

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Т.Н. Ванькова, Л.В. Детченя, В.М. Пецевич, А.О. Селивёрстова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

ON A CLASS OF SYSTEMS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITHOUT MOBILE CRITICAL FEATURES

T.N. Vankova, L.V. Detchenya, V.M. Petsevich, A.O. Seliverstova

Y. Kupala Grodno State University

Получены необходимые и достаточные условия принадлежности исследуемой системы к системам типа Пенлеве.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, свойство Пенлеве, подвижные критические особые точки, метод малого параметра.

Necessary and sufficient conditions for the system under investigation to belong to the Painlevé type system are obtained.

Keywords: system of the ordinary differential equations, Painlevé property, movable critical singularities, method of small parameter.

1. Предварительные результаты

В [1] найдены необходимые условия наличия свойства Пенлеве для системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x'^2 &= A_2 \cdot y^2 + A_1 \cdot y + A_0, \\y'^2 &= B_2 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + B_0,\end{aligned}\quad (1.1)$$

где $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, A_i , $i = \overline{0,2}$, – полиномы по x с аналитическими по t коэффициентами, B_j , $j = \overline{0,2}$, – полиномы по y с аналитическими по t коэффициентами. Была доказана

Лемма 1.1. Для того, чтобы дифференциальная система (1.1) имела свойство Пенлеве необходимо, чтобы степени полиномов A_i , $i = \overline{0,2}$, по переменной x и степени полиномов B_j , $j = \overline{0,2}$, по переменной y были не выше 4.

Изучение систем дифференциальных уравнений на предмет отсутствия подвижных критических особых точек очень часто приводит к изучению уравнения второго порядка второй степени вида

$$(x'' - E(x', x, t))^2 = F(x', x, t), \quad (1.2)$$

где E, F – рациональные функции от x', x с аналитическими по t коэффициентами.

Основные результаты по поиску необходимых условий наличия свойства Пенлеве в решениях уравнения (1.2), а в некоторых случаях и достаточных, содержатся в работах [2, 3]. Некоторые из них содержатся в следующих леммах.

Лемма 1.2 [2], [3]. Для наличия свойства Пенлеве у дифференциального уравнения (1.2)

необходимо, чтобы $E(x', x, t)$, $F(x', x, t)$ были полиномами по x' степени не выше 2 и 4 соответственно, коэффициенты которых являются рациональными по x функциями с аналитическими по t коэффициентами, т. е.

$$\begin{aligned}E(x', x, t) &= E_2(x, t)x'^2 + E_1(x, t)x' + E_0(x, t), \\F(x', x, t) &= F_4(x, t)x'^4 + F_3(x, t)x'^3 + \\&+ F_2(x, t)x'^2 + F_1(x, t)x' + F_0(x, t).\end{aligned}$$

Лемма 1.3 [3]. Пусть $x' = \mu(x, t)$ – нуль нечетной кратности функции $F(x', x, t)$, в котором функция $E(x', x, t)$ голоморфна. Тогда для наличия свойства Пенлеве у дифференциального уравнения (1.2) необходимо, чтобы решения дифференциального уравнения $x' = \mu(x, t)$ были особыми для (1.2).

Лемма 1.4 [3]. Если (1.2) имеет свойство Пенлеве, то нули функции $F(x', x, t)$ вида $x = \gamma(t)$ должны быть четной кратности, при условии, что $E(x', x, t)$ голоморфна в этих нулях.

2 Основной результат

Целью данной работы является поиск необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у решений системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x'^2 &= (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 + \\&+ (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})y + \\&+ a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\y'^2 &= x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00},\end{aligned}\quad (2.1)$$

с аналитическими по t коэффициентами, где

$$|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0, \quad (2.2)$$

которая является частным случаем системы (1.1).

Запись $P \neq 0$, здесь и далее означает, что коэффициенты полинома P одновременно не обращаются в нуль в некоторой области D .

Исключая из системы (2.1) компоненту x , относительно компоненты y построим уравнение

$$(2y'y'' + \alpha_1 \cdot y' + \alpha_0)^2 = \beta_8 \cdot (y')^8 + \beta_6 \cdot (y')^6 + \beta_4 \cdot (y')^4 + \beta_2 \cdot (y')^2 + \beta_0,$$

где a_i, β_j однозначно определяются через коэффициенты системы (2.1). Требуя выполнение леммы 1.2, для наличия свойства Пенлеве, на коэффициенты системы (2.1) получим 27 условий. Разрешая их, найдем, что для наличия свойства Пенлеве у решений системы (2.1) с условиями (2.2) необходимо, чтобы она принимала один из видов

$$x'^2 = (K_2 y^2 + K_1 y + x)(a_{03} x^2 + a_{02} x + a_{01}), \quad (2.3)$$

$$y'^2 = K_2 y^2 + K_1 y + x,$$

где $K_2 \neq 0$ (здесь и в дальнейшем $K_i \in \mathbb{C}$ будем считать произвольными постоянными),

$$|a_{03}| + |a_{02}| + |a_{01}| \neq 0;$$

$$x'^2 = (x + K_1 y) \times$$

$$\times ((a_{13} x^2 + a_{12} x + a_{11}) y + a_{03} x^2 + a_{02} x + a_{01}), \quad (2.4)$$

$$y'^2 = K_1 y + x,$$

где $K_1 \neq 0, |a_{13}| + |a_{12}| + |a_{11}| \neq 0;$

$$x'^2 = (a_{23} x^3 + a_{22} x^2 + a_{21} x) y^2 +$$

$$+ (a_{13} x^3 + a_{12} x^2 + a_{11} x) y + a_{03} x^3 + a_{02} x^2 + a_{01} x, \quad (2.5)$$

$$y'^2 = x,$$

где $|a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| \neq 0.$

Рассмотрим систему (2.3). С помощью линейного преобразования относительно зависимых переменных $x = X + \frac{K_1^2}{4K_2}, y = Y - \frac{K_1}{2K_2}$, в прежних обозначениях, система (2.3) сведется к виду

$$x'^2 = (K_2 y^2 + x)(a_{03} x^2 + a_{02} x + a_{01}), \quad (2.6)$$

$$y'^2 = K_2 y^2 + x,$$

где $K_2 \neq 0, |a_{03}| + |a_{02}| + |a_{01}| \neq 0.$

Из (2.6) относительно компоненты y будем иметь

$$(y'' - K_2 y)^2 = \frac{a_{03}}{4} (y')^4 +$$

$$+ \left(\frac{a_{02}}{4} - \frac{a_{03} K_2}{2} y^2 \right) (y')^2 +$$

$$+ \frac{a_{03} K_2^2}{4} y^4 - \frac{a_{02} K_2}{4} y^2 + \frac{a_{01}}{4}. \quad (2.7)$$

Согласно [1], [3], для наличия свойства Пенлеве, необходимо требовать $a_{03} = 0$, т. е. (2.7) примет вид

$$(y'' - K_2 y)^2 = \frac{a_{02}}{4} (y')^2 - \frac{a_{02} K_2}{4} y^2 + \frac{a_{01}}{4}. \quad (2.8)$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $a_{02} \neq 0$. Для наличия свойства Пенлеве, согласно лемме 1.3, требуя, чтобы общее решение уравнения $a_{02} (y')^2 - a_{02} K_2 y^2 + a_{01} = 0$ было особым решением для уравнения (2.8), получим, что необходимо выполнение условия $a_{01} = K_1 a_{02}$. Таким образом, (2.6) примет вид

$$x'^2 = a_{02} (K_2 y^2 + x)(x + K_1), \quad (2.9)$$

$$y'^2 = K_2 y^2 + x,$$

где $K_2 \neq 0, a_{02} \neq 0$. Поскольку $x = y'^2 - K_2 y^2$, а y удовлетворяет уравнению

$$(y'' - K_2 y)(4a_{02} y''' - 2a_{02}' y'' -$$

$$- a_{02}(4K_2 + a_{02})y' + 2K_2 a_{02}' y) = 0,$$

которое получается из (2.8) дифференцированием, на основании [4] заключаем, что система (2.9) обладает свойством Пенлеве.

2. Пусть $a_{02} = 0$, а тогда $a_{01} \neq 0$, т. е. (2.6) примет вид

$$x'^2 = a_{01} (K_2 y^2 + x), \quad (2.10)$$

$$y'^2 = K_2 y^2 + x,$$

где $K_2 \neq 0, a_{01} \neq 0$. Поскольку $x = y'^2 - K_2 y^2$, а y удовлетворяет уравнению

$$y'' - K_2 y = \pm \frac{\sqrt{a_{01}}}{2},$$

на основании [4] заключаем, что система (2.10) обладает свойством Пенлеве.

Рассмотрим систему (2.4). Исключая из системы компоненту x , относительно компоненты y построим уравнение

$$\left(y'' - \frac{K_1}{2} \right)^2 = \left(\frac{a_{13}}{4} y + \frac{a_{03}}{4} \right) (y')^4 +$$

$$+ \left(\frac{a_{02}}{4} + \left(\frac{a_{12}}{4} - \frac{a_{03} K_1}{2} \right) y - \frac{a_{13} K_1}{2} y^2 \right) (y')^2 +$$

$$+ \frac{a_{13} K_1^2}{4} y^3 - \frac{(a_{12} - a_{03} K_1) K_1}{4} y^2 +$$

$$+ \left(\frac{a_{11}}{4} - \frac{a_{02} K_1}{4} \right) y + \frac{a_{01}}{4}. \quad (2.11)$$

Согласно [1], [3], для наличия свойства Пенлеве, необходимо выполнение условий $a_{13} = 0, a_{03} = 0$.

Пусть $a_{12} \neq 0$. Учитывая полученные выше условия, в уравнение (2.11) введем малый параметр λ по формулам $y = \lambda^{-2} Y, t = t_0 + \lambda z$. При $\lambda = 0$ будем иметь упрощенное в смысле Пенлеве уравнение

$$\left(\frac{d^2Y}{dz^2}\right)^2 = \frac{a_{12}}{4} Y \left(\frac{dY}{dz}\right)^2,$$

которое, согласно лемме 1.4, не обладает свойством Пенлеве, т. е. $a_{12} = 0$, и (2.11) примет вид

$$\begin{aligned} \left(y'' - \frac{K_1}{2}\right)^2 &= \frac{a_{02}}{4} (y')^2 + \\ &+ \left(\frac{a_{11}}{4} - \frac{a_{02}K_1}{4}\right)y + \frac{a_{01}}{4}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $K_1 \neq 0$, $a_{11} \neq 0$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $a_{02} \neq 0$. Если $|a_{11} - a_{02}K_1| + |a_{01}| \neq 0$, то уравнение $a_{02}(y')^2 + (a_{11} - a_{02}K_1)y + a_{01} = 0$ имеет два нуля нечетной кратности вида $y' = \mu(y, t)$, которые, согласно лемме 1.3, должны быть особыми решениями для уравнения (2.12). Данное требование приводит к условию $a_{11} = 0$, которое противоречит условиям накладываем на коэффициенты системы (2.4). Следовательно, $a_{11} = a_{02}K_1$, $a_{01} = 0$, и (2.4) примет вид

$$x' = \varepsilon \sqrt{a_{02}}(x + K_1 y), \quad y'^2 = x + K_1 y, \quad (2.13)$$

где $K_1 \neq 0$, $a_{02} \neq 0$, $\varepsilon^2 = 1$. Поскольку

$$x = y'^2 - K_1 y,$$

а y удовлетворяет уравнению

$$y'' - \frac{K_1}{2} = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{a_{02}}}{2} y',$$

на основании [4] заключаем, что система (2.13) обладает свойством Пенлеве.

2. Пусть $a_{02} = 0$. Тогда (2.12) примет вид

$$\left(y'' - \frac{K_1}{2}\right)^2 = \frac{a_{11}}{4} y + \frac{a_{01}}{4}. \quad (2.14)$$

Для наличия свойства Пенлеве, согласно лемме 1.4, необходимо требовать чтобы $a_{11} = 0$, что противоречит условиям накладываем на коэффициенты системы (2.4).

Рассмотрим систему (2.5). Исключая из системы компоненту x , относительно компоненты y построим уравнение

$$\begin{aligned} (y'')^2 &= \frac{1}{4} \left((a_{23}y^2 + a_{13}y + a_{03})(y')^4 + \right. \\ &+ \left. (a_{22}y^2 + a_{12}y + a_{02})(y')^2 + a_{21}y^2 + a_{11}y + a_{01} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Откуда, согласно [1], [3], для наличия свойства Пенлеве, необходимо требовать $a_{23} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{03} = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} (y'')^2 &= \frac{1}{4} \left((a_{22}y^2 + a_{12}y + a_{02})(y')^2 + \right. \\ &+ \left. a_{21}y^2 + a_{11}y + a_{01} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $a_{22} \neq 0$. Уравнение

$$(a_{22}y^2 + a_{12}y + a_{02})(y')^2 + a_{21}y^2 + a_{11}y + a_{01} = 0$$

имеет два нуля нечетной кратности вида $y' = \mu(y, t)$, которые, согласно лемме 1.3, должны быть особыми решениями для (2.16). Данное требование приводит к условиям $a_{21} = a_{22}K_1$, $a_{11} = a_{12}K_1$, $a_{01} = a_{02}K_1$, и (2.16) примет вид

$$(y'')^2 = \frac{1}{4} (a_{22}y^2 + a_{12}y + a_{02}) \left((y')^2 + K_1 \right). \quad (2.17)$$

Для наличия свойства Пенлеве у решений уравнения (2.17), согласно лемме 1.4, необходимо

требовать $a_{02} = \frac{a_{12}^2}{4a_{22}}$, т. е. можем записать

$$16a_{22}(y'')^2 = (2a_{22}y + a_{12})^2 \left((y')^2 + K_1 \right). \quad (2.18)$$

Для наличия свойства Пенлеве, согласно методу резонансов, решение уравнения (2.18) можно представить формальным рядом

$$y = \frac{\alpha_0}{t} + \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3 + \dots,$$

где α_2 — должно быть произвольной постоянной. Это требование приводит к необходимости выполнения условий

$$a_{22} = \frac{4}{(K_2 t + K_3)^2}, \quad a_{12} = \frac{4K_4}{(K_2 t + K_3)^2},$$

где $|K_2| + |K_3| \neq 0$. С учетом полученных выше условий, система (2.5) примет вид

$$\begin{aligned} x'^2 &= \frac{x(x + K_1)(2y + K_4)^2}{(K_2 t + K_3)^2}, \\ y'^2 &= x, \end{aligned}$$

которую, с помощью линейного преобразования зависимой переменной, при сохранении для коэффициентов прежних обозначений, можем записать в виде

$$\begin{aligned} x'^2 &= \frac{xy^2(x + K_1)}{(K_2 t + K_3)^2}, \\ y'^2 &= x, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $|K_2| + |K_3| \neq 0$. Поскольку $x = y'^2$, а y удовлетворяет уравнению

$$(y'')^2 = \frac{1}{4(K_2 t + K_3)^2} y^2 \left((y')^2 + K_1 \right), \quad (2.20)$$

согласно [2] (используя нормализацию, при $K_2 = 1$, $K_3 = 0$ решения уравнения (2.20) выражаются в терминах третьего трансцендента Пенлеве; при $K_2 = 0$, $K_3 = 1$ решения уравнения (2.20) выражаются в терминах эллиптических функций), заключаем, что система (2.19) обладает свойством Пенлеве.

2. Пусть $a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$. Учитывая эти условия, в уравнение (2.16) введем малый параметр по формулам $y = \lambda^{-2}Y$, $t = t_0 + \lambda z$. При $\lambda = 0$

будем иметь упрощенное в смысле Пенлеве уравнение

$$\left(\frac{d^2Y}{dz^2}\right)^2 = \frac{a_{12}}{4} Y \left(\frac{dY}{dz}\right)^2,$$

которое, согласно лемме 1.4, не обладает свойством Пенлеве. Следовательно, в случае $a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$ нет систем, обладающих свойством Пенлеве.

3. Пусть $a_{22} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{02} \neq 0$ (при этом $a_{21} \neq 0$). Уравнение

$$a_{02}(y')^2 + a_{21}y^2 + a_{11}y + a_{01} = 0$$

имеет два нуля нечетной кратности вида $y' = \mu(y, t)$, которые, согласно лемме 1.3, должны быть особыми решениями для (2.16). Данное требование приводит к условию $a_{21} = 0$, что противоречит данным рассматриваемого случая, т. е. нет систем, обладающих свойством Пенлеве.

Таким образом, имеет место

Теорема 2.1. Для того, чтобы дифференциальная система (2.1) при условии (2.2) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она дробно-линейным преобразованием x , y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из видов: (2.9), (2.10), (2.13), (2.19). Решения данной системы в случае (2.19) выражаются через решения третьего уравнения Пенлеве.

Заключение

Используя метод малого параметра, метод резонансов, метод сравнения полученных уравнений с уравнениями, аналитические свойства решений которых известны, найдены необходимые и достаточные условия принадлежности исследуемой системы (2.1) к системам типа Пенлеве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пецевич, В.М. Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени / В.М. Пецевич, В.А. Пронько // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2 (35). – С. 69–75.
2. Bureau, F. Equations differentielles du second ordre en Y et du second degre en $\ddot{Y}$ dont l'integrale generale est a points critiques fixes / F. Bureau // Ann. di Math. – 1972. – Vol. 91. – P. 163–281.
3. Cosgrove, C.M. Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree / C.M. Cosgrove, G. Scoufis // Stud. Appl. Math. 1993. – Vol. 88. – P. 25–87.
4. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 719 с.

Поступила в редакцию 15.06.18.