МАТЕМАТИКА

УДК 519.872
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_48
EDN: JQKVQE

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ G-СЕТИ С МНОГОЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С КОНТРОЛЬНЫМИ И КАРАНТИННЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ

Д.Я. Копать

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF G-NETWORK WITH MANY-LINES SYSTEMS WITH CONTROL AND QUARANTINE QUEUES

D.Y. Kopats

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Предложен метод нахождения средних характеристик и их дисперсий для G-сети с системами с контрольными и карантинными очередями в случае большого, но ограниченного числа функционирующих в ней заявок. Данная сеть является математической моделью информационно-телекоммуникационных систем и сетей, состоящей из многопроцессорных устройств с установленным на каждом из них антивирусным программным обеспечением в случае большой нагрузки сети.

Ключевые слова: G-*сеть*, *контрольная и карантинные очереди*, *асимптотический анализ*, *антивирусное программное обеспечение.*

Для цитирования: *Копать*, *Д.Я.* Асимптотический анализ G-сети с многолинейными системами с контрольными и карантинными очередями / Д.Я. Копать // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 48–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_48. – EDN: JQKVQE

Abstract. A method for finding average characteristics and their variances for a G-network in systems with control and quarantine queues in case of a big but limited number of customers in network is proposed. This network is a mathematical model of informational systems and networks, which consists of multiprocessor devices with antivirus software installed on each of them in case of heavy load in the network.

Keywords: *G-network*, *control and quarantine queues*, *asymptotic analysis*, *antivirus software.*

For citation: *Kopats*, *D.Y.* Asymptotic analysis of G-network with many-lines systems with control and quarantine queues / D.Y. Kopats // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 48–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_48 (in Russian). – EDN: JQKVQE

Введение

Несмотря на тот факт, что модель функционирования информационно-телекоммуникационной сети (ИТС) с возможностью попадания на каждое устройство которой компьютерных вирусов исследовалась в работе [1], первая стохастическая модель функционирования ИТС, с установленным антивирусным программным обеспечением (АПО), рассматривалась в работе [2] спустя около 20 лет после опубликования работы [1]. В работах [3]–[4] состоялось объединение этих сетей с возможностью нахождения заявки в карантине в каждой системе сети массового обслуживания (СМО) без выделения для этих целей отдельной СМО. В работе [3] данная сеть исследовалась методом многомерных производящих функций, а в работе [4] методом последовательных приближений, совмещенного с методом рядов. В работе [5] данная модель обобщилась на случай, когда вирус, уничтожив один пользовательский запрос, мог переходить в другие системы до тех пор, пока не был обнаружен АПО. Но в данных работах не учитывался тот факт, что большинство современных устройств являются многопроцессорными и в них может параллельно происходить обработка нескольких пользовательских запросов. В данной работе будет происходить обобщение моделей, предложенных в работе [5] на случай наличия в ИТС многопроцессорных устройств.

1 Описание сети

Рассмотрим G-сеть [1], состоящую их n СМО, в каждой из которых функционируют $m_i+2,\ i=\overline{1,n}$ линий обслуживания (ЛО). Поступающие в каждую СМО потоки положительных (неопасный запрос) и отрицательных заявок (вредоносный запрос) являются простейшими с интенсивностями соответственно $\lambda_{0i}^{+},\lambda_{0i}^{-},\ i=\overline{1,n}.$ Для предотвращения заражения ИТС поступившая в i-ю СМО заявка первоначально становится в контрольную очередь, которая физически представляет собой место RAM, отведенное для антивирусного ПО, где проверяется на

© *Копать Д.Я.*, 2023

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

стандартность, т. е. на наличие вируса в течении времени, имеющего показательное распределение с параметром $\mu_i^{(v)}, i=\overline{1,n}.$ Количество ЛО в контрольной очереди равно единице. Пусть вероятность успешной проверки на стандартность положительной заявки равна p_i^+ и тогда она поступает в очередь на обслуживание в этой СМО, а с противоположной вероятностью $1-p_i^+$ будет признана отрицательной и отправится в карантин на лечение. Вероятность успешного опознания отрицательной заявки в контрольной очереди СМО S_i равна p_i^-. Тогда отрицательная заявка и переходит в карантинную очередь на лечение, а с вероятностью $1-p_i^-$ может она ошибочно быть признана положительной из-за технических сложностей, таких как не обновления антивирусных БД. Тогда она поступит в очередь на обработку, где она немедленно уничтожает 1 положительную заявку в непустой системе, после чего с вероятностью n_{i0} покидает сеть или с вероятностью n_{ij} переходит в контрольную очередь j-й СМО, $\sum_{j=0}^{n} n_{ij}=1, i=\overline{1,n}.$ В пустой системе отрицательная заявка не производит никакого воздействия. Пусть длительности обслуживания положительных заявок в СМО S_i одной ЛО имеют экспоненциальную ф.р. с параметром μ_i, $i=\overline{1,n}$, по завершении которого с вероятностью p_{ij}^+ переходит в контрольную очередь СМО S_j как положительная заявка, с вероятностью p_{ij}^- – как отрицательная, зараженный во время обслуживания резидентными вирусами и с вероятностью $p_{i0}=1-\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij}^+ + p_{ij}^-\right)$ покидает сеть, $i,j=\overline{1,n}.$ В карантине, которая в ИТС является папкой файлов, помещенных на карантин, заявки, признанные нестандартными, становятся в очередь на лечение. Предположим, что длительность лечения заявки в i-м узле имеет экспоненциальную ф.р. с параметром $\mu_i^{(c)}, i=\overline{1,n}$. Если лечение успешное, то заявка с вероятностью $p_i^{(s)}, i=\overline{1,n}$ переходит в очередь на обработку в i-й СМО, в противном случае с вероятностью $1-p_i^{(s)}$ зараженная заявка оказывается вирусом и удаляется, т. е. покидает сеть. В этом описании карантина мы предполагаем, что вирус не может обмануть его при его лечении.

Состояние сети описывается вектором:

$$\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2,...,\vec{k}_n,\vec{l}_1,\vec{l}_2,...,\vec{l}_n;t\right), \quad (1.1)$$

где $\left(\vec{k}_i,\vec{l}_i,t\right)=\left(k_i^{(p)};k_i^{(s)};l_i^{(n)};l_i^{(c)};t\right)$, $k_i^{(p)};l_i^{(n)}$ – соответственно число положительных и отрицательных заявок, находящихся в контрольной очереди; $k_i^{(s)}$ – количество положительных заявок на обслуживании; $l_i^{(c)}$ – количество заявок на карантине. Пусть заявки выбираются на проверку на стандартность из очереди случайным образом. Тогда вероятность того, что будет проверена на стандартность положительная заявка в режиме насыщения равна

$$q_i^+=\left(\lambda_{0i}^+ + \sum_{j=1}^{n}\mu_j p_{ji}^+\right)\left(\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^{n}\mu_j\left(p_{ji}^+ + p_{ji}^-\right)\right)^{-1}.$$

В [6] данный коэффициент представлен в стационарном режиме.

Пусть вектор $\tilde{I}_\alpha$ – вектор размерности $2n$, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером α, которая равна 1. Возможны следующие переходы нашего случайного марковского процесса в состояние $\left(\vec{k},\vec{l},t+\Delta t\right)$ за время Δt:

1) из состояния $\left(\vec{k}-\tilde{I}_{2i-1},\vec{l},t\right)$ с вероятностью $\lambda_{0i}^+ u\left(k_i^{(p)}\right)\Delta t+o(\Delta t)$ в контрольную очередь i-й СМО извне за время Δt поступит положительная заявка $i=\overline{1,n}$;

2) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l}-\tilde{I}_{2i-1},t\right)$ в контрольную очередь i-й СМО за время Δt извне поступит отрицательная заявка с вероятностью $\lambda_{0i}^- u\left(l_i^{(n)}\right)\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$;

3) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i},\vec{l},t\right)$ с вероятностью $\mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u\left(k_i^{(s)}\right)\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ положительная заявка после проверки на стандартность в i-й СМО будет признана таковой и перейдет в очередь для обслуживания;

4) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1},\vec{l}-\tilde{I}_{2i},\vec{l},t\right)$, $i=\overline{1,n}$ с вероятностью $\mu_i^{(v)} q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(l_i^{(c)}\right)\Delta t+o(\Delta t)$ положительная заявка после проверки на стандартность в i-й СМО будет признана отрицательной и перейдет в карантин для лечения;

5) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i},t\right)$ с вероятностью $\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)p_i^- u\left(l_i^{(c)}\right)\Delta t+o(\Delta t), i=\overline{1,n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-й СМО будет признана отрицательной и перейдет в карантин для лечения;

6) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1},t\right)$ с вероятностью $\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(k_i^{(s)}\right)n_{i0}\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-той СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, уйдя из сети;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

7) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1},t\right)$, $i=\overline{1,n}$ $\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\left(1-u\left(k_i^{(s)}\right)\right)n_{i0}\Delta t+o\left(\Delta t\right)$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание, но застанет систему пустой и уйдет из сети;

8) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1},t\right)$ с вероятностью

$$\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(k_i^{(s)}\right)n_{ij}u\left(l_j^{(n)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),$$

$i=\overline{1,n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, перейдя в контрольную очередь j-й СМО;

9) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1},t\right)$, $i=\overline{1,n}$ $\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\left(1-u\left(k_i^{(s)}\right)\right)n_{ij}u\left(l_j^{(n)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание, но застанет систему пустой и перейдет в контрольную очередь j-ой СМО;

10) из состояния $\left(\vec{k}-\tilde{I}_{2i},\vec{l}+I_{2i},t\right)$ с вероятностью $\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u\left(k_i^{(s)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$ карантинному узлу i-ой СМО удастся вылечить зараженную заявку и она отправляется в очередь на обслуживание в i-ую СМО;

11) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i},t\right)$ с вероятностью $\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$ карантинному узлу не удастся вылечить зараженную заявку и он покидает сеть, не принеся ей вреда;

12) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i}-\tilde{I}_{2j-1},\vec{l},t\right)$ с вероятностью $\mu_i\min\left(k_i+1,m_i\right)p_{ij}^+u\left(k_j^{(p)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i,j=\overline{1,n}$ время обслуживания заявки в i-й СМО закончилось и он направится в контрольную очередь j-ой СМО снова как положительная заявка;

13) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l}-\tilde{I}_{2j-1},t\right)$ с вероятностью $\mu_i\min\left(k_i+1,m_i\right)p_{ij}^-u\left(l_j^{(n)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i,j=\overline{1,n}$ время обслуживания заявки в i-ой СМО закончилось и она направляется в контрольную очередь j-ой СМО как отрицательная заявка;

14) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l},t\right)$ с вероятностью $\mu_i\min\left(k_i+1,m_i\right)p_{i0}\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$; время обслуживания файла в i-ой СМО закончилось, она и уходит из сети;

15) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$ с вероятностью

$$\begin{aligned}
1-\sum_{i=1}^{n}\Big[&\lambda_{0i}^+u\left(k_i^{(p)}\right)+\lambda_{0i}^-u\left(l_i^{(n)}\right)+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}+\\
&+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\sum_{j=1}^{n}n_{ij}u\left(l_j^{(n)}\right)+\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+u\left(k_i^{(s)}\right)+\\
&+\mu_i^{(v)}\left(q_i^+\left(1-p_i^+\right)+\left(1-q_i^+\right)p_i^-\right)u\left(l_i^{(c)}\right)+\\
&+\mu_i^{(c)}\left(p_i^{(s)}u\left(k_i^{(s)}\right)+\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)+\mu_i\min\left(k_i+1,m_i\right)\times\\
&\times\left(1-\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^+\left(1-u\left(k_j^{(p)}\right)\right)+p_{ij}^-\left(1-u\left(l_j^{(n)}\right)\right)\right)\Big]\Delta t+o\left(\Delta t\right).
\end{aligned}$$

С помощью формулы полной вероятности, в которой, перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, можно показать, что нестационарные вероятности состояний удовлетворяют следующей системе РДУ:

$$\begin{aligned}
\frac{dP\left(\vec{k},\vec{l},t\right)}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}\Big\{&\lambda_{0i}^+u\left(k_i^{(p)}\right)+\lambda_{0i}^-u\left(l_i^{(n)}\right)+\\
&+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\times\\
&\times\sum_{j=1}^{n}n_{ij}u\left(l_j^{(n)}\right)+\mu_i^{(v)}\left(q_i^+\left(1-p_i^+\right)+\left(1-q_i^+\right)p_i^-\right)u\left(l_i^{(c)}\right)+\\
&+\mu_i^{(c)}\left(p_i^{(s)}u\left(k_i^{(s)}\right)+\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)+\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+u\left(k_i^{(s)}\right)+\\
&+\mu_i\left(1-\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^+\left(1-u\left(k_j^{(p)}\right)\right)+p_{ij}^-\left(1-u\left(l_j^{(n)}\right)\right)\right)\Big\}P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\Big[\lambda_{0i}^+u\left(k_i^{(p)}\right)P\left(\vec{k}-\tilde{I}_{2i-1};\vec{l};t\right)+\\
&+\lambda_{0i}^-u\left(l_i^{(n)}\right)P\left(\vec{k};\vec{l}-\tilde{I}_{2i-1};t\right)+\\
&+\left(\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+u\left(k_i^{(s)}\right)\right)P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i};\vec{l};t\right)+\\
&+\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u\left(k_i^{(s)}\right)P\left(\vec{k}-\tilde{I}_{2i};\vec{l}+\tilde{I}_{2i};t\right)+\\
&+\mu_i^{(v)}q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(l_i^{(c)}\right)P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1};\ \vec{l}-\tilde{I}_{2i};t\right)+\\
&+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(l_i^{(c)}\right)P\left(\vec{k};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i};t\right)+\\
&+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}u\left(k_i^{(s)}\right)P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1};t\right)\right)+\\
&+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}\left(1-u\left(k_i^{(s)}\right)\right)P\left(\vec{k};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1};t\right)\right)+\\
&+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(k_i^{(s)}\right)n_{ij}\times\right.\\
&\left.\times P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1};t\right)\right)+\\
&+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\left(1-u\left(k_i^{(s)}\right)\right)n_{ij}\times\right.\\
&\left.\times P\left(\vec{k};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1};t\right)\right)\Big\}+\\
&+\left(\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)P\left(\vec{k};\vec{l}+\tilde{I}_{2i};t\right)\Big]+\\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i\min\left(k_i+1,m_i\right)\Big[p_{i0}P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l};t\right)+
\end{aligned}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ

$$+p_{ij}^{+}u\left(k_j^{(p)}\right)P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i}-\tilde{I}_{2j-1};\vec{l};t\right)+$$
$$+p_{ij}^{-}u\left(l_j^{(n)}\right)P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l}-\tilde{I}_{2j-1};t\right)\Big]. \qquad (1.2)$$

2 Уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка

Решение РДУ Колмогорова (1.2) будем искать в случае, когда число линий обслуживания, общее количество положительных заявок в контрольной, карантинных и обслуживающих очередях не превосходит величины $K>>1$. Пусть $x_i^{(p)}=k_i^{(p)}K^{-1}$, $x_i^{(s)}=k_i^{(s)}K^{-1}$, $z_i^{(n)}=l_i^{(n)}K^{-1}$, $z_i^{(c)}=l_i^{(c)}K^{-1}$. Введём в рассмотрение вектор относительных переменных $\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)=\left(x_1^{(p)},x_1^{(s)},...,x_n^{(p)},x_n^{(s)},z_1^{(n)},z_1^{(c)},...,z_n^{(n)},z_n^{(c)},t\right)$. В этом случае возможные значения этого вектора при фиксированном t принадлежат ограниченному замкнутому множеству

$$G=\Big\{\left(\vec{x},\vec{z}^{-}\right):\left(x_1^{(p)},x_1^{(s)},...,x_n^{(p)},\right.$$
$$\left.x_n^{(s)},z_1^{(n)},z_1^{(c)},...,z_n^{(n)},z_n^{(c)}\right),\ x_i^{(p)},x_i^{(s)},z_i^{(n)},z_i^{(c)}\ge 0,$$
$$i=\overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n}x_i^{(p)}\le 1,\sum_{i=1}^{n}x_i^{(s)}\le 1,\sum_{i=1}^{n}z_i^{(n)}\le 1,\sum_{i=1}^{n}z_i^{(c)}\le 1\Big\},$$

в котором они располагаются в узлах $4n$–мерной решетки на расстоянии $\varepsilon=K^{-1}$ друг от друга. При увеличении K «плотность заполнения» множества G возможными компонентами вектора (x, $\vec{z}^{-}$, t) увеличивается, и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение с плотностью вероятностей $p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)$, причем $K^{4n}P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)\xrightarrow[K\to\infty]{}p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)$. Поэтому можно воспользоваться аппроксимацией функции $P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$, применив соотношение $K^{4n}P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=K^{4n}P\left(\vec{y}K,\vec{x}K,\vec{z}^{-}K,t\right)=p\left(\vec{y},\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)$, $\left(\vec{x},\vec{z},t\right)\in G$. Обозначим $\tilde{e}_i=\varepsilon\tilde{I}_i,\ i=\overline{1,2n}$. Полагая, что $p\left(\vec{y},\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)$ является однородными функциями первого порядка и дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, исходя из (1.2) получаем уравнения для плотности распределения вероятностей состояний

$$\frac{\partial p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\Big\{\lambda_{0i}^{+}u\left(x_i^{(p)}\right)+\lambda_{0i}^{-}u\left(l_i^{(n)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{n}n_{ij}u\left(z_j^{(n)}\right)+\mu_i^{(v)}\left(q_i^{+}\left(1-p_i^{+}\right)+\left(1-q_i^{+}\right)p_i^{-}\right)u\left(l_i^{(c)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(c)}\left(p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)+\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}q_i^{+}p_i^{+}u\left(x_i^{(s)}\right)+$$
$$+\mu_i\left(1-\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^{+}\left(1-u\left(x_j^{(p)}\right)\right)+p_{ij}^{-}\left(1-u\left(z_j^{(n)}\right)\right)\right)\Big\}\times$$
$$\times p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[\lambda_{0i}^{+}u\left(x_i^{(p)}\right)p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i-1};\vec{z}^{-};t\right)+$$
$$+\lambda_{0i}^{-}u\left(z_i^{(n)}\right)p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}-\tilde{e}_{2i-1};t\right)+$$
$$+\left(\mu_i^{(v)}q_i^{+}p_i^{+}u\left(x_i^{(s)}\right)\right)p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-};t\right)+$$
$$+\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i};t\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}q_i^{+}\left(1-p_i^{+}\right)u\left(z_i^{(c)}\right)p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1};\vec{z}^{-}-\tilde{e}_{2i};t\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)p_i^{-}u\left(z_i^{(c)}\right)p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};t\right)+$$
$$+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}u\left(x_i^{(s)}\right)p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1};t\right)\right)+$$
$$+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}\left(1-u\left(x_i^{(s)}\right)\right)p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1};t\right)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\Big(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}\times$$
$$\times p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right)\Big)+$$
$$+\Big(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)\left(1-u\left(x_i^{(s)}\right)\right)n_{ij}\times$$
$$\times p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right)\Big)\Big\}+$$
$$+\left(\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i};t\right)\Big]+$$
$$+K\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)\Big[p_{i0}p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-};t\right)+$$
$$+p_{ij}^{+}u\left(x_j^{(p)}\right)p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i}-\tilde{e}_{2j-1};\vec{z}^{-};t\right)+$$
$$+p_{ij}^{-}p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}-\tilde{e}_{2j-1};t\right)\Big]. \qquad (2.1)$$

Полагая, что $p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)$ дифференцируема по t и дважды кусочно-непрерывно дифференцируема по x_i, z_i, $i=\overline{1,4n}$, разложим функции

$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i}-\tilde{e}_{2j-1};\vec{z}^{-};t\right),$$
$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}-\tilde{e}_{2j-1};t\right),\ p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i};t\right),$$
$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-};t\right),\ p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right),$$
$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right),$$
$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1};t\right),\ p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1};t\right),$$
$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-};t\right),\ p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i};t\right),$$
$$p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};t\right),\ \ p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1};\vec{z}^{-}-\tilde{e}_{2i};t\right)$$
$$p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i-1};\vec{z}^{-};t\right),\quad p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}-\tilde{e}_{2i-1};t\right)$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)$, используя члены до второго порядка включительно:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i}-\tilde{e}_{2j-1};\vec{z}^{-};t\right)=\\
&=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2j-1}}\right)+\\
&+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\left(\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^{2}}-2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}\partial x_{2j-1}}+\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2j-1}^{2}}\right)+\\
&+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}-\tilde{e}_{2j-1};t\right)=\\
&=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+\\
&+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\left(\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^{2}}-2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2j-1}}+\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}^{2}}\right)+\\
&+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\\
&+\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^{2}}+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\\
&+\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}}+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}^{2}}+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\\
&+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+\\
&+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\left(\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}^{2}}-2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}\partial z_{2j-1}}+\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}^{2}}\right)+\\
&+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right)=\\
&=\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+\\
&+p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\left(\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}^{2}}-2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}\partial z_{2j-1}}+\right.\\
&+\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}^{2}}+\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^{2}}+\\
&\left.+2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}\partial x_{2i}}-2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2j-1}}\right)+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1};t\right)=\\
&=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}\right)+\\
&+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\left(\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}^{2}}+\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}^{2}}+2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)+\\
&+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\\
&+\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}^{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\\
&+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}}\right)+\\
&+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\left(\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}^{2}}+\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}^{2}}-2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}\partial z_{2i-1}}\right)+\\
&+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1};\vec{z}^{-}-\tilde{e}_{2i};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\\
&+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}}\right)+\\
&+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\left(\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}^{2}}+\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}^{2}}-2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)+\\
&+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\\
&+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}\right)+\\
&+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\left(\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^{2}}+\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}^{2}}-2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)+\\
&+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i};\vec{z}^{-}+\tilde{e}_{2i};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)+\\
&+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}\right)+\\
&+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\left(\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^{2}}+\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}^{2}}-2\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2i}}\right)+\\
&+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i-1};\vec{z}^{-};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)-\\
&-\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}^{2}}+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\left(\vec{x};\vec{z}^{-}-\tilde{e}_{2i-1};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)-\\
&-\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^{2}}{2}\frac{\partial^{2} p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}^{2}}+\mathrm{o}\left(\varepsilon^{2}\right).
\end{aligned}
$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Учитывая данные соотношения, уравнение (2.1) представимо в виде:

$$\frac{\partial p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)}{\partial t}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\lambda_{0i}^{+}u\left(x_i^{(p)}\right)\left(-\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}^2}\right)+$$

$$+\lambda_{0i}^{-}u\left(l_i^{(n)}\right)\left(-\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}q_i^{+}p_i^{+}u\left(x_i^{(s)}\right)\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}\partial x_{2i}}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}q_i^{+}\left(1-p_i^{+}\right)u\left(z_i^{(c)}\right)\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)p_i^{-}u\left(z_i^{(c)}\right)\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}\partial z_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}u\left(x_i^{(s)}\right)\times$$

$$\times\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}+2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2i-1}}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}\left(1-u\left(x_i^{(s)}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}\right)\Bigg]+$$

$$+\sum_{i,\,j=1}^{n}\Bigg[\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}\times$$

$$\times\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+\right.$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}\partial z_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}+2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}\partial x_{2i}}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2j-1}}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)\left(1-u\left(x_i^{(s)}\right)\right)n_{ij}\times$$

$$\times\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}\partial x_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\left(\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}\right)+$$

$$+\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)p_{i0}\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}\right)+$$

$$+\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)\times$$

$$\times\sum_{i,\,j=1}^{n}\Bigg[p_{ij}^{+}u\left(x_j^{(p)}\right)\left(\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2j-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}\partial x_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2j-1}^2}\right)\right)+$$

$$+p_{ij}^{-}\left(\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}\right)\right)\Bigg]\Bigg].$$

***Теорема* 2.1.** *В асимптотическом случае при достаточно больших K плотность распределения $p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)$ вектора относительных переменных $\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)=\left(x_1^{(p)},...,x_n^{(p)},\ x_1^{(s)},...,x_n^{(s)},\ z_1^{(n)},...,z_n^{(n)},z_1^{(c)},...,z_n^{(c)},t\right)$ удовлетворяет с точностью до $O\left(\varepsilon^2\right)$, где $\varepsilon=K^{-1}$, уравнению Колмогорова – Фоккера – Планка*

$$\frac{\partial p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)}{\partial t}=-\sum_{i=0}^{2n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)\right)-$$

$$-\sum_{i=0}^{2n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(A_i^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=0}^{2n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(B_{ij}^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial x_j}\left(B_{ij}^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)\right)+$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=0}^{2n}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\left(B_{ij}^{(3)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)\right), \qquad (2.2)$$

где

$$A_i^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=\lambda_{0i}^+\varepsilon u\left(x_i^{(p)}\right)-$$
$$-\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+ p_i^+ u\left(x_i^{(s)}\right)-\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(z_i^{(c)}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\mu_j \min\left(x_j,l_j\right)p_{ji}^+ u\left(x_i^{(p)}\right),\ i=2k-1,\ k=\overline{1,n},$$
$$A_i^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+ p_i^+ u\left(x_i^{(s)}\right)+\mu_i^{(c)}\varepsilon p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)-$$
$$-\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}\varepsilon u\left(x_i^{(s)}\right)-\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)p_{i0}-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\Big[\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}-$$
$$-\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)\left(p_{ij}^+u\left(x_j^{(p)}\right)+p_{ij}^-\right)\Big],\ i=2k,\ k=\overline{1,n}.$$
$$A_i^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=\lambda_{0i}^-\varepsilon u\left(l_i^{(n)}\right)-\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(z_i^{(c)}\right)-$$
$$-\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}u\left(x_i^{(s)}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big[-\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}+$$
$$+\mu_j^{(v)}\varepsilon\left(1-q_j^+\right)\left(1-p_j^-\right)n_{ji}+\mu_j\min\left(x_j,l_j\right)p_{ji}^-\ \Big],$$
$$i=2k-1,\ k=\overline{1,n},$$
$$A_i^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=\mu_i^{(v)}\varepsilon\Big(q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(z_i^{(c)}\right)+$$
$$+\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(z_i^{(c)}\right)\Big)-\mu_i^{(c)}\varepsilon p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)-$$
$$-\left(\mu_i^{(c)}\varepsilon\left(1-p_i^{(s)}\right)\right),\ i=2k,\ k=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=-n^{-1}\Big(\lambda_{0i}^+\varepsilon u\left(x_i^{(p)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+p_i^+u\left(x_i^{(s)}\right)+\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(z_i^{(c)}\right)\Big)-$$
$$-\mu_j\min\left(x_j,l_j\right)p_{ji}^+u\left(x_i^{(p)}\right),\ i=j=2k-1,$$
$$k=\overline{1,n},\ B_{ij}^{(l)}\left(\vec{y},\vec{x},\vec{z}\right)=0,\ i\neq j,\ l=\overline{1,3}.$$
$$B_{ij}^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}\right)=$$
$$=n^{-1}\Big(-\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+p_i^+u\left(x_i^{(s)}\right)-\mu_i^{(c)}\varepsilon p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}+$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}\varepsilon u\left(x_i^{(s)}\right)+\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)p_{i0}+$$
$$+\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)\left(p_{ij}^+u\left(x_j^{(p)}\right)+p_{ij}^-\right),\ i=j=2k,\ k=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=-n^{-1}\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+u\left(x_i^{(s)}\right)-\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)p_{ij}^+,$$
$$i=2k,\ j=2l+1,\ k,l=\overline{1,n},$$
$$B_{ii}^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=n^{-1}\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\left(1-u\left(x_i^{(s)}\right)\right)n_{ii},$$
$$i,j=2k-1,\ k=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=n^{-1}\mu_i^{(v)}q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(z_i^{(c)}\right),$$
$$i=2k,\ j=2l-1,\ k,l=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}+$$
$$+\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)p_{ij}^++n^{-1}\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}u\left(x_i^{(s)}\right),$$
$$i=2k-1,\ j=2l,\ k,l=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=n^{-1}\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right),$$
$$i=2k,\ j=2l,\ k,l=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(3)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=$$
$$=n^{-1}\Big(-\lambda_{0i}^-\varepsilon u\left(l_i^{(n)}\right)+\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(z_i^{(c)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}u\left(x_i^{(s)}\right)\Big)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}-$$
$$-\mu_j^{(v)}\varepsilon\left(1-q_j^+\right)\left(1-p_j^-\right)n_{ji}-\mu_j\min\left(x_j,l_j\right)p_{ji}^-,$$
$$i=2k-1,\ k=\overline{1,n},$$
$$B_{ij}^{(3)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=n^{-1}\Big(\mu_i^{(v)}\varepsilon\Big(q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(z_i^{(c)}\right)+$$
$$+\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(z_i^{(c)}\right)\Big)-\mu_i^{(c)}\varepsilon p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)\Big),$$
$$B_{ij}^{(3)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=-n^{-1}\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(z_i^{(c)}\right),$$
$$i=2k,\ j=2l-1,\ k,l=\overline{1,n}. \qquad (2.3)$$

Пусть

$$N_i^{(p)}(t)=M\left\{k_i^{(p)}(t)\right\},\ L_i^{(c)}(t)=M\left\{l_i^{(c)}(t)\right\},$$
$$N_i^{(s)}(t)=M\left\{k_i^{(s)}(t)\right\},\quad L_i^{(n)}(t)=M\left\{l_i^{(n)}(t)\right\}$$

и введем средние относительные характеристики

$$n_i^{(p)}(t)=N_i^{(p)}(t)K^{-1},\quad Z_i^{(c)}(t)=L_i^{(c)}(t)K^{-1},$$
$$n_i^{(s)}(t)=N_i^{(s)}(t)K^{-1},\quad Z_i^{(n)}(t)=L_i^{(n)}(t)K^{-1}.$$

Составим вектора из данных характеристик

$$\vec{n}(t)=\left(n_1^{(p)}(t),n_1^{(s)}(t),\ldots,n_n^{(p)}(t),n_n^{(s)}(t)\right),$$
$$\vec{Z}(t)=\left(z_1^{(n)}(t),z_1^{(c)}(t),\ldots,z_n^{(n)}(t),z_n^{(c)}(t)\right).$$

В [6] показано, что средние относительные числа положительных заявок в контрольной и обслуживающих очередях, а также средние относительные числа отрицательных заявок в контрольной и карантинной очередях находятся из дифференциальных уравнений

$$\frac{dn_i^{(p)}(t)}{dt}=A_i^{(1)}\left(\vec{n},\vec{Z}\right),\ i=2k-1,\ k=\overline{1,n};$$
$$\frac{dn_i^{(s)}(t)}{dt}=A_i^{(1)}\left(\vec{n},\vec{Z}\right),\ i=2k,\ k=\overline{1,n};$$
$$\frac{dZ_i^{(n)}(t)}{dt}=A_i^{(2)}\left(\vec{n},\vec{Z}\right),\ i=2k-1,\ k=\overline{1,n};$$
$$\frac{dZ_i^{(c)}(t)}{dt}=A_i^{(2)}\left(\vec{n},\vec{Z}\right),\ i=2k,\ k=\overline{1,n}. \qquad (2.4)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

При функционировании сети в режиме насыщения, т. е.

$$\forall t\ k_i^{(p)} > 0, k_i^{(s)} > 0,\ \ l_i^{(n)} > 0, l_i^{(c)} > 0,\ i = \overline{1, n}$$

решение системы (2.4) имеет вид:

$$N_i^{(p)}(t) = \left(\lambda_{0i}^{+} - \mu_i^{(v)} q_i^{+} + \sum_{j=1}^{n} \mu_j m_j p_{ji}^{+}\right) t + N_i^{(p)}(0);$$

$$N_i^{(s)}(t) = \Big(\mu_i^{(v)} q_i^{+} p_i^{+} + \mu_i^{(c)} p_i^{(s)} -$$

$$-\mu_i^{(v)}\left(1 - q_i^{+}\right)\left(1 - p_i^{-}\right) - \mu_i m_i\Big) t + N_i^{(s)}(0);$$

$$L_i^{(n)}(t) = \Bigg(\lambda_{0i}^{-} - \mu_i^{(v)}\left(1 - q_i^{+}\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j^{(v)}\left(1 - q_j^{+}\right)\left(1 - p_j^{-}\right) n_{ji} + \mu_j\, \mathrm{m}_j\, p_{ji}^{-}\right]\Bigg) t + L_i^{(n)}(0);$$

$$L_i^{(c)}(t) = \left(\mu_i^{(v)}\left(q_i^{+}\left(1 - p_i^{+}\right) + \left(1 - q_i^{+}\right) p_i^{-}\right) - \mu_i^{(c)}\right) t +$$

$$+ L_i^{(c)}(0).$$

В статье [7] показаны методы нахождения дисперсии числа заявок в данной сети.

Заключение

В статье выведено уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка для G-сети с системами с контрольными и карантинными очередями в случае большого количества находящихся в системах сети запросов. Данная сеть является стохастической моделью компьютерной сети с установленным на каждом компьютере сети антивирусного программного обеспечения. С его помощью можно находить любые характеристики для данной сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe*, *E*. Product form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // Journal of Applied Probability. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.

2. *Летунович*, *Ю.Е*. Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом / Ю.Е. Летунович, О.В. Якубович // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 41. – С. 32–38.

3. *Kosarava*, *K.U.* Application of a queuing network with positive and negative arrivals for modeling a computer network with antivirus software / K.U. Kosarava, D. Y. Kopats // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление вычисление, связь (DCCN-2021): материалы XXIV Междунар. науч. конф., Москва, 20-24 сент. 2021 г. – Москва: ИПУ РАН, 2021. – С. 108–113.

4. *Kosarava*, *K.U.* Analysis of the Probabilistic and Cost Characteristics of the Queueing Network with a Control Queue and Quarantine in Systems and Negative Requests by Means of Successive Approximations / K.U. Kosarava, D.Y. Kopats // Communications in Computer and Information Science (CCIS). Vol. 1552: Distributed Computer and Communication Networks (DCCN 2021): International Conference, Moscow, September 20-24, 2021. – Moscow: Springer Nature Switzerland AG, 2022. – С. 259–271.

5. *Копать*, *Д.Я.* Нахождение ожидаемых доходов систем в G-сети с контрольной и карантинной очередями и перемещениями отрицательных заявок между системами сети / Д.Я. Копать // Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2022): сб. материалов II Междунар. науч.-практ. конф., Полоцк, 30-31 марта 2022 г. – Новополоцк: Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, 2022. – С. 23–28.

6. Назаров, А.А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов; 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.

7. *Русилко*, *Т.В*. Дифференциальные уравнения для моментов вектора состояния замкнутой по структуре сети массового обслуживания с нетерпеливыми заявками / Т.В. Русилко, Д.Я. Копать // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки. – 2021. – Т. 36, № 2. – С. 20–30.

Поступила в редакцию 03.03.2023.

Информация об авторах

Копать Дмитрий Ярославович – к.ф.-м.н.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ