

УДК 535.42

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_7

EDN: AEFClV

ВЕКТОРНЫЕ ЦИРКУЛЯРНЫЕ ПАРАКСИАЛЬНЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА – ГАУССА. ПОЛЯРИЗАЦИЯ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

VECTOR CIRCULAR PARAXIAL KUMMER – GAUSS BEAMS. POLARIZATION AND POWER PROPERTIES

S.S. Girdel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для векторных циркулярных 3D световых пучков Куммера – Гаусса с однородной и неоднородной поляризациями. Сформулированы ограничения на свободные параметры, чтобы такие пучки Куммера – Гаусса переносили конечную мощность. Вычислены и графически исследуются поляризационные свойства, продольный и поперечные потоки энергии таких пучков.

Ключевые слова: параксиальные пучки, векторные циркулярные пучки, пучки Куммера – Гаусса, потоки энергии.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Векторные циркулярные параксиальные пучки Куммера – Гаусса. Поляризация и энергетические свойства / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 7–11. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_7. – EDN: AEFClV

Abstract. Analytical expressions in the closed form for vector circular 3D light of Kummer – Gauss beams from a uniform and non-uniform polarizations are offered and are investigated. Restrictions on free parameters that such of Kummer – Gauss beams transferred final power are formulated. Polarizing properties, longitudinal and crossflows of energy of such beams are calculated and are graphically investigated.

Keywords: paraxial beams, vector circular beams, Kummer – Gauss beams, streams of energy.

For citation: Girdel, S.S. Vector circular paraxial Kummer – Gauss beams. Polarization and power properties / S.S. Girdel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 7–11. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_7 (in Russian). – EDN: AEFClV

Введение

В работе [1] нами исследовались скалярные параксиальные циркулярные пучки Куммера – Гаусса, а в [2], [3] – векторные параксиальные циркулярные пучки Куммера с однородной и неоднородной по сечению пучка поляризацией (энергетические и поляризационные свойства).

В настоящей работе обсуждаются энергетические и поляризационные свойства векторных параксиальных циркулярных пучков Куммера – Гаусса с однородной и неоднородной поляризациями. Получены явные выражения, описывающие векторные циркулярные световые пучки Куммера – Гаусса с однородной и неоднородной поляризациями. Исследованы поляризационные свойства, продольные и поперечные потоки энергии таких световых пучков.

1 Векторные циркулярные световые пучки Куммера – Гаусса с однородной поляризацией.

Для монохроматических волн вида

$$f(\mathbf{r}, t) = f \exp(ikz - i\omega t)$$

скалярное параболическое уравнение в цилиндрической системе координат имеет решение [1] (см. также [4])

$$f = \text{Exp} \left[\frac{I R^2}{Q} \right] \left(\frac{P}{P_0} \right)^v \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^{-v-m-1} \times$$

$$\times M(-v, m+1; U) R^m \exp(im\varphi) = f_1 f_2(\varphi).$$

Аргументы функций Куммера M равны $U = iR^2(1/P - 1/Q)$. Комплексные параметры пучка $Q = Z - iQ_0''$ и $P = Z - iP_0''$. ешение f обладает цилиндрической (циркулярной) симметрией. Здесь, как и ранее [2], [3], используются все величины в безразмерной форме. Безразмерные переменные

$$X = x/x_0, Y = y/x_0, Z = z/z_0, R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Оператор набла в безразмерных циркулярных (цилиндрических) координатах имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_R \partial_R + (1/R) \mathbf{e}_\varphi \partial_\varphi + \mathbf{e}_Z \partial_Z = \nabla_\perp + \mathbf{e}_Z \partial_Z.$$

Следуя разработанному нами формализму [1]–[3], электрическое поле векторных параксиальных циркулярных пучков Куммера – Гаусса с однородной поляризацией запишем, как

$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\perp f + \theta \nabla \mathbf{e}_\perp f \cdot \mathbf{e}_z$. Комплексный постоянный нормированный ($|\mathbf{e}_\perp|^2 = 1$) вектор поляризации \mathbf{e}_\perp однозначно определяет поляризационные характеристики пучка $\mathbf{e}_\perp = (\eta_p \mathbf{e}_p + \eta_\phi \mathbf{e}_\phi)$. Введем параметр поляризации $\eta_c = \eta_p / \eta_\phi = \text{tg}(\psi'_c + i\psi''_c)$.

Индекс c указывает, что вычисления проводятся в циркулярном (circular) базисе. Тогда азимут главной оси эллипса поляризации световой волны относительно оси OZ равен $(\varphi + \psi'_c)$, а ее эллиптичность γ будет $\gamma = \text{th} \psi''_c$. Здесь $\varphi = \text{arctg}(y/x)$. Так как $\mathbf{e}_\perp = \text{const}$, то поляризация является однородной по всему сечению пучка.

Для расчета энергетических характеристик пучка Куммера – Гаусса с однородной поляризацией целесообразно ввести энергетический вектор $\mathbf{b} = \frac{\nabla f}{f}$. Обозначения $(b_R, b_\phi, b_z, b_x, b_y)$ –

компоненты вектора \mathbf{b} в циркулярном и декартовом базисах соответственно. Теперь усредненные по времени плотности энергии w , продольного S_z и поперечного \mathbf{S}_\perp потоков энергии электромагнитного поля для параксиальных векторных пучков с однородной поляризацией можно представить как [2]:

$$w = \frac{\varepsilon |f|^2}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w; \quad \mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s,$$

$$\mathbf{S}_o = \theta S_z \cdot \left(\mathbf{e}_R \text{Im}(b_R) + \frac{m}{R} \mathbf{e}_\phi \right),$$

$$\mathbf{S}_s = -\theta S_z \cdot \text{th} 2\psi''_c \text{Re}(b_R) \mathbf{e}_\phi.$$

Здесь безразмерный параметр параксиальности пучка $\theta = 1/K \cong 10^{-4}$. Нормированное волновое число $K = kx_0$. В выражении для \mathbf{S}_\perp выделены явно, следуя формализму [5]–[7], плотность орбитального \mathbf{S}_o и спинового \mathbf{S}_s потоков энергии. Видим, что для азимутальной зависимости $f_2(\varphi) = \exp(im\varphi)$ спиновый поток энергии – строго азимутальный.

Вычисляя компоненты вектора \mathbf{b} , получаем

$$b_R = \frac{m}{R} + \frac{2iR}{Q} - \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q} \right) \frac{2ivR M(1-v, m+2; U)}{(m+1)M(-v, m+1; U)};$$

$b_\phi = \frac{im}{R}$. Здесь использованы известные [8] преобразования Куммера

$$\partial_u M(a, b, u) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, u).$$

Вблизи оси пучка поперечный поток энергии \mathbf{S}_\perp – азимутальный. При возрастании R радиальная компонента становится преобладающей.

Чтобы векторные пучки Куммера – Гаусса с однородной поляризацией переносили конечную мощность, необходимо, чтобы для функции f

выполнялись условия её квадратичной интегрируемости (КИ). В [1] были установлены условия КИ для скалярных пучков Куммера – Гаусса. Эти ограничения на свободные параметры пучка, как показывает анализ, справедливы также и для векторных пучков Куммера – Гаусса с однородной поляризацией.

2 Векторные циркулярные световые пучки Куммера – Гаусса с неоднородной поляризацией (ТМ-моды)

Векторные световые пучки с неоднородной поляризацией [9] исследовались слабо. Чтобы перейти к неоднородно поляризованным ТМ пучкам Куммера – Гаусса, достаточно выбрать поперечную часть \mathbf{E}_\perp векторной амплитуды электрического поля светового пучка в виде

$$\mathbf{E}_\perp = \nabla_\perp f = \mathbf{b}_\perp f = \left(b_R \mathbf{e}_R + \frac{im}{R} \mathbf{e}_\phi \right) f.$$

Тогда из уравнения непрерывности компонента $E_z = 4\theta b_z f$, где

$$b_z \equiv \frac{\partial_z f}{f} = -\frac{iR^2 + Q}{Q^2} + \frac{v}{P} - \frac{v+m}{Q} + \left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \frac{ivR^2 M(1-v, m+2; U)}{(m+1)M(-v, m+1; U)}.$$

В декартовом базисе векторы электрического и магнитного полей векторных ТМ пучков Куммера – Гаусса равны:

$$E_x = b_x f; \quad E_y = b_y f; \quad E_z = 4\theta b_z f;$$

$$H_x = -nb_y f; \quad H_y = nb_x f; \quad H_z = 0.$$

Анализ условий КИ для векторных пучков Куммера – Гаусса с неоднородной поляризацией (ТМ-мод) показал, что эти условия отличаются от условий КИ для пучков Куммера – Гаусса с однородной поляризацией. Результаты этого исследования представлены в таблице 2.1.

Поляризация векторных циркулярных ТМ-мод Куммера – Гаусса определяется комплексным параметром

$$\eta = E_\phi / E_R = \text{tg}(\psi' + i\psi'') = \frac{im}{Rb_R},$$

азимут главной оси эллипса поляризации светового поля относительно радиального направления \mathbf{e}_R равен ψ' , а отношение полуосей эллипса γ будет $\gamma = \text{th} \psi''$.

На рисунке 2.1 графически изображены эллипсы поляризации циркулярных ТМ-мод Куммера – Гаусса.

Как видно из рисунка 2.1, соответствующего набору свободных параметров строки 4.4 (а) и строки 2 (б) таблицы 2.1, характер поляризации зависит от радиальных расстояний R от оси пучка и не зависит от азимутального угла φ . Вблизи оси пучка поляризация круговая, затем, с увеличением расстояния R , периодически постепенно

изменяется от круговой до линейной. После этого возникают эллипсы с противоположным направлением вращения и т. д. Главные оси эллипсов образуют спирали, которые постепенно раскручиваются. Постепенно, по мере увеличения R

эллипсы поляризации вырождаются в линии, а поляризация стремится к линейной, радиальной. Это видно также из формулы для векторной амплитуды E_{\perp} .

Таблица 2.1 – Условия КИ для векторных циркулярных ТМ световых пучков Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом m и комплексным параметром $v = v' + iv''$

№	Ограничения на параметры Q_0''	Ограничения на параметры P_0''	Ограничения на индекс $v = v' + iv''$ ($m \geq 0; \mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$)	Предел $ \psi $ при $R \rightarrow \infty$	Выполнение условий КИ
1	$Q_0'' > 0$	$P_0'' > 0$	нет	$ \psi \rightarrow 0$	да
2	$Q_0'' > 0$	$P_0'' < 0$	$v = \mathbb{N} - 1$	$ \psi \rightarrow 0$	да
3	$Q_0'' < 0$	$P_0'' > 0$	$v = -m - N$	$ \psi \rightarrow 0$	да
4.1	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$v' < -\frac{3+m}{2}$	$ \psi \rightarrow \infty$	нет
4.2	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$v' = -\frac{3+m}{2}$	$ \psi \rightarrow const$	нет
4.3	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$v' \in \left[-\frac{3+m}{2}, -\frac{m+2}{2}\right]$	$ \psi \rightarrow 0$	нет
4.4	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$v' > -\frac{m+2}{2}$	$ \psi \rightarrow 0$	да
5.1	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$v' > \frac{1-m}{2}$	$ \psi \rightarrow \infty$	нет
5.2	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$v' = \frac{1-m}{2}$	$ \psi \rightarrow const$	нет
5.3	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$v' \in \left[-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}\right)$	$ \psi \rightarrow 0$	нет
5.4	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$v' < -\frac{m}{2}$	$ \psi \rightarrow 0$	да

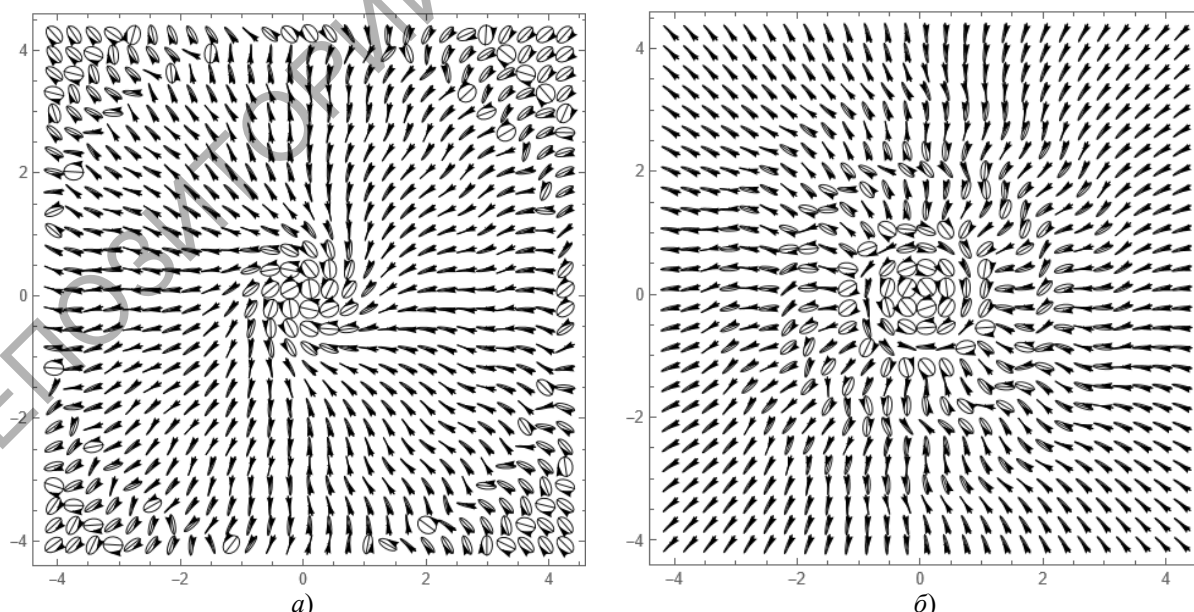


Рисунок 2.1 – Эллипсы поляризации векторных ТМ-мод Куммера – Гаусса.

Параметры пучка: а) $v = -0,7; m = 1; Q_0 = 0,38; P_0 \rightarrow \infty; Z = 1,2$; б) $v' = -1,5; v'' = 0; m = 1; Q_0 = 1; Z = 1$

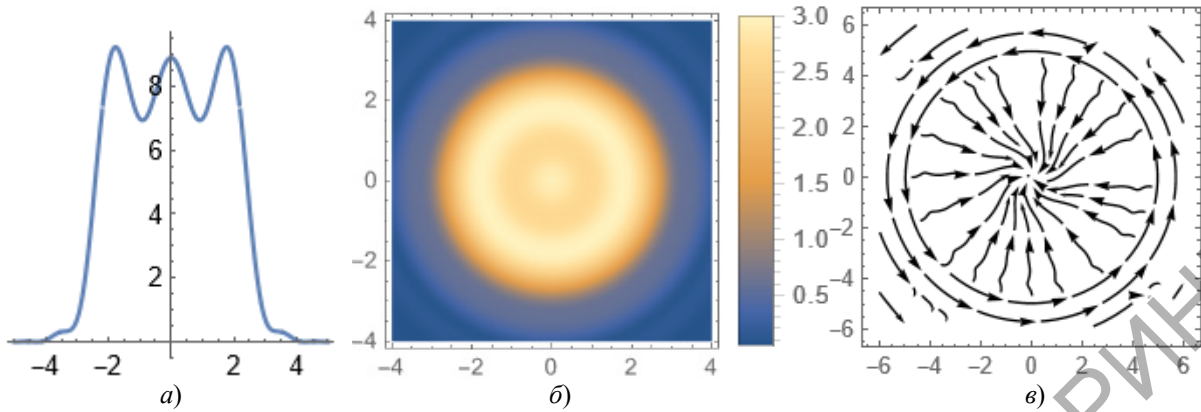


Рисунок 2.2 – Интенсивность и поперечный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\varphi))$: а) интенсивность в продольном сечении пучка; б) интенсивность в поперечном сечении пучка; в) линии поперечного потока энергии. Используемые параметры: $\nu = -0,7$; $m = 1$; $Q_0 = 0,38$; $P_0 \rightarrow \infty$; $Z = 1,2$

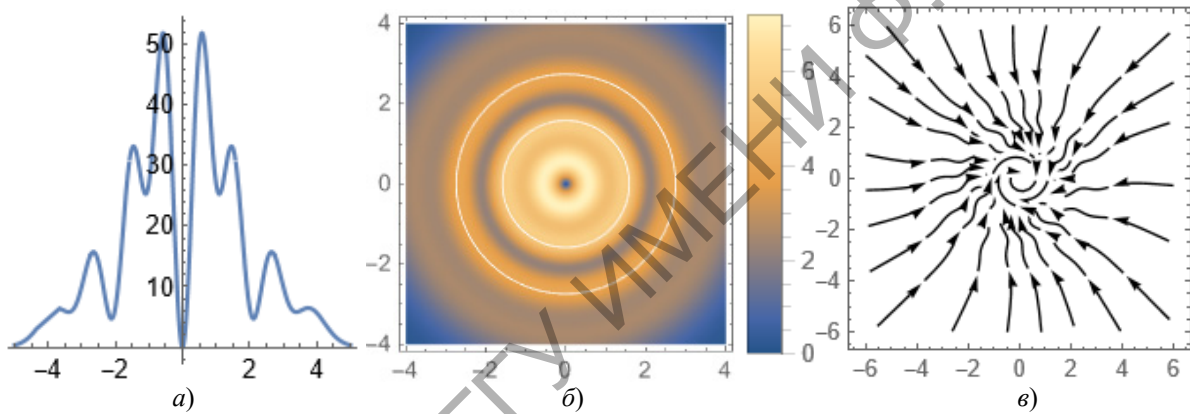


Рисунок 2.3 – Интенсивность и поперечный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\varphi))$: а) интенсивность в продольном сечении XOZ ; б) интенсивность в поперечном сечении XOY ; в) линии поперечного потока энергии. Используемые параметры: $\nu = 2$; $m = 2$; $Q_0 = 2$; $P_0 = -2$; $Z = 1$

Обсудим теперь энергетические свойства векторных ТМ пучков Куммера – Гаусса. Плотности энергии w и продольного S_z потоков энергии светового поля для векторных ТМ пучков Куммера – Гаусса можно представить, как [8]:

$$w = \frac{\epsilon}{8\pi} \left(|b_R|^2 + \frac{m^2}{R^2} \right) |f_1|^2; \quad S_z = \frac{c}{n} w.$$

Плотность поперечного потока энергии для ТМ-мод можно записать в виде [9]

$$\mathbf{S}_\perp = -\frac{c\epsilon}{8\pi n} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_\perp^* \cdot \mathbf{E}_z).$$

Вычисляя, находим, что в циркулярном базисе

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\epsilon}{2\pi n} \theta |f_1|^2 \left(\operatorname{Re}(b_R b_z) \cdot \mathbf{e}_R + \frac{m}{R} \operatorname{Im}(b_z) \cdot \mathbf{e}_\varphi \right).$$

В декартовой системе координат плотности энергии w и поперечного \mathbf{S}_\perp потоков энергии представляются в симметричных формах:

$$w = \frac{\epsilon}{8\pi} \left(|b_x|^2 + |b_y|^2 \right) |f_1|^2;$$

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\epsilon}{2\pi n} \theta |f_1|^2 \left(\operatorname{Re}(b_x^* b_z) \cdot \mathbf{e}_x + \operatorname{Im}(b_y^* b_z) \cdot \mathbf{e}_y \right).$$

На рисунках 2.2 и 2.3, соответствующих набору свободных параметров строки 4.4 и строки 2 таблицы 2.1, представлены некоторые характерные результаты графического моделирования интенсивности и поперечных потоков энергии для векторных ТМ пучков Куммера – Гаусса. Картины интенсивности в поперечном сечении исследуемых световых пучков представляют собой кольца. Обычно видно одно или несколько колец. Остальные кольца не видны из-за их слабой интенсивности. Продольные потоки энергии пропорциональны интенсивности пучка и значительно меньше поперечных потоков. Вблизи оси пучка азимутальные компоненты значительно превосходят радиальные. По мере возрастания

радиального расстояния R от оси пучка, в конечном итоге, радиальные потоки становятся преобладающими. Поперечные потоки энергии представляют собой постепенно раскручивающиеся спирали. Азимутальные и радиальные компоненты поперечного потока энергии осциллируют с возрастанием радиального расстояния. Таким образом, линии полных потоков энергии ТМ пучков Куммера – Гаусса представляют собой сложные спиралевидные линии вокруг оси пучка OZ .

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие практически не изучавшиеся типы пучков – векторные параксиальные циркулярные световые пучки Куммера – Гаусса с однородной и неоднородной поляризациями, переносящие конечную мощность и поэтому физически реализуемые. Они характеризуются пятью свободными параметрами: четырьмя вещественными – (K , Q_0'' , P_0'' , m) и одним комплексным параметром $\nu = \nu' + i\nu''$.

Сформулированы условия физической реализуемости однородно и неоднородно поляризованных циркулярных векторных пучков Куммера – Гаусса с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Вычислены явные выражения для плотностей продольного и поперечного потоков энергии для однородно и неоднородно поляризованных пучков Куммера – Гаусса. Выполнено графическое моделирование их поперечных потоков энергии и интенсивности. Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим картинкам.

Хотя иллюстративное графическое моделирование выполнено для целочисленных значений m и вещественных значений свободного параметра ν , найденные условия КИ пригодны также для непрерывных значений m и комплексных значений ν .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиргель, С.С. Циркулярные 3D световые пучки Куммера-Гаусса с непрерывным угловым спектром / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 16–20.
2. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (54). – С. 16–20.
3. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (55). – С. 1–5.
4. Bandres, M.A. Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.
5. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.
6. Bekshaev, A.Y. Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Optics Communications. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.
7. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.
8. Справочник по специальным функциям; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.
9. Bandres, M.A. Vector Helmholtz – Gauss and vector Laplace – Gauss beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2057.

Поступила в редакцию 31.03.2023.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор