.] // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2001. – Том 32, № 3. – С.699–733.

6. Levchuk, M.I. Photon scattering on quasi-free neutron in the reaction  $\gamma d \rightarrow \gamma' np$  and neutron polarizabilities. // M.I. Levchuk, A.I. L'vov, V.A. Petrun'kin / Few-Body Systems. – 1994. – Vol. 16, № 2. – P. 101–125.

7. Neutron polarizabilities investigated by quasifree Compton scattering from the deuteron // K. Kossert [et al.] / Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 88, № 16. – P. 162301.

8. Lucas, M.A. Compton scattering from the deuteron at intermediate energies / M.A. Lucas. – Illinois, 1994. – 173 p. (Preprint/University of Illinois № 3).

9. Hornidge, D.I. Elastic Compton scattering from the Deuteron and Nucleon Polarizabilities / D.I. Hornidge [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84, № 11. – P. 2334–2337.

10. Compton scattering from the deuteron and extracted neutron polarizabilities / M. Lundin [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 90, № 19. – P. 192501–192505.

11. Measurement of Compton Scattering from the Deuteron and an Improved Extraction of the Neutron Electromagnetic Polarizabilities / L.S. Myers [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2014. – Vol. 113, № 26. – P. 262596.

**И.С. Михалко, И.В. Семченко**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **РЕЗОНАНС В ДВОЙНОЙ ДНК-ПОДОБНОЙ СПИРАЛИ**

В данной работе сделана попытка на примере двойной ДНК-подобной проводящей спирали проиллюстрировать, как параметры реального проводника влияют на изменение резонансной частоты.

Рассмотрим двойную ДНК-подобную спираль с параметрами, соответствующими реальной молекуле ДНК. Угол подъема спирали  $\alpha = 28.4^\circ$ , радиус основания 1 мм (в реальной молекуле ДНК – около 1 нм). В реальности спирали ДНК очень длинные, до нескольких микрометров при радиусе в 1 нм, в нашем случае мы ограничимся двадцатью витками. Для моделирования очень длинной ДНК-спирали потребуется суперкомпьютер. Будем возбуждать спираль падающей сбоку линейно поляризованной волной и проанализируем излучение, испускаемое спиральными проводниками. Для волны, излучаемой спиралью, имеют место четко выраженные резонансы. Однако они не совпадают с теоретически ожидаемыми для реального проводника, что связано с изменением фазовой скорости волны в проводнике, по сравнению со скоростью света в вакууме.

В случаях, когда длина проводника в выпрямленном состоянии равна целому числу полувольт, имеет место резонанс, для которого выполняется условие

$$L = \frac{n\lambda}{2}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

При  $n=1$  наблюдается так называемый главный, или полуволновой резонанс. В действительности, для реального проводника резонансные частоты будут несколько отличаться от идеального случая. Это связано с тем, что скорость распространения электромагнитной волны в проводнике будет меньше, нежели в вакууме. Замедление волн в проводнике характеризуется так называемым коэффициентом укорочения

проводника, который можно определить как отношение скорости электромагнитной волны в вакууме к её скорости в проводнике

$$\xi = \frac{c}{v}. \quad (2)$$

С учетом коэффициента укорочения формула (1) видоизменится:

$$\xi L = \frac{n\lambda}{2}. \quad (3)$$

В общем случае определение коэффициента укорочения – нетривиальная задача. Он зависит от материала проводника, от площади его поперечного сечения, от типа волн и даже от соседних предметов, высоты антенны над уровнем земли и т.д. Кроме того, большое значение имеют краевые эффекты. Существует ряд эмпирических и экспериментальных способов определения коэффициента укорочения. Например, для экранированных линий передачи с Т-волной, коэффициент укорочения равен корню из относительной диэлектрической проницаемости материала заполнения. Способ вычисления коэффициента укорочения можно найти, например, в книге [1, с.48], [2, с.397], [3, с.76]. В нашей работе мы попытаемся оценить его значение для ДНК-подобной спирали.

Перед тем, как перейти к двадцати-витковой спирали, начнем с более простого случая. Рассмотрим три вида излучателей, каждый одинаковой длины, но разного типа (рисунок 1).

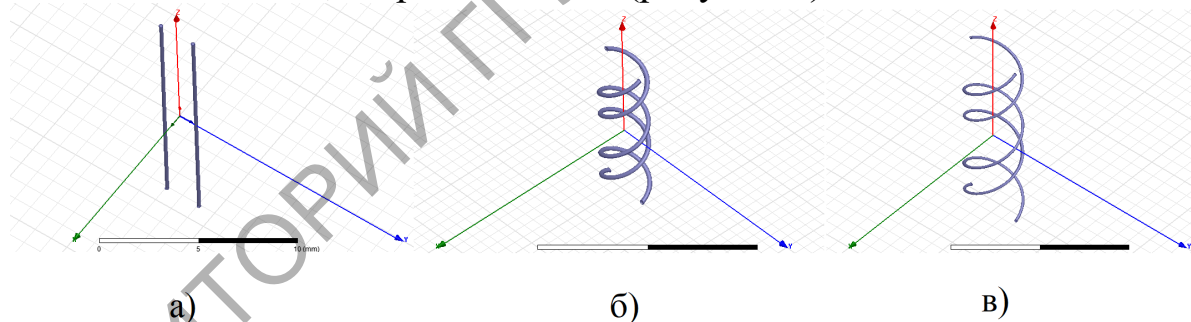


Рисунок 1 – Виды излучателей равной длины: а) прямые проводники, б) «толстая двойная спираль», в) «тонкая двойная спираль»

Первый – два параллельных прямых проводника длиной 14,28 мм и радиусом сечения 0,1 мм. Второй – двойная ДНК-подобная спираль такой же длины. Третий – двойная ДНК-подобная спираль той же длины, но проводники имеют вдвое меньший радиус сечения. Будем возбуждать их падающей волной и проанализируем их резонансные частоты.

Построим графики среднего по пространству поля излучения в зависимости от частоты для каждого вида излучателя (рисунок 2). Отметим на графиках ожидаемые резонансные частоты для идеального случая.

Графики охватывают диапазон пяти резонансных частот, которые реализуются при нечётных значениях  $n$ :  $n=1,3,5,7,9$ . Следующие резонансы становятся почти неразличимыми.

Если рассматривать чётные значения  $n$ , то на всей длине проводника укладывается целое число волн. В этом случае все излучатели, на которые можно разбить проводник, создают в окружающем пространстве взаимно компенсирующие поля. При этом суммарная волна, излучаемая всем проводником, является очень слабой.

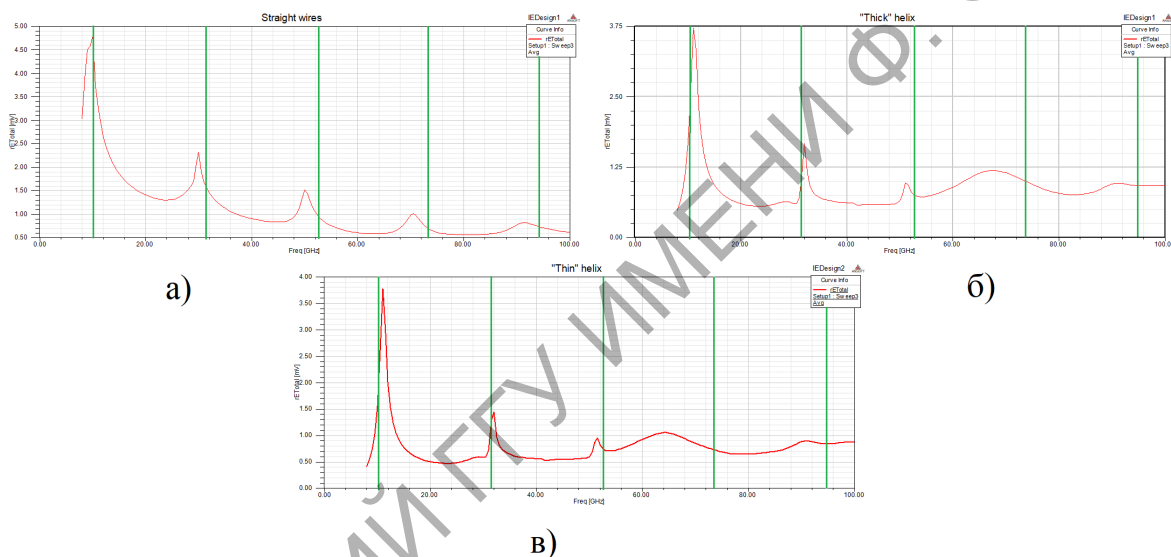


Рисунок 2 – Среднее излученное поле в зависимости от частоты:  
 а) прямые проводники; б) «толстые» спиральные проводники; в) «тонкие» спиральные проводники. Зелеными линиями отмечены резонансные частоты для идеального случая

В целом для всех случаев мы имеем весьма удовлетворительное совпадение с идеальным случаем без замедления волн. Правда, для спиральных проводников, начиная с четвертого резонанса, наблюдаются серьезные искажения. Графики для «толстой» и «тонкой» спиралей практически идентичны, поскольку во всех случаях длина волны существенно превышает диаметр проводника.

Теперь рассмотрим двойную ДНК-подобную спираль с двадцатью витками. Длина такой спирали – 142,882 мм, рассчитаем ожидаемые резонансные частоты:

$$\begin{cases} \nu_1 = 1.05 \text{ ГГц} \\ \nu_3 = 3.15 \text{ ГГц} \\ \nu_5 = 5.25 \text{ ГГц} \\ \nu_7 = 7.35 \text{ ГГц} \\ \nu_9 = 9.45 \text{ ГГц} \end{cases}$$

Как видно, на частоте полуволнового резонанса спираль излучает в нормальном режиме, диаграмма направленности подобна обычному электрическому дипольному излучателю (рисунок 3). Подобный результат был получен, например, в работе [4].

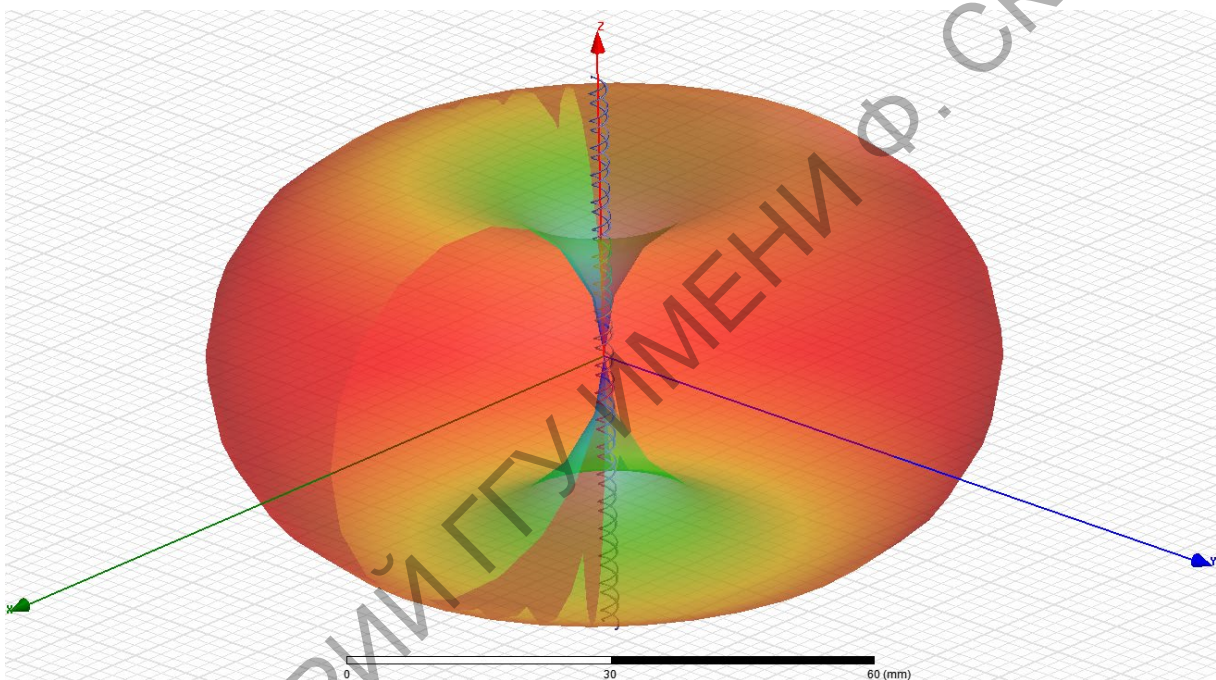


Рисунок 3 – Диаграмма направленности двойной ДНК-подобной спирали на частоте 1 ГГц

В отличие от спиралей с небольшой длиной, в данном случае искажения (отклонения от идеального случая) выражены намного сильнее. Наблюдается только четыре резонансные частоты вместо пяти ожидаемых (рисунок 4). В целом нет приемлемого совпадения для идеального и реального случая. Таким образом, можно прийти к выводу, что с увеличением длины спирального проводника возникают различные эффекты, приводящие к искажению условий резонанса, рассчитанных теоретически.

Представляет интерес следующая задача: используя средства компьютерного моделирования, получить оценку коэффициента укорочения



чения для спиральных проводников, в зависимости от различных параметров – площади поперечного сечения, длины проводника, материала проводника, его геометрии и т.д.

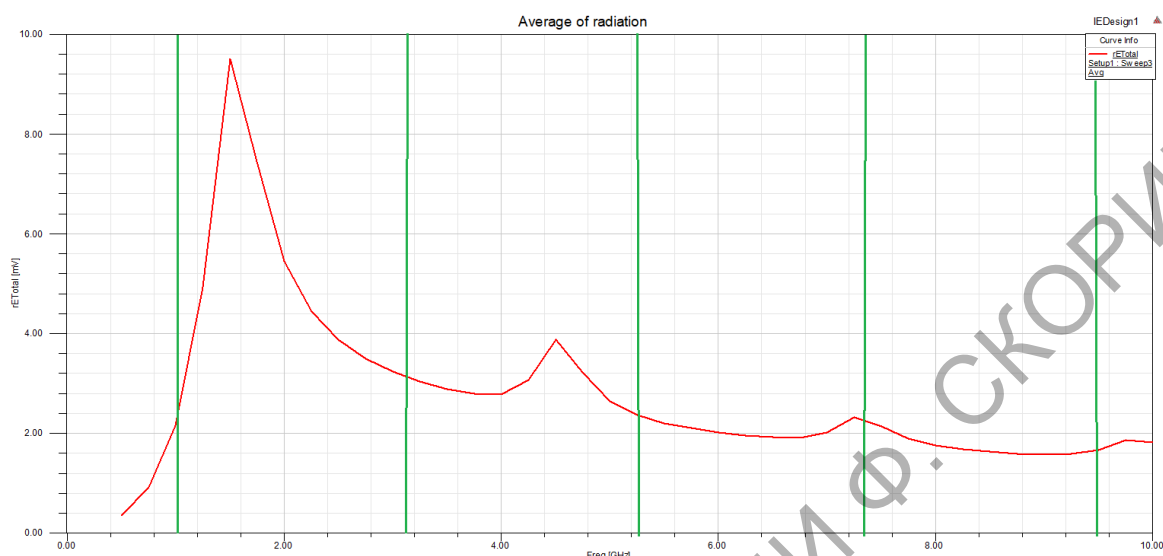


Рисунок 4 – Среднее излученное поле для двадцати-витковой двойной ДНК-подобной спирали в зависимости от частоты. Зелеными линиями отмечены резонансные частоты для идеального случая

Поскольку реальная молекула ДНК находится в водяной оболочке, она также обладает электропроводностью. Для этой молекулы возможны суперскрученное, расслабленное и линейное состояния [5]. Следовательно, проведенные исследования являются шагом при изучении возможности активации молекулы ДНК под действием внешнего электромагнитного поля, длина волны которого намного больше, чем длина витка спирали, и принадлежит к оптическому диапазону. В то же время длина волны может быть близкой к половине длины всей спирали и тем самым создавать условия резонансного взаимодействия.

### Литература

1. Ротхаммель, К. Антенны: в 2 т. Т.1 / К. Ротхаммель. – 11-е изд. – Мн.: «Наш город», 2001. – 416 с.
2. Марков, Г.Т. Антенны / Г.Т. Марков, Д.М. Сазонов. – М.: «Энергия», 1975. – 528 с.
3. Юрцев, О.А. Спиральные антенны / О.А. Юрцев, А.В. Рунов, А.Н. Казарин. – М.: «Советское радио», 1974. – 224 с.

4. Михалко, И.С. Модель электромагнитного взаимодействия двойной ДНК-подобной спирали / И.С. Михалко, И.В. Семченко // Современные проблемы физики: Международной школа-конференция молодых ученых и специалистов, 13-15 июня 2018 г.: [сб. науч. тр.] / под ред. В.В. Машко, Д.В. Новицкого, М.С. Усачёнка. – Мн.: Институт физики НАН Беларуси, 2018. – С. 234–238.

5. DNA Damage by OH Radicals Produced Using Intense, Ultrashort, Long Wavelength Laser Pulses / A.K. Dharmadhikari [et al.] // Physical Review Letters. – 2014. – Vol. 112 – P. 138105.

**А.А. Панков**

УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

## **МЕЖДУНАРОДНЫЕ БАЗЫ И ЦЕНТРЫ ЯДЕРНЫХ ДАННЫХ И СОЗДАНИЕ ЯДЕРНО-ИНФОРМАЦИОННОГО ЦЕНТРА НА БАЗЕ ЛФИ ГГТУ ИМ. П.О. СУХОГО**

### **Введение**

В основу проектных расчетов и прогнозирования процессов функционирования ядерных реакторов заложены фундаментальные константы, характеризующие свойства ядерных реакций, структуру ядер и свойства радиоактивного распада. От полноты и точности этих данных зависят радиационная и ядерная безопасность, а также экологическая приемлемость этих ядерных установок. Создание Базы ядерных данных в Беларуси позволит контролировать качество ядерных данных, поставляемых потребителям, и обеспечить соответствие систем констант, закладываемых в технические проекты, современным международным стандартам.

Проект любой АЭС проходит стадию разработки – 5-7 лет, и столько же лет уходит непосредственно на строительство станции. На момент ввода в эксплуатацию некоторые технологические процессы нуждаются в обновлении и модернизации – в этом состоит одна из задач научного сопровождения ввода в эксплуатацию и дальнейшего функционирования АЭС. Поддержание Базы ядерных данных невозможно без активного международного сотрудничества с ведущими научными центрами, где происходит накопление, обновление, тести-

рование и выработка рекомендаций по использованию ядерных данных.

Научное сопровождение развития атомной энергетики должно включать несколько обязательных аспектов научно-организационной деятельности, главные из которых:

1) создание современной компьютерной базы, оснащенной программными и информационными системами для подготовки ядерно-физических констант и проведению инженерных расчетов;

2) создание группы высококвалифицированных специалистов для проведения работ

- по подготовке ядерных констант для проведения инженерных расчетов;

- для анализа и моделирования процессов в реакторе, по выполнению инженерных расчетов, обеспечивающих бесперебойную и безопасную эксплуатацию ядерных установок;

- по выполнению экспериментально-расчетных работ по дозиметрии корпусов реакторов.

Для проведения работ по анализу и моделированию процессов в реакторе при физическом и энергетическом пуске АЭС, расчетному сопровождению на стадиях вывода АЭС на проектную мощность и ее работы в энергосистеме, а также при разработке стратегии и перспектив реализации основных концепций ядерных топливных циклов (переработка и захоронение), необходимо иметь надежные ядерно-физические константы изотопов в широкой области массовых чисел и энергий налетающих нейтронов.

Основным информационным источником при создании ядерно-физических констант для проведения инженерных расчетов являются, так называемые, библиотеки оцененных ядерных данных (БОЯД). Наиболее современные версии этих библиотек – ENDF/B-VII.1 (США, 2011), JEFF-3.2 (Европа, 2014), JENDL-4.0 (Япония, 2012), ROSFOND (Россия, 2010), CENDL-3.1 (Китай, 2009) – хотя и были выпущены в последние несколько лет, однако ни одна из них не учитывает (и не может учитывать, вследствие специфики создания библиотек оцененных данных) всю имеющуюся на сегодняшний день экспериментальную информацию. Поэтому одним из важнейших этапов в использовании ядерных констант для выполнения инженерных расчетов является выбор той БОЯД, которая бы наиболее адекватно описывала современный набор экспериментальных данных.

Поскольку информация в БОЯД записана в так называемом ENDF формате, провести сравнение оцененных и экспериментальных данных невозможно без проведения предварительного расчета оцененных данных. Такие предварительные расчеты выполняются обычно с помощью трех программных кодов LINEAR, RECENT, SIGMA1 из специализированного комплекса программ PREPRO-2015 [1, 2].

Для подготовки ядерно-физических констант для инженерных расчетов необходимо использовать более широкий набор программных продуктов (например, NJOY, GRUCON, GROUPIE, MIXER). Выбор программы для подготовки базы ядерно-физических констант (обычно используется название специализированная проблемно-ориентированная библиотека ядерных констант) зависит от поставленной инженерной задачи, однако следует отметить, что только две из перечисленных программ (GROUPIE и MIXER) являются программами свободного доступа.

Деятельность по созданию научно-методической и информационной базы для ядерно-технологических расчетов была начата в 2013 году в рамках совместного проекта Украинского центра ядерных данных, УкрЦЯД (Институт ядерных исследований НАН Украины, ИЯИ, Киев, Украина) и Лаборатории физических исследований (ЛФИ, ГГТУ имени П.О. Сухого) «Накопление, обработка, систематизация и анализ информации в области ядерной энергетики как основы создания информационного центра ядерно-физических данных». В круг задач, которые ставились при выполнении совместного проекта, а также над которыми до сих пор продолжается работа, входили, в частности, следующие:

1) Создание компьютерной базы современных БОЯД (ENDF/B-VII.1, JEFF-3.2, JENDL-4.0, ROSFOND, CENDL-3.1).

2) Создание базы современных программных продуктов для подготовки ядерных констант на основе БОЯД (PREPRO-2015).

3) Организация удаленного доступа к современным международным ресурсам по ядерно-физической информации, в частности к современной международной базе экспериментальных ядерных данных (EXFOR).

4) Создание учебно-методической базы для подготовки специалистов для проведения работ по подготовке ядерных констант.

## 1. Международные базы данных по ядерным реакциям

Международное научное сообщество под эгидой МАГАТЭ организовало совместное сотрудничество Центров ядерных данных по подготовке данных по ядерным реакциям под действием нейтронов для решения задач атомной энергетики, в которое первоначально вошли четыре головных организации – Секция ядерных данных МАГАТЭ, Национальный центр ядерных данных (Брукхэвенская Национальная лаборатория) США, Банк данных Агентства по атомной энергии Франции и Центр ядерных данных (Физико-энергетический институт, Обнинск, Россия). Впоследствии к ним присоединилось еще несколько Центров и групп ядерных данных из Венгрии, Китая, Кореи, России, Украины, Японии, а в круг интересов были включены данные по ядерным реакциям под действием заряженных частиц и тяжелых ионов.

Основной задачей участников сети является создание полных (репрезентативных) баз данных (БД), содержащих описание характеристик ядерных реакций и свойств атомных ядер. Такие БД должны обеспечивать их эффективное использование для решения широкого класса фундаментальных и прикладных проблем. Деятельность указанных Центров включает в себя:

- поиск данных по всем доступным БД и их компиляцию;
- разработку единого формата данных;
- проведение экспертизы точности и надежности ЯД;
- согласование результатов различных экспериментов;
- создание системы доступа к данным (банки и базы данных, Интернет-интерфейсы);
- анализ и оценка ЯД;
- подготовка, издание и распространение аналитических обзоров, указателей, атласов по ЯД, и т.д.

Например, на Web-сайте Центра данных фотоядерных экспериментов (ЦДФЭ) НИИ Ядерной физики им. Д.В. Скобельцына МГУ им. М.В. Ломоносова (<http://cdfe.sinp.msu.ru>) пользователям предоставляются 11 БД [1-4]:

- «База данных по ядерным реакциям» (<http://cdfe.sinp.msu.ru/exfor/index.php>) включает в себя характеристики ядерных реакций под действием различных налетающих частиц (выходы, сечения, функции возбуждения реакций, энергетические, угловые, зарядовые, массовые и другие распределения частиц-

продуктов реакций, поляризации, анализирующие способности, корреляции и др.);

- «База ядерно-спектроскопических данных»

(<http://cdfе.sinp.msu.ru/services/ensdfr.html>) содержит информацию об энергетических уровнях известных в настоящее время атомных ядер (~ 3500) и переходах между ними (энергии, спины, четности, времена жизни, мультипольности, коэффициенты ветвления и смешивания, вероятности переходов, значения параметров распадов, данные об изоспинах ядерных состояний, квадрупольных моментах и деформациях ядер и др.);

- БД «Параметры основных состояний ядер»

(<http://cdfе.sinp.msu.ru/services/gsp.en.html>) содержит данные по атомным ядрам в целом (распространенности стабильных изотопов и времена жизни нестабильных изотопов, атомные массы, дефекты масс, энергии связи, спины, четности, изоспины основных состояний ядер, энергии первых изобар-аналогов и др.);

- БД «Публикации по ядерной физике»

([http://cdfе.sinp.msu.ru/services/nsr/Search\\_form.shtml](http://cdfе.sinp.msu.ru/services/nsr/Search_form.shtml)) предоставляет справочно-библиографическую информацию по ядерно-физическим работам из международного банка данных NSR (NuclearScienceReferences);

- «Калькулятор порогов и энергий ядерных реакций»

([http://cdfе.sinp.msu.ru/muh/calc\\_thr.shtml](http://cdfе.sinp.msu.ru/muh/calc_thr.shtml)) это реляционная БД, основанная на использовании современных и надежных данных о массах атомных ядер, которая позволяет рассчитывать значения характеристик ядерных реакций, а также в наглядной графической форме представлять результаты таких расчетов;

- «БД значений волновых функций»

([http://cdfе.sinp.msu.ru/services/wftables/FirstPage\\_eng.htm](http://cdfе.sinp.msu.ru/services/wftables/FirstPage_eng.htm)) содержит волновые функции, необходимые для описания взаимодействия атомов и ионов с заряженными частицами и фотонами, а также для расчетов одноэлектронных (ионизация, возбуждение, перезарядка) и двухэлектронных (двухкратная ионизация, двухкратное возбуждение) сечений в области спектроскопии;

- БД «Вероятности внутренней конверсии изомерных переходов малой энергии» (<http://cdfе.sinp.msu.ru/cgi-bin/convers.cgi>) содержит данные о вероятностях внутренней конверсии изомерных переходов малой энергии (коэффициентов внутренней конверсии).

## **2. Создание ядерно-информационного центра на базе ЛФИ в ГГТУ имени П.О. Сухого**

Доступ к БОЯД, к базе экспериментальных ядерных данных EXFOR и к программному комплексу PREPRO является свободным – получить библиотеки и программы можно воспользовавшись сайтами региональных или национальных центров ядерных данных (например, <http://www-nds.iaea.org/> – сайт МАГАТЕ, <http://ukrndc.kinr.kiev.ua/> – сайт Украинского центра ядерных данных). Однако, следует иметь ввиду, что сайты ядерных центров, особенно региональных, включают очень большой объем ядерно-физической информации, поэтому без достаточного опыта в подготовке констант весьма затруднительно определиться с выбором нужных библиотек и необходимых программных продуктов. Именно поэтому было решено создавать сайт на базе ЛФИ ГГТУ, который будет непрерывно пополняться информацией (библиотеками, программными продуктами, методической литературой), необходимой для создания специализированных проблемно-ориентированных библиотек ядерных констант [3, 4].

На наш взгляд, такой подход существенно облегчит и ускорит подготовку специалистов для проведения работ по подготовке ядерных констант.

В рамках выполнения пп. 1, 3 (см. выше) было создано 14 страниц сайта (на русском и английском языках) [3, 4]. В большинстве случаев русскоязычные и англоязычные версии страниц идентичны, исключением являются страницы «Пособие» («MANUAL»).

1. Главная страница сайта (вид страницы, для примера, приведен на рисунке 1).

2. Базы данных (эта страница и другие, перечисленные ниже, не приводятся из-за ограниченности объема статьи).

3. Справочник о свойствах атомных ядер.

4. ENDF/B библиотеки и пособия.

5. Библиотека оцененных нейтронных данных ENDF/B-7.1.

6. Библиотека оцененных нейтронных данных JEFF-3.2.

7. Библиотека оцененных нейтронных данных JENDL-4.0.

8. Библиотека оцененных нейтронных данных ROSFOND.

9. Библиотека оцененных нейтронных данных CENDL-3.1.

10. Пособие.

11. Специализированные библиотеки.

12. CSISRS/EXFOR (доступ через сайт Секции Ядерных Данных, МАГАТЭ, Вена, Австрия).

13. ENSDF (доступ через сайт Национального Центра Ядерных Данных, Брукхейвен, США).

14. CINDA (доступ через сайт Секции Ядерных Данных, МАГАТЭ, Вена, Австрия)

«Главная страница» сайта содержит информацию о целях и задачах проекта, а также краткую информацию о структуре сайта. «Базы данных» содержит список баз данных, представленных на сайте, а также краткую информацию об этих базах данных.

Размещение специализированных библиотек и создание гиперссылок к данным, а также краткой информации о каждой из этих библиотек планируется разместить на сайте ЛФИ ГГТУ при выполнении следующего этапа совместного проекта в 2019-2020 гг.

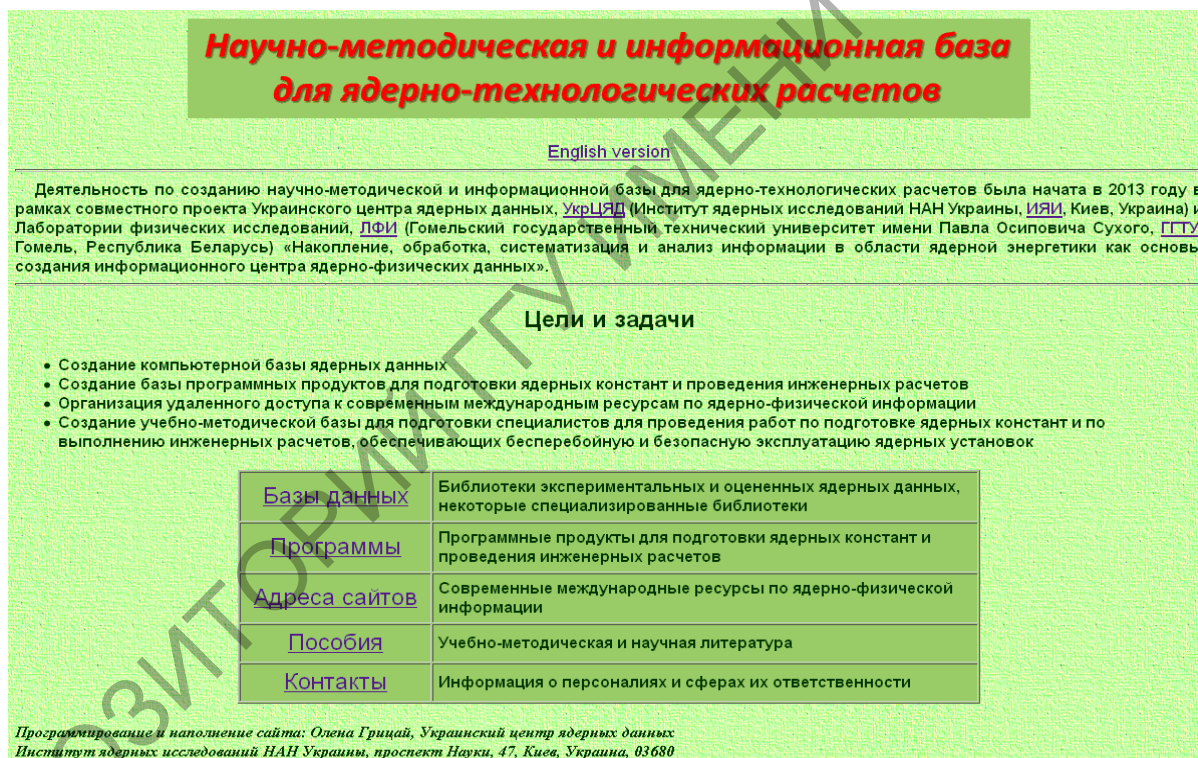


Рисунок 1 – Главная страница сайта (русскоязычная версия)

В заключение автор выражает благодарность руководителю Украинского центра ядерных данных О.О. Грицай, а также сотруднику этого центра О.И. Кальченко за плодотворные дискуссии и полезные замечания.



## Литература

1. Ишханов, Б.С. Взаимодействие электромагнитного излучения с атомными ядрами / Б.С. Ишханов, А.П. Киселев. – М.: Наука, 1979. – 257 с.
2. Грицай, О.О. Монте-Карло розрахунки нейтронних джерел на Київському дослідницькому реакторі для задач БНЗТ / О.О. Грицай, О.І. Кальченко, Н.А. Клімова, В.Ф. Разбудей, А.І. Санжур, С.Є. Біні // Ядерні та радіаційні технології. – 2014. – Т. 4. – С. 42–49.
3. Панков, А.А. Международная сеть центров ядерных данных и перспективы ее использования в атомной энергетике Беларуси / А.А. Панков, А.В. Цитринов, И.А. Панков // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2012. – № 2. – С. 26–31.
4. Pankov, A.A. International nuclear data centers network and prospects of its use in nuclear power in Belarus / A.A. Pankov, A.V. Tsytrinov, I.A. Serenkova // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2015. – Vol. 21. – P. 270–281.

**Е.С. Тимошин, С.И. Тимошин**

УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

### **ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ (НЕ)ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЛЕПТОНОВ НА ПОЛЯРИЗОВАННЫХ НУКЛОНАХ И ДЕЙТРОНАХ С ЗАРЯЖЕННЫМ И НЕЙТРАЛЬНЫМ ТОКОМ**

Понимание как спин нуклона строится из спинов кварков, глюонов и их орбитальных угловых моментов является одной из наиболее важных проблем физики частиц. По правилу сумм Джаффе-Манохара спин протона может быть разложен по вкладам кварков и антикварков ( $\Delta\Sigma$ ), глюонов ( $\Delta G$ ) и их угловых моментов ( $L_q, L_g$ ):

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Sigma + \Delta G + L_q + L_g$ . Кварки и антикварки несут не более 1/3 спина нуклона [1-5]. Недавние измерения RHIC [6-9] показывают, что поляризация глюонов составляет 20–30%. Эксперименты HERMES и COMPASS показывают, что поляризация странных кварков  $\Delta s$  является малой, как и поляризация легкого кваркового моря  $\Delta\bar{u}, \Delta\bar{d}$  [3-5, 10]. Экспериментально установлена ароматовая асимметрия  $\Delta\bar{u} \neq \Delta\bar{d}$

( $\Delta\bar{u} > 0$ ,  $\Delta d < 0$ ) [3, 5, 11, 12], хотя не исключено, что она не подтверждается [13, 14]. Экспериментальные указания на сравнительно малые вклады кварков и глюонов в нуклонный спин свидетельствуют о необходимости изучения роли их угловых орбитальных моментов [9, 15]. Данные по ним можно получать из эксклюзивных процессов глубоко виртуального комптоновского рассеяния и электророждения мезонов в экспериментах COMPASS, JLab.

Дальнейшие исследования спиновой структуры нуклона планируются как в действующих экспериментах COMPASS, JLab, RHIC, так и в будущих проектах электрон-ионного коллайдера (EIC), LHeC, NICA (ОИЯИ, Дубна) [9, 11, 16-24]. JLab 12 GeV Upgrade будет обеспечивать важное комбинирование пучка высокой интенсивности и достижимости по  $Q^2$ , что позволит получить кварковые распределения в валентной области через измерения структурных функций (СФ) при больших  $x$  с беспрецедентной точностью [9, 19-24]. Из этих измерений будет возможно извлекать распределения поляризованных валентных и морских кварков, а также существенно улучшить извлечение поляризованного глюонного распределения при больших  $x$ .

Планируемые измерения на RHIC будут улучшать точность, расширять кинематическое достижение измерений, чувствительных к глюонной поляризации [9, 11, 22-25]. Эксперименты на EIC будут значительно увеличивать кинематический охват по  $x$  и  $Q^2$  до  $x \leq 10^{-4}$  [9]. Это будет обеспечивать точную информацию о  $\Delta G(x)$  и  $\Delta q(x)$  по ароматам [11, 16-18].

В настоящей работе рассматриваются способы получения кваркового вклада в спин нуклона в глубоконеупругом рассеянии (ГНР) поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах и дейтронах с заряженным и нейтральным токами применительно к экспериментам на коллайдерах.

Первые моменты  $\Gamma_6$  поляризационной СФ  $g_6^{\vec{l}\vec{N}}$  – ГНР с заряженным током

$$\vec{l} + \vec{N} \rightarrow \nu + X \quad (1)$$

для протона равны

$$\Gamma_6^{l^-p} = \Delta u - \Delta\bar{d} - \Delta\bar{s}, \quad \Gamma_6^{l^+p} = \Delta d + \Delta s - \Delta\bar{u}. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta q(\Delta\bar{q}) = \int_0^1 \Delta q(x)(\Delta\bar{q}(x))dx$  – вклад кварка  $q$  (антикварка  $\bar{q}$ ) в спин нуклона.

Из (2) получаем

$$\Gamma_6^{l^-p} - \Gamma_6^{l^+p} = (\Delta u + \Delta \bar{u}) - (\Delta d + \Delta \bar{d}) - (\Delta s + \Delta \bar{s}). \quad (3)$$

Для разделения кварковых ароматов в (3) воспользуемся первым моментом  $\Gamma_{1s}^p$  СФ  $g_{1s}^p$  в ГНР неполяризованных лептонов на поляризованных нуклонах с нейтральным током

$$l + \vec{N} \xrightarrow{\gamma Z} l + X, \quad (4)$$

который получен [26] в виде

$$\Gamma_{1s}^p = -a_u^s(\Delta u + \Delta \bar{u}) + a_d^s(\Delta d + \Delta \bar{d}) + a_s^s(\Delta s + \Delta \bar{s}). \quad (5)$$

В анализах спиновой структуры нуклона используют измеряемую величину – аксиальный заряд  $a_3$  ( $a_3 = F + D = 1.2670 \pm 0.0035$ , где  $F, D$  – константы связи  $\beta$ -распада гиперона)

$$a_3 = (\Delta u + \Delta \bar{u}) - (\Delta d + \Delta \bar{d}). \quad (6)$$

Тогда из измеряемых величин  $(\Gamma_6^{l^-p} - \Gamma_6^{l^+p})$  (3),  $\Gamma_{1s}^p$  (5) и  $a_3$  (6) получаем выражения для суммарного вклада кварков и антикварков по ароматам:

$$\begin{aligned} \Delta u + \Delta \bar{u} &= \frac{a_d^s(\Gamma_6^{l^-p} - \Gamma_6^{l^+p}) + \Gamma_{1s}^p}{a_d^s - a_u^s}, \\ \Delta d + \Delta \bar{d} &= \frac{\Gamma_{1s}^p + a_d^s(\Gamma_6^{l^-p} - \Gamma_6^{l^+p})}{a_d^s - a_u^s} - a_3, \\ \Delta s + \Delta \bar{s} &= \Gamma_6^{l^+p} - \Gamma_6^{l^-p} + a_3. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим первые моменты  $\Gamma_6$ , нарушающих четность СФ процессов (1) и (4). Так из (2) имеем соотношение для поляризации валентных кварков

$$\Gamma_6^{l^-p} + \Gamma_6^{l^+p} = \Delta u_V + \Delta d_V,$$

а для процессов с нейтральным током (4) (см. [26])

$$\Gamma_{6s}^p = b_u^s \Delta u_V + b_d^s \Delta d_V.$$

Эти выражения позволяют получить отдельно вклады валентных кварков в спин нуклона

$$\begin{aligned} \Delta u_V &= \frac{\Gamma_{6s}^p - b_d^s(\Gamma_6^{l^-p} + \Gamma_6^{l^+p})}{b_u^s - b_d^s}, \\ \Delta d_V &= \frac{\Gamma_{6s}^p - b_u^s(\Gamma_6^{l^-p} + \Gamma_6^{l^+p})}{b_d^s - b_u^s}. \end{aligned}$$

Рассмотрим ГНР с заряженным током (1) поляризованных лептонов и неполяризованных лептонов с нейтральным током (4) на поляризованных нейтронах.

Для первых моментов СФ процессов (1) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma_6^{l^-n} - \Gamma_6^{l^+n} &= -(\Delta u + \Delta \bar{u}) + (\Delta d + \Delta \bar{d}) - (\Delta s + \Delta \bar{s}), \\ \Gamma_6^{l^-n} + \Gamma_6^{l^+n} &= \Delta u_V + \Delta d_V.\end{aligned}\quad (7)$$

Для ГНР с нейтральным током (4) первые моменты в случае рассеяния на поляризованных нейтронах равны

$$\begin{aligned}\Gamma_{1s}^n &= a_d^s(\Delta u + \Delta \bar{u}) - a_u^s(\Delta d + \Delta \bar{d}) + a_s^s(\Delta s + \Delta \bar{s}), \\ \Gamma_{6s}^n &= b_d^s \Delta u_V + b_u^s \Delta d_V.\end{aligned}\quad (8)$$

Выражения для  $(\Delta u + \Delta \bar{u})$ ,  $(\Delta d + \Delta \bar{d})$ ,  $(\Delta s + \Delta \bar{s})$  получаем из  $(\Gamma_6^{l^-n} - \Gamma_6^{l^+n})$ ,  $\Gamma_{1s}^n$ ,  $a_3$ :

$$\Delta u + \Delta \bar{u} = \frac{a_d^s(\Gamma_6^{l^-n} - \Gamma_6^{l^+n}) + \Gamma_{1s}^n}{a_d^s - a_u^s} + a_3,$$

$$\Delta d + \Delta \bar{d} = \frac{a_d^s(\Gamma_6^{l^-n} - \Gamma_6^{l^+n}) + \Gamma_{1s}^n}{a_d^s - a_u^s},$$

$$\Delta s + \Delta \bar{s} = \Gamma_6^{l^+n} - \Gamma_6^{l^-n} - a_3,$$

Вклады валентных кварков получаем из первых моментов

$$\begin{aligned}&(\Gamma_6^{l^-n} + \Gamma_6^{l^+n}) \text{ и } \Gamma_{6s}^n: \\ \Delta u_V &= \frac{(\Gamma_6^{l^-n} + \Gamma_6^{l^+n})b_u^s - \Gamma_{6s}^n}{b_u^s - b_d^s}, \\ \Delta d_V &= \frac{\Gamma_{6s}^n - b_d^s(\Gamma_6^{l^-n} + \Gamma_6^{l^+n})}{b_u^s - b_d^s},\end{aligned}$$

Рассмотрим рассеяние на дейтроне. Первые моменты СФ для дейтрона определяются как

$$\Gamma_{1,6}^d = \frac{\Gamma_{1,6}^p + \Gamma_{1,6}^n}{2} (1 - 1.5\omega),$$

где  $\omega = 0,05$  – вероятность D-состояния в волновой функции дейтрона. Для первых моментов в ГНР с заряженным током:

$$\Gamma_6^{l^-d} = \frac{\Delta u_V + \Delta d_V - 2\Delta \bar{s}}{2} (1 - 1.5\omega), \quad \Gamma_6^{l^+d} = \frac{\Delta u_V + \Delta d_V + 2\Delta s}{2} (1 - 1.5\omega)$$

Тогда

$$\Delta u_V + \Delta d_V = \frac{\Gamma_6^{l^-d} + \Gamma_6^{l^+d}}{1 - 1.5\omega}, \quad (9)$$

$$\frac{\Gamma_6^{l^+d} - \Gamma_6^{l^-d}}{1 - 1.5\omega} = \Delta s + \Delta \bar{s}. \quad (10)$$

Для ГНР с нейтральным током (4) в случае рассеяния на дейтронах получаем

$$\Gamma_{1s}^d = \frac{(a_d^s - a_u^s)(\Delta u + \Delta \bar{u} + \Delta d + \Delta \bar{d}) + 2a_s^s(\Delta s + \Delta \bar{s})}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\omega\right), \quad (11)$$

$$\Gamma_{6s}^d = \frac{(b_u^s + b_d^s)(\Delta u_V + \Delta d_V)}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\omega\right). \quad (12)$$

Совместное применение (6), (10), (11) позволяет определить вклады  $(\Delta u + \Delta \bar{u})$  и  $(\Delta d + \Delta \bar{d})$ :

$$\Delta u + \Delta \bar{u} (\Delta d + \Delta \bar{d}) = \frac{\Gamma_{1s}^d - a_s^s(\Gamma_6^{l+d} - \Gamma_6^{l-d})}{(a_d^s - a_u^s)(1 - 1.5\omega)} + \frac{a_3}{2}.$$

Выражения (9), (12) определяют суммарный вклад валентных кварков, а (10) – вклад странных кварков и антикварков в спин нуклона.

Таким образом, с помощью первых моментов  $\Gamma_6$  процессов ГНР с заряженным (1) и  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_6$  с нейтральным (4) токами получены выражения для вклада кварков и антикварков по ароматам  $(\Delta u + \Delta \bar{u}, \Delta d + \Delta \bar{d}, \Delta s + \Delta \bar{s})$ , поляризации валентных кварков  $(\Delta u_V, \Delta d_V)$  для рассеяния на поляризованных протонах, нейтронах и дейтронах.

### Литература

1. Precise determination of the spin structure function  $g_1$  of the proton, deuteron and neutron / A. Airapetian [et al.] // Phys. Rev. – 2007. – Vol.D75. – P.012007.
2. The deuteron spin-dependent structure function  $g_1^d$  and its first moment / V.Y. Alexarhin [et al.] // Phys. Lett. – 2007. – Vol. B647. – P. 8–17.
3. Quark helicity distributions from longitudinal spin asymmetries in muon-proton and muon-deuteron scattering / M.G. Alekseev [et al.] // Phys. Lett. – 2010. – Vol. B693. – P. 227–235.
4. Leader, E. Determination of polarized PDFs from a QCD analysis of inclusive and semi-inclusive Deep Inelastic Scattering data / E. Leader, A.V. Sidorov, D.B. Stamenov // Phys. Rev. – 2010. – Vol. D82. – P. 114018.
5. Arbabifar, F. QCD analysis of polarized DIS and the SIDIS asymmetry world data and light sea-quark decomposition / F. Arbabifar, A.N. Khorramian, M. Soleymaninia // Phys. Rev. – 2014. – Vol. D89. – P. 034006.
6. Bass, S.D. Gluon polarization in the proton / S.D. Bass, A. Casey, A.W. Thomas // Phys. Rev. – 2011. – Vol. C83. – P. 038202.
7. Leading order determination of the gluon polarization from DIS events with high –  $P_T$  hadron pairs / C. Adolph [et al.] // Phys. Lett. – 2013.

– Vol. B718. – P. 922–930.

8. Leading and Next-to-Leading Order gluon polarization in the nucleon and longitudinal double spin asymmetries from open charm muon-production / C. Adolph [et al.] // *Phys. Rev.* – 2013. – Vol. D87. – P. 052018.

9. QCD and Hadron Physics / S.J. Brodsky [et al.]. – ArXiv:1502.05728[hep-ph]. – 2015. – 48pp.

10. Measurement of parton distributions of strange quarks in the nucleon from charged-kaon production in deep-inelastic scattering on the deuteron / A. Airapetian [et al.] // *Phys. Lett.* – 2008. – Vol. B666. – P. 446–450.

11. De Florian, D. QCD spin physics: partonic spin structure of the nucleon / D. de Florian, R. Sassot, M. Stratmann, W. Vogelsang // *Prog. Part. Nucl. Phys.* – 2012. – Vol. 67. – P. 251–259.

12. Pretz, J. Nucleon spin structure and parton distribution functions / J.Pretz. – 2011. – 12 pp. – (ArXiv: 1109.2446 [hep-ex]).

13. Schill, Ch. Spin physics at COMPASS // *J.Phys. Conf. Ser.* – 2012. – Vol. 381. – P. 012030.

14. Shevchenko, O.Yu. Valence and sea contributions to the nucleon spin / O.Yu. Shevchenko, R.R. Arhunzyanov, V.Yu. Lavrentyev // *Eur. Phys. J.* – 2011. – Vol. C71. – P. 1713.

15. Konitopoulos, S. Proton spin and tensor gluons / S. Konitopoulos, G. Savvidy. – 2015. – 20 pp. – (ArXiv:1503.02267[hep-ph]).

16. Aschenauer, E.C. Helicity parton distributions at a future Electron–Ion Collider: a quantitative appraisal / E.C. Aschenauer, M. Stratmann, R. Sassot // *Phys. Rev.* – 2012. – Vol. D86. – P. 054020.

17. Accardi, A. Nuclear physics with a medium-energy Electron–Ion Collider / A. Accardi, V. Guzey, A. Prokudin, C. Weiss // *Eur. Phys. J.* – 2012. – Vol. A48. – P. 92.

18. Шильцев, В.Д. Коллайдеры частиц высоких энергий: прошедшие 20 лет, предстоящие 20 лет и отдаленное будущее / В.Д. Шильцев // *УФН.* – 2012. – Т.182, №10. – С.1033-1046.

19. Prokudin, A. Spin effects, QCD, and Jefferson laboratory with 12 GeV electrons / A. Prokudin // *Phys. Part. Nucl.* – 2013. – Vol. 44. – P. 947–953.

20. Nagaytsev, A.P. Spin physics at JINR: present and future / A.P. Nagaytsev // *ЭЧАЯ.* – 2013. – Т.44, вып.6. – С. 1794–1801.

21. A Large Hadron Electron Collider at CERN / LHeC Study Group (J.L. Abelleira Fernandez [et al.]). – AIP Conf. Proc. – 2012. – Vol. 1514.

– P. 1–194.

22. Von Arx, C. QCD corrections to longitudinal spin asymmetries in  $W^\pm$  boson production at RHIC / C. von Arx, T. Gehrmann // Phys. Lett. – 2011. – Vol. B700. – P. 49–54.

23. Cross section and parity violating spin asymmetries of  $W^\pm$  boson production in polarized  $p+p$  collisions at  $\sqrt{s}=500$  GeV // PHENIX Collaboration (A. Adare [et al.]) // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 106. – P. 062001.

24. Measurement of the parity-violating longitudinal single-spin asymmetry for  $W^\pm$  boson production in polarized proton-proton collisions at  $\sqrt{s}=500$  GeV // STAR Collaboration (M.M. Aggarwal [et al.]) // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 106. – P. 062002.

25. Jimenez-Delgado, P. Parton momentum and helicity distributions in the nucleon / P. Jimenez-Delgado, W. Melnitchouk, J.F. Owens // J. Phys. – 2013. – Vol. G40. – P. 093102.

26. Timoshin, E.S. The nucleon spin in deep inelastic lepton-nucleon scattering with neutral current / E.S. Timoshin, S.I. Timoshin // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2011. – Vol. 18. – P. 236–238.

**Г.Ю. Тюменков**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», г. Гомель, Беларусь

## **КВАЗИСВОБОДНАЯ ДВУХВРЕМЕННАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАРК-ДИКВАРКОВОЙ СИСТЕМЫ**

### **Введение**

Теоретическое исследование двух- и трёхчастичных бозон-фермионных систем весьма актуально в настоящее время. В рамках данных представлений моделируется структура нуклонов, барионов и пентакварков [1]. Например, легчайший пентакварк  $\Theta^+$  представим в виде связанной системы спинорного антикварка  $\bar{s}$  и двух скалярных дикварков ( $uu$ ) и ( $dd$ ). Его экспериментальное наблюдение [1] активно дискутируется, что подтверждает значимость такого рода систем и важность их квантовополевого описания.

В теории релятивистских связанных систем общепризнанным методом исследования является ковариантный одновременный подход в квантовой теории поля [2]. Наиболее последовательный его вариант

основан на применении ковариантных двухвременных функций Грина (ФГ)  $\bar{G}$  [3]. Обратная свободная двухвременная ФГ  $\{\bar{G}_{(0)}\}^{-1}$  играет важнейшую роль при построении интегральных уравнений для релятивистских волновых функций. При исследовании систем, находящихся во внешнем электромагнитном поле  $A_\mu$ , такую роль выполняет обратная квазисвободная двухвременная ФГ  $\{\bar{G}_{(0)}^{qf}\}^{-1}$  [4]. Процедура обращения предполагает знание вида необращенных ФГ, поэтому приступим к их нахождению. При этом отметим, что для систем со спиновыми структурами  $(0; 1/2)$  и  $(0; 0; 1/2)$ , включающими в себя спинорные кварки и скалярные дикварки, процедура обращения не приводит к сингулярности и возможна без проектирования ФГ на дираковские биспиноры, то есть с сохранением их матричной структуры.

### 1. Построение квазисвободных двухвременных ФГ

Обратимся к трехчастичной системе. Пусть в ней первая и вторая частицы будут скалярными дикварками с нулевыми спинами, массами  $m_1$  и  $m_2$ , электрическими зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$ . Их начальные 4-импульсы обозначим  $p_1 = (p_{10}, \vec{p}_1)$  и  $p_2 = (p_{20}, \vec{p}_2)$ . Третья частица – спинорный кварк с характеристиками  $S_3 = 1/2$ ,  $m_3$ ,  $p_3 = (p_{30}, \vec{p}_3)$ ,  $Q_3$ .

Размещение системы во внешнем электромагнитном поля приводит к трёхкомпонентности  $\bar{G}_{(0)}^{qf}$  вида:

$$\bar{G}_{(0)}^{qf} = \bar{G}_{(0)}^{[1]} + \bar{G}_{(0)}^{[2]} + \bar{G}_{(0)}^{[3]}, \quad (1)$$

где  $\bar{G}_{(0)}^{[j]}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – квазисвободные двухвременные ФГ, учитывающие факт взаимодействия поля  $A_\mu$  с  $j$ -ой частицей в так называемом импульсном приближении [5]. Слагаемые формулы (1) получаются из четырёхвременных свободных ФГ  $G_{(0)}^{[j]}$ , определяемых как вакуумные математические ожидания хронологического произведения гайзенберговских полей частиц системы, и поля  $A_\mu$  в импульсном пространстве путем интегрального приравнивания времен в начальном и конечном состоянии [3]. При этом возникает характерная для данного варианта подхода параметризация ФГ полной энергией системы  $P_0$ . Для первого и второго дикварка структура  $G_{(0)}^{[j]}$  схожа и они имеют форму

$$G_{(0)}^{[1]} = Q_1 \cdot \frac{m_3 + \hat{p}_3}{p_3^2 - m_3^2 + i0} \cdot \frac{\Gamma_{1\mu} A^\mu(\vec{q}_1)}{k_1^2 - m_1^2 + i0} \cdot \frac{1}{p_1^2 - m_1^2 + i0} \cdot \frac{1}{p_2^2 - m_2^2 + i0}, \quad (2)$$



$$G_{(0)}^{[2]} = Q_2 \cdot \frac{m_3 + \hat{p}_3}{p_3^2 - m_3^2 + i0} \cdot \frac{\Gamma_{2\mu} A^\mu(\vec{q}_2)}{k_2^2 - m_2^2 + i0} \cdot \frac{1}{p_1^2 - m_1^2 + i0} \cdot \frac{1}{p_2^2 - m_2^2 + i0}, \quad (3)$$

где  $k_j$  – конечные 4-импульсы дикварков, трёхмерные импульсы фотонов  $\vec{q}_j = \vec{k}_j - \vec{p}_j$ , вершинные функции  $\Gamma_{j\mu} = (k_j + p_j)_\mu$ . И для кварка в аналогичных обозначениях

$$G_{(0)}^{[3]} = Q_3 \cdot \frac{m_3 + \hat{k}_3}{k_3^2 - m_3^2 + i0} \cdot \hat{A}(\vec{q}_3) \cdot \frac{m_3 + \hat{p}_3}{p_3^2 - m_3^2 + i0} \cdot \frac{1}{p_1^2 - m_1^2 + i0} \cdot \frac{1}{p_2^2 - m_2^2 + i0}. \quad (4)$$

Формулы (2)–(4) приводят к следующему виду ФГ, фигурирующих в (1),

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{(0)}^{[1]} &= \frac{Q_1}{16 \omega_{1p} \omega_{2p} \omega_{3p} \omega_{1k}} A^\mu(\vec{q}_1) [(m_3 + \hat{p}_3) \times \\ &\times \left( \frac{\Gamma_\mu^{(-)Rp}}{P_0 - \omega_{1k} - \omega_{2p} - \omega_{3p} + i0} - \frac{[\Gamma_{(p)}^{(+)}]_\mu R_p}{\omega_{1p} + \omega_{1k}} - \frac{[\Gamma_{(k)}^{(+)}]_\mu}{(P_0 - \omega_{1k} - \omega_{2p} - \omega_{3p} + i0)(\omega_{1p} + \omega_{1k})} \right) + \\ &+ \left( \frac{\Gamma_\mu^{(+)} A_p}{P_0 + \omega_{1k} + \omega_{2p} + \omega_{3p} - i0} + \frac{[\Gamma_{(p)}^{(-)}]_\mu A_p}{\omega_{1p} + \omega_{1k}} + \frac{[\Gamma_{(k)}^{(-)}]_\mu}{(P_0 + \omega_{1k} + \omega_{2p} + \omega_{3p} - i0)(\omega_{1p} + \omega_{1k})} \right) \times \\ &\times (m_3 - \hat{p}'_3)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{(0)}^{[2]} &= \frac{Q_2}{16 \omega_{1p} \omega_{2p} \omega_{3p} \omega_{2k}} A^\mu(\vec{q}_2) [(m_3 + \hat{p}_3) \times \\ &\times \left( \frac{\Pi_\mu^{(-)Rp}}{P_0 - \omega_{1p} - \omega_{2k} - \omega_{3p} + i0} - \frac{[\Pi_{(p)}^{(+)}]_\mu R_p}{\omega_{2p} + \omega_{2k}} - \frac{[\Pi_{(k)}^{(+)}]_\mu}{(P_0 - \omega_{1p} - \omega_{2k} - \omega_{3p} + i0)(\omega_{2p} + \omega_{2k})} \right) + \\ &+ \left( \frac{\Pi_\mu^{(+)} A_p}{P_0 + \omega_{1p} + \omega_{2k} + \omega_{3p} - i0} + \frac{[\Pi_{(p)}^{(-)}]_\mu A_p}{\omega_{2p} + \omega_{2k}} + \frac{[\Pi_{(k)}^{(-)}]_\mu}{(P_0 + \omega_{1p} + \omega_{2k} + \omega_{3p} - i0)(\omega_{2p} + \omega_{2k})} \right) \times \\ &\times (m_3 - \hat{p}'_3)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\tilde{G}_{(0)}^{[3]} = \frac{Q_3}{16 \omega_{1p} \omega_{2p} \omega_{3p} \omega_{3k}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{(m_3 + \tilde{k}_3) \hat{A}(\vec{q}_3)(m_3 + \tilde{p}_3) R_p}{P_0 - \omega_{1p} - \omega_{2p} - \omega_{3k} + i0} + \frac{(m_3 - \tilde{k}'_3) \hat{A}(\vec{q}_3)(m_3 - \tilde{p}'_3) A_p}{P_0 + \omega_{1p} + \omega_{2p} + \omega_{3k} - i0} + \right. \\
& + \frac{(m_3 - \tilde{k}'_3) \hat{A}(\vec{q}_3)(m_3 + \tilde{p}_3)}{(\omega_{3p} + \omega_{3k})} \left( \frac{1}{P_0 + \omega_{1p} + \omega_{2p} + \omega_{3k} - i0} - R_p \right) + \\
& \left. + \frac{(m_3 + \tilde{k}_3) \hat{A}(\vec{q}_3)(m_3 - \tilde{p}'_3)}{(\omega_{3p} + \omega_{3k})} \left( A_p - \frac{1}{P_0 - \omega_{1p} - \omega_{2p} - \omega_{3k} + i0} \right) \right], \quad (7)
\end{aligned}$$

где использованы дополнительные обозначения

$$\tilde{p}_j = (\omega_{jp}, \vec{p}_j), \quad \tilde{p}'_j = (\omega_{jp}, -\vec{p}_j),$$

$$\omega_{jp} = \sqrt{m_j^2 + \vec{p}_j^2} \quad (j = 1, 2, 3)$$

и аналогичные параметры путем замены ( $p \leftrightarrow k$ ), а также

$$\begin{aligned}
R_p &= (P_0 - \omega_{1p} - \omega_{2p} - \omega_{3p} + i0)^{-1}, \\
A_p &= (P_0 + \omega_{1p} + \omega_{2p} + \omega_{3p} - i0)^{-1}; \\
\Gamma_\mu^{(\pm)} &= \{2[P_0 \pm (\omega_{2p} + \omega_{3p})], \vec{p}_1 + \vec{k}_1\}, \\
[\Gamma_{(p)}^{(\pm)}]_\mu &= (\pm 2\omega_{1p}, \vec{p}_1 + \vec{k}_1), \\
[\Gamma_{(k)}^{(\pm)}]_\mu &= (\pm 2\omega_{1k}, \vec{p}_1 + \vec{k}_1); \\
\Pi_\mu^{(\pm)} &= \{2[P_0 \pm (\omega_{1p} + \omega_{3p})], \vec{p}_2 + \vec{k}_2\}, \\
[\Pi_{(p)}^{(\pm)}]_\mu &= (\pm 2\omega_{2p}, \vec{p}_2 + \vec{k}_2), \\
[\Pi_{(k)}^{(\pm)}]_\mu &= (\pm 2\omega_{2k}, \vec{p}_2 + \vec{k}_2).
\end{aligned}$$

При обращении к системе с одним дикварком формула (1) теряет одно слагаемое, например, приобретает вид

$$\tilde{G}_{(0)}^{\text{qf}} = \tilde{G}_{(0)}^{[1]} + \tilde{G}_{(0)}^{[3]}. \quad (8)$$

ФГ (3) и (6) обращаются в ноль, а в формулах (2), (4), (5) и (7) удаляются все параметры, имеющие индекс  $j=2$ . Затем для удобства делается замена индекса 3 на 2, то есть спинорный кварк становится второй частицей.

Громоздкость квазисвободных двухвременных ФГ (1), (8) не мешает процедуре их несингулярного обращения с помощью известных программных пакетов аналитических вычислений.

В функцию Грина  $\tilde{G}_{(0)}^{\text{qf}}$  можно включить слагаемое без взаимодействия с внешним полем  $\tilde{G}_{(0)}$ . Для трёхчастичной системы  $\tilde{G}_{(0)}$  имеет вид

$$\tilde{G}_{(0)} = \frac{1}{8 \omega_{1p} \omega_{2p} \omega_{3p}} \left[ \frac{(m_3 + \vec{p}_3)}{P_0 - \omega_{1p} - \omega_{2p} - \omega_{3p} + i0} - \frac{(m_3 - \vec{p}'_3)}{P_0 + \omega_{1p} + \omega_{2p} + \omega_{3p} - i0} \right] \quad (9)$$

и просто обратную форму

$$\{\tilde{G}_{(0)}\}^{-1} = 4 \omega_{1p} \omega_{2p} \left[ P_0 \gamma^0 - \frac{\omega_{1p} + \omega_{2k} + \omega_{3p}}{\omega_{3p}} (\vec{p}_3 \vec{\gamma} + m_3) \right], \quad (10)$$

что показано в [3].

### Заключение

В работе получен явный вид квазисвободных двухвременных функций Грина 2-х и 3-частичных кварк-дикварковых систем. Данные ФГ допускают несингулярное обращение и дальнейшее использование при построении интегральных уравнений для волновых функций изучаемых систем во внешнем электромагнитном поле.

### Литература

1. Nakano, T. Evidence of the  $\Theta^+$  in the  $\gamma d \rightarrow K^+ K^- pn$  reaction / T. Nakano [et al.] // Phys. Rev. – 2009. – Vol. C79. – P. 025210.
2. Logunov, A.A. Quasioptical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.
3. Капшай, В.Н. Лекции по теории связанных систем частиц со спином 0 и 1/2 / В.Н. Капшай, Г.Ю. Тюменков / – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 2005. – 100 с.
4. Максименко, Н.В. Матрица квазисвободной двухвременной функции Грина релятивистской системы со спиновой структурой (0;1/2) / Н.В. Максименко, Г.Ю. Тюменков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2009. – № 4(55). – Ч.2. – С. 153–156.
5. Nieves, J.F. Perturbative vs Schwinger-propagator method for the calculation of amplitudes in a magnetic field / J.F. Nieves, P.B. Pal [Electronic resource]. – 2006. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/10032157>. – Date of access: 13.09.2018.

Электронное научное издание

# **ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ**

V Международная научная конференция

**Посвящается академику Б. В. Бокутю**

(Гомель, 14–16 ноября 2018 года)

Материалы

В двух частях

Часть 1

Подписано к использованию 13.12.2018.

Объём издания 10,6 Мб.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования

«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.

<http://www.gsu.by>