

СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТОВ В *l*-АРНЫХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POWERS IN *l*-ARY GROUPS OF SPECIAL FORM. II

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение степеней элементов в полиадических группах специального вида.

Ключевые слова: полиадическая операция, *n*-арная группа, степень элемента.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Степени элементов в *l*-арных группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 38–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_38. – EDN: EQNIHG

Abstract. The study on the powers in polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: polyadic operation, *n*-ary group, power.

For citation: Gal'mak, A.M. Powers in *l*-ary groups of special form. II / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 38–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_38 (in Russian). – EDN: EQNIHG

Введение

Данная статья, посвящённая изучению степеней элементов в полиадических группах специального вида, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работы [1] даются без указания на эту работу. Например, ссылка на теорему 2.1 означает, что имеется в виду теорема 2.1 из раздела 2 в [1].

Всю необходимую информацию из теории полиадических групп можно найти в [2]–[6].

3 Главная теорема

Вначале покажем, что, если в теореме 2.2 подстановка σ оставляет неподвижным некоторый символ, то компонента элемента $\mathbf{a}^{[v]}$ ($v < 0$), индекс которой совпадает с этим символом, имеет вид, указанный в следующем предложении.

Предложение 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – *n*-арная группа ($n \geq 3$), подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$ и оставляет неподвижным символ t , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент *l*-арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда *t*-я компонента b_m элемента $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$ имеет вид

$$b_m = \eta(\underbrace{a_m \dots a_m}_{(n-3)(-v(l-1)-1)} \underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{-v(l-1)-1}).$$

Доказательство. Так как подстановка σ оставляет неподвижным символ t , то

$$a_{\sigma^r(m)} = a_m, \quad \overline{a_{\sigma^r(m)}} = \overline{a_m},$$

$$\underbrace{a_{\sigma^r(m)} \dots a_{\sigma^r(m)}}_{n-3} = \underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{n-3}$$

для любого $r = 0, 1, \dots, l-2$. Далее, учитывая, перестановочность в *n*-арной группе $\langle A, \eta \rangle$ любого её элемента a со своим косым элементом \overline{a} , находим u_m и b_m из формулировки теоремы 2.2:

$$u_m = \underbrace{a_m \dots a_m}_{n-3} \underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{n-3} =$$

$$= \eta(\underbrace{a_m \dots a_m}_{(n-3)(l-2)} \underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{l-2}),$$

$$b_m = \eta(\underbrace{u_m \dots u_m}_{-v} \underbrace{a_m \dots a_m}_{(n-3)(-v-1)} \underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{-v-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{a_m \dots a_m}_{-v(n-3)(l-2)} \underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{-v(l-2)} \underbrace{a_m \dots a_m}_{(n-3)(-v-1)} \underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{-v-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{a_m \dots a_m}_{(n-3)(-v(l-1)-1)} \underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{-v(l-1)-1}). \quad \square$$

Следствие 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка σ из S_k оставляет неподвижным символ t , $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s+1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда *t*-я компонента b_m элемента $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$ имеет вид

$$b_m = \eta(\underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{-2vs-1}).$$

В следующей теореме, в отличие от теоремы 2.1, более детально описаны компоненты полиадических степеней элементов l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, порядок подстановки σ из S_k делит натуральное d , $l = td + 1$ для некоторого натурального t , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k, \quad (3.1)$$

a_j^{-1} и α_j^{-1} – любые обратные последовательности в $\langle A, \eta \rangle$ для элемента a_j и последовательности α_j соответственно. Тогда:

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0; \\ \mathbf{a}^{[v]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{iv}), \dots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{iv})), \quad (3.2)$$

если $v > 0$;

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1} \alpha_1^{-1} \dots a_1^{-1} \alpha_1^{-1}}_{-iv-1}), \dots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1} \alpha_k^{-1} \dots a_k^{-1} \alpha_k^{-1}}_{-iv-1})), \quad (3.3)$$

если $v < -1$ или $v = -1, t \neq 1$.

Доказательство. Так как порядок подстановки σ делит d , то из условия $l = td + 1$ следует, что порядок подстановки σ делит $l - 1$. Следовательно, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.1, согласно которой $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

По условию подстановка σ^d является тождественной и $l = td + 1$. Поэтому

$$a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} = \\ = \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}}_{t-1} a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}$$

или, учитывая равенство (3.1),

$$a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} = \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j. \quad (3.4)$$

Для $v = 0$ доказывать нечего.

Если $v > 0$, то положим

$$\mathbf{a}^{[v]} = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{v(l-1)+1}) = (b_1, \dots, b_k).$$

Из этого равенства, принимая во внимание определение l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1} , получим

$$b_j = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \\ a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}) = \\ = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \\ a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j) = \\ = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{v})$$

то есть

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{v}).$$

Из полученного равенства и равенства (3.4) вытекает

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j \dots \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j) = \\ = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{t} \dots \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{t}) = \\ = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{iv}),$$

то есть

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{iv})$$

для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. Следовательно, верно (3.2)

Пусть теперь $v < -1$ или $v = -1, t \neq 1$ и положим

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-iv-1}), j \in \{1, \dots, k\}, \quad (3.5)$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{-v(l-1)}(b_1, \dots, b_k)) = (c_1, \dots, c_k). \quad (3.6)$$

Из последнего равенства, принимая во внимание определение l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1} , получим

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{-v-1} \\ a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} b_{\sigma^{l-1}(j)}) = \\ = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{-v-1} \\ a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} b_j),$$

то есть

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{-v-1} \\ a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)} b_j).$$

Полученное равенство, учитывая равенство (3.4), можно переписать следующим образом

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j \dots \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j \\ \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j \alpha_j b_j),$$

откуда следует

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{t(-v-1)+t-1} \alpha_j b_j) = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{-iv-1} \alpha_j b_j),$$

то есть

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{-iv-1} \alpha_j b_j).$$

Подставляя в это равенство вместо b_j правую часть из (3.5) и используя нейтральность соответствующих последовательностей, получим

$$c_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{-iv-1} \alpha_j \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1} a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-iv-1})) = a_j,$$

то есть $c_j = a_j$ для любого $j \in \{1, \dots, k\}$, откуда и из (3.6) вытекает

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{-v(l-1)}(b_1, \dots, b_k)) = \mathbf{a}.$$

Следовательно, $(b_1, \dots, b_k) = \mathbf{a}^{[v]}$ и верно (3.3). \square

Замечание 3.1. Если в теореме 3.1 $d = l - 1$, то $t = 1$ и получается теорема 2.1, являющаяся таким образом следствием теоремы 3.1.

Замечание 3.2. Пустую последовательность можно рассматривать как нейтральную последовательность. Поэтому будем считать $\eta(a) = a$ для любого элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$.

Замечание 3.3. Так как при $t = 1, v = -1$ последовательность

$$\underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-iv-1}$$

пустая, то правая часть в (3.3) не имеет смысла. С другой стороны, если $t = 1$, то $d = l - 1 = s(n - 1)$. Это означает, что в качестве обратной последовательности в $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности α_j длины $d - 1 = s(n - 1) - 1$ можно использовать одноэлементную обратную последовательность α_j^{-1} . Поэтому, если в теореме 3.1 $t = 1, v = -1$, то, как и в теореме 2.1,

$$\mathbf{a}^{[-1]} = (\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_k^{-1}).$$

Если принять во внимание замечание 3.2, то последнее равенство можно считать содержащимся в равенстве (3.3), которое, таким образом, верно для $v < 0$. Будем иметь это в виду при формулировке следствий из теоремы 3.1 и других результатов, полученных с её помощью.

Замечание 3.4. Покажем, что число элементов под знаком n -арной операции в каждой компоненте правой части (3.3) равно $r(n - 1) + 1$ для некоторого натурального r , то есть равенство (3.3) корректно.

Так как

$$s(n - 1) = l - 1 = td = (t - 1)d + 1 + d - 1,$$

то обратный элемент α_j^{-1} в $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности α_j длины $d - 1$ эквивалентен в смысле Поста последовательности длины $(t - 1)d + 1$. Кроме того, любая обратная последовательность α_j^{-1} для элемента a_j эквивалентна в $\langle A, \eta \rangle$ последовательности длины $n - 2$. В этом случае число элементов под знаком n -арной операции в правой части (3.3) равно

$$\begin{aligned} & (t - 1)d + 1 + (n - 2 + (t - 1)d + 1)(-vt - 1) = \\ & = td - d + 1 + (n - 2 + td - d + 1)(-vt - 1) = \\ & = l - 1 - d + 1 + (n - 2 + l - 1 - d + 1)(-vt - 1) = \\ & = l - d + (n - 2 + l - d)(-vt - 1) = \\ & = l - d - vt(n - 2) - vtl + vtd - (n - 2) - l + d = \\ & = -vt(n - 2) - vtl + vtd - (n - 2) = \\ & = (-vt(n - 2) - vtl) + v(l - 1) - (n - 1) + 1 = \\ & = -vt(l + n - 2) + (vs(n - 1) - (n - 1)) + 1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = -vt(s(n - 1) + 1 + n - 2) + (vs - 1)(n - 1) + 1 = \\ & = -vt(s(n - 1) + n - 1) + (vs - 1)(n - 1) + 1 = \\ & = -vt(s + 1)(n - 1) + (vs - 1)(n - 1) + 1 = \\ & = (-vt(s + 1) + vs - 1)(n - 1) + 1 = \\ & = (-v(ts + t - s) - 1)(n - 1) + 1 = \\ & = r(n - 1) + 1, \end{aligned}$$

где $r = -v(ts + t - s) - 1$.

Замечание 3.5. Если в теореме 3.1 $n \geq 3$, то в качестве обратной последовательности α_j^{-1} в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ для её элемента a_j можно взять последовательность

$$a_j^{-1} = \bar{a}_j \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}.$$

Кроме того, в силу леммы 2.1, обратная последовательность α_j^{-1} в $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности α_j из теоремы 3.1 имеет вид

$$\alpha_j^{-1} = \underbrace{a_{\sigma^{d-1}(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}}_{n-3} a_{\sigma^{d-1}(j)} \dots \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} a_{\sigma(j)}. \quad (3.7)$$

Соответственно теорема 3.1 примет следующий вид.

Теорема 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), порядок подстановки σ из S_k делит натуральное $d, l = td + 1$ для некоторого натурального $t, \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

α_j^{-1} – последовательность (3.7) или любая другая обратная последовательность в $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности α_j . Тогда:

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{iv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{iv})),$$

если $v > 0$;

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} = & (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{\bar{a}_1 a_1 \dots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1} \dots \alpha_1^{-1} \underbrace{\bar{a}_1 a_1 \dots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1}), \dots \\ & \dots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{\bar{a}_k a_k \dots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1} \dots \alpha_k^{-1} \underbrace{\bar{a}_k a_k \dots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1})), \end{aligned}$$

если $v < 0$.

Замечание 3.6. В теоремах 3.1 и 3.2 в качестве подстановки σ можно взять подстановку порядка d . Если же в качестве подстановки σ в этих теоремах взять подстановку порядка $d = l - 1$, то $t = 1$ в формулах (3.2) и (3.3) из теоремы 3.1 и в соответствующих формулах из теоремы 3.2.

Ввиду равенства $\mathbf{a}^{[-1]} = \bar{\mathbf{a}}$, из теорем 3.1 и 3.2 при $v = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [7, теоремы 2.1 и 2.2].

Замечание 3.7. Если $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа, σ – тождественная подстановка,

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$, то согласно определению полиадической степени для $v > 0$ имеем

$$\mathbf{a}^{[v]} = \eta(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{v(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{(a_1 \dots a_k) \dots (a_1 \dots a_k)}_{v(l-1)+1}) = (\eta(\underbrace{a_1 \dots a_1}_{v(l-1)+1}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \dots a_k}_{v(l-1)+1})). \quad (3.8)$$

Для $v < 0$ имеем

$$\eta(\mathbf{a}^{[v]} \mathbf{a} \dots \mathbf{a}) = \mathbf{a},$$

то есть

$$\eta(\mathbf{a}^{[v]} \underbrace{(a_1 \dots a_k) \dots (a_1 \dots a_k)}_{-v(l-1)}) = (a_1, \dots, a_k).$$

Если $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$, то из последнего равенства следует

$$(\eta(\underbrace{b_1 a_1 \dots a_1}_{-v(l-1)}), \dots, \eta(\underbrace{b_k a_k \dots a_k}_{-v(l-1)})) = (a_1, \dots, a_k),$$

то есть

$$\eta(\underbrace{b_j a_j \dots a_j}_{-v(l-1)}) = a_j, j = 1, \dots, k, \quad (3.9)$$

откуда

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j a_j^{-1} \dots a_j^{-1}}_{-v(l-1)}) = \eta(\underbrace{a_j^{-1} \dots a_j^{-1}}_{-v(l-1)-1}). \quad (3.10)$$

Если теперь в теореме 3.1 $d = 1$, то есть σ – тождественная подстановка, то $t = l - 1$, а последовательность (3.1) – пустая. В этом случае равенства (3.2) и (3.3) принимают соответственно вид (3.8) и (3.10). Следовательно, случай тождественной подстановки содержится в теореме 3.1 при $d = 1$. Это же верно и для теоремы 3.2.

Для тождественной подстановки имеет место предложение, устанавливающее связь между степенями элементов в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и степенями компонент этих элементов в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

Предложение 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, σ – тождественная подстановка из S_k , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда для любого целого v верно равенство $\mathbf{a}^{[v]} = (a_1^{[sv]}, \dots, a_k^{[sv]})$.

Доказательство. Ясно, что для $v = 0$ равенство из формулировки теоремы верно.

Положим $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$. Если $v > 0$, то, согласно (3.8),

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \dots a_j}_{v(l-1)+1}).$$

А так как $l - 1 = s(n - 1)$, то

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \dots a_j}_{vs(n-1)+1}) = a_j^{[sv]}, v > 0.$$

Если $v < 0$, то верно (3.9) и, кроме того,

$$\eta(\underbrace{b_j a_j \dots a_j}_{-v(l-1)}) = \eta(\underbrace{b_j a_j \dots a_j}_{-vs(n-1)}), v < 0.$$

Следовательно, $b_j = a_j^{[sv]}$. Таким образом, формула из условия предложения верна для любого целого v . \square

Тернарный случай. Если в теореме 3.1 положить $n = 3$, то в качестве обратной последовательности α_j^{-1} в тернарной группе $\langle A, \eta \rangle$ для её элемента a_j можно взять его косой элемент $\overline{a_j}$.

В результате получим следствие для $v < 0$.

Следствие 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, порядок подстановки σ из S_k делит натуральное d , $2s = td$ для некоторого натурального t , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, $v < 0$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

α_j^{-1} – любая обратная последовательность в $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности α_j . Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1} \overline{a_1} \alpha_1^{-1} \dots \overline{a_1} \alpha_1^{-1}}_{-tv-1}), \dots, \eta(\underbrace{\alpha_k^{-1} \overline{a_k} \alpha_k^{-1} \dots \overline{a_k} \alpha_k^{-1}}_{-tv-1})).$$

Замечание 3.8. Если d – чётное, то последовательность α_j в следствии 3.2 эквивалентна в смысле Поста элементу $\eta(a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)})$. Поэтому можно считать

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}),$$

соответственно

$$\alpha_j^{-1} = \overline{\alpha_j} = \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)})}.$$

Если $d = 2$, то α_j – элемент тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, и в силу замечания 3.2, считаем $\alpha_j = \eta(a_j)$.

Имея в виду замечание 3.8, следствие 3.2 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, порядок подстановки σ из S_k делит чётное d , $2s = td$ для некоторого натурального t , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, $v < 0$,

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}), j = 1, \dots, k.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{\alpha_1 \overline{a_1} \alpha_1 \dots \overline{a_1} \alpha_1}_{-tv-1}), \dots, \eta(\underbrace{\alpha_k \overline{a_k} \alpha_k \dots \overline{a_k} \alpha_k}_{-tv-1})).$$

Если в следствии 3.2 положить $d = 2$, то $t = s$, $\alpha_j = a_{\sigma(j)}$, $\alpha_j^{-1} = a_{\sigma(j)}^{-1} = \overline{a_{\sigma(j)}}$, $j = 1, \dots, k$ и получим

Следствие 3.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, σ – подстановка из S_k порядка 2, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, $v < 0$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_{\sigma(1)} \overline{a_1} a_{\sigma(1)} \dots \overline{a_1} a_{\sigma(1)}}_{-sv-1}), \dots, \eta(\underbrace{a_{\sigma(k)} \overline{a_k} a_{\sigma(k)} \dots \overline{a_k} a_{\sigma(k)}}_{-sv-1})).$$

Из следствия 3.4 при $v = -1$ вытекает результат о косых элементах из [7, следствие 2.2].

Бинарный случай. Сформулируем бинарное ($n = 2$) следствие из теоремы 3.1 только для случая $v < 0$, так как для $v \geq 0$ степень $\mathbf{a}^{[v]}$ определяется одними и теми же формулами и в теореме 3.1 и в следствии.

Следствие 3.5. Пусть A – группа, порядок подстановки σ из S_k делит натуральное d , $s = td$ для некоторого натурального t , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, []_{s+1, \sigma, k} \rangle$, $v < 0$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

a_j^{-1} и α_j^{-1} – обратные элементы в группе A для элементов a_j и α_j соответственно. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1} \alpha_1^{-1} \dots a_1^{-1} \alpha_1^{-1}}_{-tv-1}, \dots, \alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1} \alpha_k^{-1} \dots a_k^{-1} \alpha_k^{-1}}_{-tv-1}).$$

Если в следствии 3.5 положить $d = 2$, то получим

Следствие 3.6. Пусть A – группа, σ – подстановка из S_k порядка 2, $s = 2t$ для некоторого натурального t , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, []_{s+1, \sigma, k} \rangle$, $v < 0$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (a_{\sigma(1)}^{-1} \underbrace{a_1^{-1} a_{\sigma(1)}^{-1} \dots a_1^{-1} a_{\sigma(1)}^{-1}}_{-tv-1}, \dots, a_{\sigma(k)}^{-1} \underbrace{a_k^{-1} a_{\sigma(k)}^{-1} \dots a_k^{-1} a_{\sigma(k)}^{-1}}_{-tv-1}).$$

В следствиях 3.2, 3.3 и 3.5 в качестве подстановки σ можно взять подстановку порядка $n - 1$.

4 Порядок подстановки делит $n - 1$

Если в теоремах 3.1 и 3.2 $d = n - 1$, то $l - 1 = t(n - 1)$, откуда и из $l - 1 = s(n - 1)$ следует $t = s$. Поэтому теоремы 3.1 и 3.2 позволяют сформулировать следующие две теоремы.

Теорема 4.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, порядок подстановки σ из S_k делит $n - 1$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\beta_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{n-2}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

a_j^{-1} и β_j^{-1} – любые обратные последовательности в $\langle A, \eta \rangle$ для элемента a_j и последовательности β_j соответственно. Тогда:

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0; \\ \mathbf{a}^{[v]} = (\eta(a_1 \underbrace{\beta_1 a_1 \dots \beta_1 a_1}_{sv}), \dots, \eta(a_k \underbrace{\beta_k a_k \dots \beta_k a_k}_{sv})),$$

если $v > 0$;

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots a_1^{-1} \beta_1^{-1}}_{-sv-1}), \dots, \eta(\beta_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1} \beta_k^{-1} \dots a_k^{-1} \beta_k^{-1}}_{-sv-1})),$$

если $v < 0$.

Теорема 4.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), порядок подстановки σ из S_k делит $n - 1$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, $\beta_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{n-2}(j)}$, $j = 1, \dots, k$,

β_j^{-1} – любая обратная последовательность в $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности β_j , в частности

$$\beta_j^{-1} = \underbrace{a_{\sigma^{n-2}(j)} \dots a_{\sigma^{n-2}(j)}}_{n-3} \underbrace{a_{\sigma^{n-2}(j)} \dots a_{\sigma^{n-2}(j)}}_{n-3} \dots \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3}.$$

Тогда:

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0; \\ \mathbf{a}^{[v]} = (\eta(a_1 \underbrace{\beta_1 a_1 \dots \beta_1 a_1}_{sv}), \dots, \eta(a_k \underbrace{\beta_k a_k \dots \beta_k a_k}_{sv})),$$

если $v > 0$;

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots a_1^{-1} \beta_1^{-1}}_{n-3} \beta_1^{-1} \dots \underbrace{a_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots a_1^{-1} \beta_1^{-1}}_{n-3} \beta_1^{-1}), \dots, \eta(\beta_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1} \beta_k^{-1} \dots a_k^{-1} \beta_k^{-1}}_{n-3} \beta_k^{-1} \dots \underbrace{a_k^{-1} \beta_k^{-1} \dots a_k^{-1} \beta_k^{-1}}_{n-3} \beta_k^{-1})),$$

если $v < 0$.

Если как и в теоремах 4.1 и 4.2 порядок d подстановки σ делит $n - 1$, то есть $n = rd + 1$ для некоторого натурального r , то d делит $l - 1$, так как из $l = s(n - 1) + 1$ следует $l = td + 1$, где $t = sr$. Поэтому, если в теоремах 3.1 и 3.2 в качестве подстановки σ взять подстановку порядка d , то можно сформулировать ещё две теоремы.

Теорема 4.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, σ – подстановка из S_k порядка d , $n = rd + 1$ для некоторого натурального r , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

a_j^{-1} и α_j^{-1} – любые обратные последовательности в $\langle A, \eta \rangle$ для элемента a_j и последовательности α_j соответственно. Тогда:

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0; \\ \mathbf{a}^{[v]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{srv}), \dots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{srv})),$$

если $v > 0$;

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1} \alpha_1^{-1} \dots a_1^{-1} \alpha_1^{-1}}_{-srv-1}), \dots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1} \alpha_k^{-1} \dots a_k^{-1} \alpha_k^{-1}}_{-srv-1})),$$

если $v < 0$.

Теорема 4.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), σ – подстановка из S_k порядка d , $n = rd + 1$ для некоторого натурального r , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

α_j^{-1} – последовательность (3.7) или любая другая обратная последовательность в $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности α_j . Тогда:

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots a_1 \alpha_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots a_k \alpha_k}_{sv})),$$

если $v > 0$;

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1} \overline{a_1} a_1 \dots a_1 \alpha_1^{-1}}_{n-3} \dots \underbrace{\overline{a_1} a_1 \dots a_1 \alpha_1^{-1}}_{n-3}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\underbrace{\alpha_k^{-1} \overline{a_k} a_k \dots a_k \alpha_k^{-1}}_{n-3} \dots \underbrace{\overline{a_k} a_k \dots a_k \alpha_k^{-1}}_{n-3})),$$

если $v < 0$.

Из теорем 4.1 и 4.2 при $v = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [7, теоремы 2.3 и 2.4].

Замечание 4.1. Если в теореме 4.2 положить $r = 1, d = 2$, то $n = 3$. В этом случае из теоремы 4.2 при $v < 0$ вытекает следствие 3.4.

Замечание 4.2. Можно показать, что теоремы 4.3 и 4.4 извлекаются соответственно из теорем 4.1 и 4.2 и наоборот. Так как последовательности β_j и α_j из теорем 4.1 и 4.3 связаны равенством

$$\beta_j = \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{r-1}$$

то для $v > 0$ имеем

$$\eta(a_j \underbrace{\beta_j a_j \dots \beta_j a_j}_{sv}) =$$

$$= \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{r-1} \alpha_j a_j \dots \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{r-1} \alpha_j a_j) =$$

$$= \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_r \dots \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_r) =$$

$$= \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{sv}).$$

Аналогично для $v < 0$ доказываем равенство

$$\eta(\beta_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1} \beta_j^{-1} \dots a_j^{-1} \beta_j^{-1}}_{-sv-1}) =$$

$$= \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-sv-1}).$$

Таким образом, теоремы 4.1 и 4.3 могут быть извлечены одна из другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Степени элементов в l -арных группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 47–51.
2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
4. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
5. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
6. Щучкин, Н.А. Введение в теорию n -групп / Н.А. Щучкин. – Волгоград: Принт, 2019. – 236 с.
7. Гальмак, А.М. О косых элементах в полиадических группах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43). – С. 64–68.

Поступила в редакцию 15.08.2023.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор