**МАТЕМАТИКА**

УДК 517.977

# МЕТОД РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

**Г.Л. Карасёва, Е.А. Ружицкая**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

# METHOD OF SOLVING THE SPECIAL OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH PHASE CONSTRAINTS

**G.L. Karaseva, E.A. Ruzhitskaya**

*F. Scorina Gomel State University*

Дана постановка задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями, получена формула приращения критерия качества и сформулированы два конструктивных критерия оптимальности (без использования мер). Введено понятие структуры и определяющих элементов. Предложен конструктивный алгоритм построения решения исследуемой задачи. Приведен пример решения задачи.

***Ключевые слова****: фазовые ограничения, формула приращения критерия качества, критерий оптимальности, структура, определяющие элементы, доводка, уравнения доводки.*

The formulation of the optimal control problem with phase constraints is given, the formula for the increment of the quality criterion is obtained, and two constructive optimality criteria are formulated (without using measures). The concept of structure and defining elements are introduced. A constructive algorithm for constructing a solution to the problem under study is proposed. An example of solving a problem is given.

***Keywords****: phase constraints, formula for incrementing the quality criterion, optimality criterion, structure, determining elements, refinement, refinement equations.*

## Введение

Задача оптимального управления с фазовыми ограничениями относится к классу сложнейших экстремальных задач. К настоящему времени известен ряд результатов, посвященных качественному исследованию таких задач [1], [2]. В работах [3]–[4] основное внимание уделено конструктивным вопросам. Хорошо известны и трудности, которые возникают при численном решении задач с фазовыми ограничениями. Эти трудности, в первую очередь, обусловлены следующими причинами: 1) при глубине фазовых ограничений более четырёх задача, как правило, имеет решение только в классе измеримых функций; 2) при формулировке критерия оптимальности используются такое понятие как мера, что затрудняет использование данных результатов при численной реализации. Для преодоления указанных трудностей при построении конструктивных методов требуется максимальный учёт свойств и специфики решаемой задачи. В данной работе с таких позиций исследуется линейная задача оптимального управления с фазовыми ограничениями в классе многомерных управлений. Получена формула приращения критерия качества и сформулирован конструктивный критерий оптимальности (без использования мер) [5]. Предложен метод решение исследуемой задачи. Приведен пример.

## 1 Постановка задачи

В классе кусочно-непрерывных функций на фиксированном промежутке времени $T=[0,t^*]$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$J\left(u\right)=c'x(t^*)\to \max,$$
$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad x\left(0\right)=x_0, \tag{1.1}$$
$$d'x(t)\le \alpha(t),\quad \left|u(t)\right|\le 1,\quad t\in T=[0,t^*].$$

Здесь $u(t)=\left(u_1(t),\dots,u_r(t)\right),\ t\in T,$ – $r$-мерное управление в момент времени $t$; $x=x(t)$ – $n$-вектор состояния системы в момент времени $t$; $A$ – постоянная $n\times n$ -матрица, $B$ – постоянная $n\times r$ -матрица, $r>1$; $c$, $d$ – заданные векторы соответствующих размеров; $\alpha(t),\ t\in T,$ – заданная достаточно гладкая функция. Специфика исследуемой задачи заключается в наличии фазовых ограничений.

Введем обозначения $u(\cdot)=\left(u(t),\,t\in T\right)$, $x(\cdot)=\left(x(t),\,t\in T\right)$, которые будем использовать в дальнейшем. Будем считать, что $d'b\neq 0$ и $\alpha_*(0)<d'x_0<\alpha^*(0)$.

Определения допустимого, оптимального и субоптимального управления и соответствующих траекторий вводятся стандартно.

Будем считать, что ограничения задачи (1.1) удовлетворяют *условию Слейтера*, т. е. существует такое управление $\overline{u}(\cdot)$, что вдоль соответствующей ему траектории $\overline{x}(\cdot)$ выполняется неравенство $\max\limits_{t\in T}\left(d'\,\overline{x}(t)-\alpha^*(t)\right)<0.$

## 2 Формула приращения критерия качества

Рассмотрим допустимое управление $u(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x(\cdot)$. Введем искусственную компоненту $u_0(t)=d'x(t)-\alpha(t)\le 0,$ $t\in T.$ Наряду с исходным векторным управлением будем исследовать расширенное векторное управление $\left(u_s(t), s=\overline{1,r}\right),$ $t\in T.$ Критическим значением для компоненты $u_0(t),$ $t\in T$, будем считать значение, равное нулю, критическими значениями для компонент $u_i(t), i=\overline{1,r},$ $t\in T,$ будем считать значения равные $\pm 1.$ Обозначим $I=\{1,2,\ldots,r\},$ $\tilde I=0\cup I.$ Отрезок $T$ разобьём на подотрезки $T_i=[\tau_i,\tau_{i+1}],$ $\tau_i<\tau_{i+1},$ $i=\overline{0,m};$ $\tau_0=0,$ $\tau_{m+1}=t^*,$ таким образом, чтобы для каждого $i\in\{0,1,\ldots,m\}$ существовало подмножество $I(i)\subset I,$ при котором

а) компоненты $u_s(t),$ $s\in\tilde I\setminus I(i),$ на отрезке $T_i$ принимают критические значения;

б) компоненты $u_s(t),$ $s\in I(i),$ на отрезке $T_i,$ могут принимать критические значения только в изолированных точках $t\in T_i.$

Обозначим:

$$L=\{0,1,\ldots,m\},\ L_0=\{i\in L: I(i)\cap 0=\varnothing\},$$
$$T_\alpha=\bigcup_{i\in L_0}T_i,\ L_*=L\setminus L_0,$$
$$L_{00}=\{i\in L: i\in L_0, i-1\in L_0\},\qquad (2.1)$$
$$L_{*0}=\{i\in L: i\in L_0, i-1\in L_*\cup(-1)\},$$
$$\{\tau_{i\nu}=\overline{1,q_i}\}=\{\tau\in \operatorname{int}T_i: u_0(\tau)=0\},\ i\in L_*.$$

***Определение* 2.1** *Допустимое управление* $u(\cdot)$ *называется регулярным*, *если для* $s\in I(i)$ *равенство* $|u_s(t)|=1$ *возможно в конечном числе точек* $t\in T_i,$ $i=\overline{0,m}$ *и* $m<\alpha.$

Рассмотрим допустимое управление $u(\cdot)$ и порожденную им траекторию $x(\cdot).$ Построим соответствующие им подмножества (2.1). Среди индексов $s\in I(i)$ выберем один индекс $s(i),$ $i\in L_0.$ Наряду с допустимым управлением $u(\cdot)$ и соответствующей ему траекторией $x(\cdot)$ рассмотрим допустимое управление $\tilde u(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $\tilde x(\cdot).$ Получена система

$$\Delta\dot x=A(t)\Delta x+B(t)\Delta u+G(t)\Delta\dot\omega,,\quad \Delta x(0)=0,$$

где

$$A(t)=A,\ B(t)=B,\ G(t)=G,\ t\in T_н=T\setminus\bigcup_{i\in L_0}T_i;$$
$$A(t)=A_{s(i)},\ B(t)=B_{s(i)},\ G(t)=G_{s(i)},\ t\in T_i,\ i\in L_0,$$
$$A_{s(i)}=\left(E-\frac{b_{s(i)}d'}{d'b_{s(i)}}\right)A,\ B_{s(i)}=\left(E-\frac{b_{s(i)}d'}{d'b_{s(i)}}\right)B,$$
$$G_{s(i)}=-\frac{b_{s(i)}d'}{d'b_{s(i)}}.$$

Получена формула приращения критерия качества

$$\begin{aligned}c'\Delta x(t^*)&=\int_0^{t^*}\psi'B(\tau)\Delta u(\tau)d\tau+\\&+\sum_{j\in L_0}\int_{T_i}\psi'A(\tau)G(\tau)\Delta\omega(\tau)d\tau+\\&+\sum_{j\in L_{*0}}\psi'(\tau_i-0)\frac{b_{s(i)}}{d'b_{s(i)}}\Delta\omega(\tau_i)+\\&+\sum_{j\in L_{00}}\psi'(\tau_i)\left(\frac{b_{s(i)}}{d'b_{s(i)}}-\frac{b_{s(i-1)}}{d'b_{s(i-1)}}\right)\Delta\omega(\tau_i)-\\&-\sum_{j\in L_*}\psi'(\tau_i)\frac{b_{s(i-1)}}{d'b_{s(i-1)}}\Delta\omega(\tau_i)+\sum_{i\in L_*}\sum_{\nu=1}^{q_i}\upsilon_{i\nu}\Delta\omega(\tau_{i\nu}).\end{aligned}\qquad(2.2)$$

Здесь $\psi(t),$ $t\in T,$ – решение системы

$$\dot\psi=-A'(t)\psi,\ \psi(t^*)=c;$$
$$\psi(\tau_i-0)=\psi(\tau_i+0)+d\upsilon_i,\ i\in L_{*0};\qquad(2.3)$$
$$\psi(\tau_{i\nu}-0)=\psi(\tau_{i\nu}+0)+d\upsilon_{i\nu},\ \nu=\overline{1,q_i},\ i\in L_*;$$

соответствующее вектору

$$\varpi=\left(\upsilon_i,\ i\in L_{*0};\ \upsilon_{i\nu},\ \nu=\overline{1,q_i},\ i\in L_*\right).\qquad(2.4)$$

## 3 Критерий оптимальности

Справедлива следующая

***Теорема* 3.1.** *Пусть ограничения задачи* (1.1) *удовлетворяют условию Слейтера. Тогда для оптимальности регулярного управления* $u(\cdot)$ *в задаче* (1.1) *необходимо и достаточно существования такого вектора*

$$\varpi=\left(\upsilon_i,\ i\in L_{*0};\ \upsilon_{i\nu},\ \nu=\overline{1,q_i},\ i\in L_*\right),$$

*что вдоль соответствующего ему решения* $\psi(t),$ $t\in T,$ *системы* (2.3) *и управления* $u(\cdot)$ *выполняются следующие соотношения*:

$$\psi'(t)B(t)u(t)=\max_{|u|\le 1}\psi'(t)B(t)u,\ t\in T;$$
$$\left.\begin{aligned}&\psi'(\tau_i-0)\frac{b_{s(i)}}{d'b_{s(i)}}\le 0,\ i\in L_{*0},\\&\psi'(\tau_i)\frac{b_{s(i-1)}}{d'b_{s(i-1)}}\ge 0,\ i\in L_*,\\&\psi'(\tau_i)\left(\frac{b_{s(i)}}{d'b_{s(i)}}-\frac{b_{s(i-1)}}{d'b_{s(i-1)}}\right)\le 0,\end{aligned}\right.\qquad(3.1)$$
$$i\in L_{00},\ \upsilon_{i\nu}\le 0,\ \nu=\overline{1,q_i},\ i\in L_*,$$
$$\psi'(t)A(t)G(t)\le 0,\ t\in T_i,\ i\in L_0.$$

Рассмотрим сопряженную систему

$$\dot{\varphi} = -A'\varphi + d\xi,\ \varphi(t^*) = c; \qquad (3.2)$$

$$\varphi(t_i - 0) = \varphi(t_i + 0) + dz_i,\ i = \overline{1, p};$$

где $t_i$, $i = \overline{1, p}$, – некоторые моменты из $T$. Рассмотрим два допустимых управления $u(\cdot)$ и $\overline{u}(\cdot) = u(\cdot) + \Delta u(\cdot)$ задачи (1.1). Легко убедиться в справедливости формулы приращения

$$\Delta J(u) = \int_T \varphi'(t) B \Delta u(t) dt + \sum_{i=1}^{p} z_i d' \Delta x(t_i) + \int_T \xi(t) d' \Delta x(t) dt. \qquad (3.3)$$

Рассмотрим допустимое управление $u(\cdot)$,, по которому построим множества (2.1) и моменты $\tau_i$, $i \in L$; $\tau_{iv}$, $v = \overline{1, q_i}$, $i \in L_*$. Рассмотрим частный случай системы (3.2):

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} = -A'\varphi + d\xi,\ \varphi(t^*) = c; \\ &\varphi(\tau_i - 0) = \varphi(\tau_i + 0) + dz_i, \\ &i \in L_k = L_{*0} \cup L_{00} \cup L_{0*}; \end{aligned} \qquad (3.4)$$

$$\varphi(\tau_{iv} - 0) = \varphi(\tau_{iv} + 0) + dz_{iv},\ v = \overline{1, q_i},\ i \in L_*.$$

Справедлива следующая

***Теорема* 3.2.** *Пусть ограничения задачи* (1.1) *удовлетворяют условию Слейтера. Тогда для оптимальности регулярного управления* $u(\cdot)$ *в задаче* (1.1) *необходимо и достаточно существования таких кусочно-непрерывной функции* $\xi(t)$, $t \in T$, *и чисел* $\left(z_i, i \in L_k; z_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*\right)$, *что вдоль соответствующего им решения* $\varphi(t)$, $t \in T$, *сопряженной системы* (3.4) *и управления* $u(\cdot)$ *выполняются условия максимума*:

$$\varphi'(t) B u(t) = \max_{|u| \le 1} \varphi'(t) B u,$$

$$-\xi(t) d' x(t) = \max_{\gamma \le \alpha(t)} -\xi(t)\gamma,\ t \in T;$$

$$z_i \le 0,\ i \in L_k;\ z_{iv} \le 0,\ v = \overline{1, q_i},\ i \in L_*. \qquad (3.5)$$

## 4 Алгоритм решения задачи

Пусть $u^0(\cdot)$ – регулярное оптимальное управление. Ему соответствуют моменты $\tau_i^0$, $i = \overline{1, m}$, множества (2.1) и индексы $s(i)$, $i = I$. Согласно теореме 3.1, существует такой вектор

$$\varpi = \left(\overline{\upsilon}_i, i \in L_{*0}; \overline{\upsilon}_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*\right),$$

что вдоль соответствующего ему решения $\psi(t)$, $t \in T$, системы (2.3) выполняются соотношения (3.1).

Введем обозначения:

$$I_u(t) = \left\{\zeta \in I : u_\zeta^0(t - 0) \ne u_\zeta^0(t + 0)\right\};$$

$$\left\{t_j^0, j = \overline{1, p_k}\right\} = \left\{t \in T \setminus \left\{\tau_i^0, i = \overline{0, m+1}\right\} : u^0(t - 0) \ne u^0(t + 0)\right\};$$

$$\left\{\xi_{ij}^0, j = \overline{1, q_i}\right\} = \left\{t \in \operatorname{int} T_i : u^0(t - 0) = u^0(t + 0)\right\},\ i \in L_*;$$

$$L_{*0}^R = \left\{i \in L_{*0} : u_s^0(\tau_i^0 - 0) \ne u_s^0(\tau_i^0 + 0),\ s \in I(i)\right\},$$

$$L_{00}^R = \left\{i \in L_{00} : u_s^0(\tau_i^0 - 0) \ne u_s^0(\tau_i^0 + 0),\ s \in I(i)\right\},$$

$$L_*^R = \left\{i \in L_* : u_s^0(\tau_i^0 - 0) \ne u_s^0(\tau_i^0 + 0),\ s \in I(i-1)\right\},$$

$$L_R = L_{*0}^R \cup L_{00}^R \cup L_*^R;$$

$$\left\{\eta_j^0, j = \overline{1, p_\eta + 1}\right\} = \bigcup_{i \in L_*} \left\{\xi_{ij}^0, j = \overline{1, q_i}\right\} \cup \cup \left\{t_j^0, j = \overline{1, p_k}\right\} \cup \left\{\tau_i^0, i = \overline{0, m+1}\right\};$$

$$\eta_0^0 = 0,\ \eta_{p_\eta + 1}^0 = t^*,\ \eta_j^0 < \eta_{j+1}^0,\ j = \overline{0, p_\eta};$$

$$p_i,\ i = \overline{0, m+1};$$

$p_{iv}$ – такие индексы из $(0, 1, \ldots, p_\eta + 1)$,, что $\eta_{p_i}^0 = \tau_i^0$, $i = \overline{0, m+1}$; $\eta_{p_{iv}}^0 = \xi_{iv}^0$, $v = \overline{1, q_i}$, $i \in L_*$.

Пусть $K$ – подмножество из $(0, 1, \ldots, p_\eta + 1)$, при котором

$$\left\{\eta_j^0, j \in K\right\} = \left\{t_j^0, j = \overline{1, p_k}\right\};$$

$$I_j = I_u(\eta_j^0),\ j \in K;\ J_i = I_u(\tau_i^0),\ i \in L^R;$$

$$k^{(j)} = \left(k_\zeta^{(j)}, \zeta \in I\right) = u_\zeta^0\left(\eta_j + 0\right),\ j = \overline{0, p_\eta},\ \zeta \in I.$$

Совокупность моментов

$$\begin{aligned} &L, L_*, L_0, L_{*0}, L_{00}, L_{*0}^R, L_{00}^R, L_*^R, \\ &K, I_j, j \in K, J_i, i \in L^R; \end{aligned} \qquad (4.1)$$

чисел и векторов

$$p_i, i \in L;\ s(i), i \in L_0;$$

$$p_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*;\ k^{(j)}, j = \overline{0, p_\eta}; \qquad (4.2)$$

назовем структурой оптимального управления задачи (1.1).

Совокупность

$$\begin{aligned} &\theta^0 = \upsilon_i^0, i \in L_{*0}; \upsilon_{iv}^0, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*; \\ &\eta_j^0, j = \overline{1, p_\eta}, \end{aligned} \qquad (4.3)$$

назовем определяющими элементами решения задачи (1.1).

Алгоритм составим из двух процедур.

Первая процедура строит приближенное $u^*(\cdot)$ решение задачи (1.1), по которому определяется структура (4.1), (4.2) и вычисляются приближенные значения $\theta^*$ определяющих элементов (4.3).

Построение точных значений вектора определяющих элементов осуществляет процедура доводки.

*Доводка.* Пусть известны структура (4.1), (4.2) задачи и приближенные значения $\theta^*$ вектора (4.3). Введем вектор параметров

$$\theta = \left(\overline{\upsilon}_i, i \in L_{*0}; \overline{\upsilon}_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*; \eta_j, j = \overline{1, p_\eta}\right).$$

Обозначим через $\psi(\theta, t)$,, $t \in T$, – решение системы

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi,\ \psi(t^*) = c,$$

$$\psi(\eta_{p_i}-0)=\psi(\eta_{p_i}+0)+d\upsilon_i,\ \ i\in L_{*0};\qquad(4.4)$$
$$\psi(\eta_{p_{iv}}-0)=\psi(\eta_{p_{iv}}+0)+d\upsilon_i,\ \ v=\overline{1,q_i},\ \ i\in L_*,$$

через $\chi(\theta,t)$, $t\in T$, – траекторию системы

$$\dot\chi=A(\theta,t)\chi+B(\theta,t)\omega(\theta,t)+G(\theta,t)\dot\alpha(t),$$
$$\chi(0)=x_0.\qquad(4.5)$$

Функции $A(\theta,t)$, $B(\theta,t)$, $G(\theta,t)$, $\omega(\theta,t)$, $t\in T$, строятся следующим образом:

$$A(\theta,t)=A,\ t\in T_н;$$
$$A(\theta,t)=\left(E-\frac{b_{s(i)}d'}{d'b_{s(i)}}\right)A,\ t\in T_i,\ i\in L_0;$$
$$B(\theta,t)=B,\ t\in T_н;$$
$$B(\theta,t)=\left(E-\frac{b_{s(i)}d'}{d'b_{s(i)}}\right)B,\ t\in T_i,\ i\in L_0;$$
$$G(\theta,t)=0,\ t\in T_н;$$
$$G(\theta,t)=-\frac{b_{s(i)}}{d'b_{s(i)}},\ t\in T_i,\ i\in L_0;$$
$$\omega(\theta,t)=k^{(j)},\ t\in[\eta_j,\eta_{j_1}[,\ j=\overline{0,p_\eta}.$$

Составим систему нелинейных уравнений, используя полученную структуру (4.1), (4.2).

$$G_1(\theta)=\left(d'\chi(\theta,\eta_{p_i})-\alpha(\eta_{p_i}),\ i\in L_{*0}\right)=0,$$
$$G_2(\theta)=\left(d'\chi(\theta,\eta_{p_{iv}})-\alpha(\eta_{p_{iv}}),\ v=\overline{1,q_i},\ i\in L_{*0}\right)=0,$$
$$G_3(\theta)=\Bigg(d'A(\theta,t)\chi(\theta,\eta_{p_i})+\sum_{\zeta\in I}d'b_\zeta k_\zeta^{(p_i-1)}-$$
$$-\dot\alpha(\eta_{p_i}),\ i\in L_{*0}\setminus L_{*0}^R\Bigg)=0,$$
$$G_4(\theta)=\Bigg(d'A(\theta,t)\chi(\theta,\eta_{p_i})+\sum_{\zeta\in I\setminus s(i-1)}d'b_\zeta k_\zeta^{(p_i-1)}+$$
$$+d'b_{s(i-1)}k_{s(i-1)}^{(p_i)}-\dot\alpha(\eta_{p_i}),\ i\in L_{00}\setminus L_{00}^R\Bigg)=0,$$
$$G_5(\theta)=\Bigg(d'A(\theta,t)\chi(\theta,\eta_{p_i})+\sum_{\zeta\in I}d'b_\zeta k_\zeta^{(p_i)}-$$
$$-\dot\alpha(\eta_{p_i}),\ i\in L_*\setminus L_*^R\Bigg)=0,\qquad(4.6)$$
$$G_6(\theta)=\Bigg(d'A(\theta,t)\chi(\theta,\eta_{p_{iv}})+\sum_{\zeta\in I}d'b_\zeta k_\zeta^{(p_{iv})}-$$
$$-\dot\alpha(\eta_{p_{iv}}),\ v=\overline{1,q_i},\ i\in L_{*0}\Bigg)=0,$$
$$G_7(\theta)=\begin{pmatrix}\psi'(\theta,\eta_j)\big[B(\theta,\eta_j)+A(\theta,\eta_j)+\\ +G(\theta,\eta_j)\big]_\zeta,\ \eta_j\in T_i,\ i\in L_0;\\ \psi'(\theta,\eta_j)[B]_\zeta,\ \eta_j\in T_i,\ i\in L_*;\\ \zeta\in I_j,\ j\in K;\end{pmatrix}=0,$$
$$G_8(\theta)=\left(\psi'(\eta_{p_i}-0)\frac{b_{s(i)}}{d'b_{s(i)}},\ s\in J_i,\ i\in L_{*0}^R\right)=0,$$
$$G_9(\theta)=\begin{pmatrix}\psi'(\eta_{p_i})\left(\dfrac{b_{s(i)}}{d'b_{s(i)}}-\dfrac{b_{s(i-1)}}{d'b_{s(i-1)}}\right),\\ s\in J_i,\ i\in L_{00}^R\end{pmatrix}=0,$$
$$G_{10}(\theta)=\left(\psi'(\eta_{p_i})\frac{b_{s(i-1)}}{d'b_{s(i-1)}},\ s\in J_i,\ i\in L_*^R\right)=0.$$

Здесь $[B]_\zeta$ – $\zeta$-столбец матрицы $B$.

Систему (4.6) назовем уравнениями доводки. Решив её, получим значение вектора определяющих элементов со сколь угодно высокой точностью.

Пусть $\theta^0$ – решение системы (4.6). Построим траектории $\chi^0(t)=\chi(\theta^0,t)$, $\psi^0(t)=\psi^0(\theta^0,t)$, $t\in T$, систем (4.4), (4.5). Пусть

$$\eta_i^0<\eta_{i+1}^0,\ i=\overline{0,p_\eta};\ \eta_0^0=0,\ \eta_{p_\eta+1}^0=t^*.\qquad(4.7)$$

Обозначим

$$u_\zeta^0(t)=\omega_\zeta(\theta^0,t),\ \zeta\in I\setminus s(i),\ t\in[\eta_{p_i}^0,\eta_{p_{i+1}}^0[,\ i=\overline{0,m};$$
$$u_{s(i)}^0(t)=\dot\alpha(t)-d'A\chi^0(t)-\sum_{\zeta\in I\setminus s(i)}d'b_\zeta u_\zeta^0/d'b,$$
$$t\in[\eta_{p_i}^0,\eta_{p_{i+1}}^0[,\ i\in L_0.\qquad(4.8)$$

Если

$$\left|u_{s(i)}^0(t)\right|\le1,\ t\in[\eta_{p_i}^0,\eta_{p_{i+1}}^0[,\ i\in L_0,\qquad(4.9)$$

и вдоль $\varpi^0$, $\psi^0(t)$, $u^0(t)=\left(u_\zeta^0(t),\zeta\in I\right)$, $t\in T$, выполняются соотношения (3.1), то $u^0(t)$, $t\in T$, – оптимальное управление, т. е. процесс решения задачи успешно завершен.

В случае, когда не удалось построить решение системы (4.6) или когда на её решении нарушается одно из соотношений (3.1), (4.7), (4.9), прекращаем процедуру доводки, считая, что начальная информация для неё была некачественная (неправильно идентифицирована структура (4.1), (4.2), либо велико число $\|\theta^*-\theta^0\|$). Возвращаемся к первой части алгоритма, которая строит более точное приближение $u^{**}(\cdot)$ к оптимальному управлению $u^0(\cdot)$. На основе $u^{**}(\cdot)$ уточняем структуру (4.1), (4.2) и вычисляем новое (более точное) значение $\theta^{**}$ вектора (4.3). Затем, исходя из новой информации, заново осуществляем процедуру доводки.

## 5 Пример

В качестве примера рассмотрена задача

$$x_1(t^*)-2x_2(t^*)\to\max,$$
$$\dot x_1(t)=x_2,\ \ \dot x_2(t)=x_3,\ \ \dot x_3(t)=x_4,\ \ \dot x_4(t)=u_1-u_2,$$
$$x_1(t)+x_3(t)\le2{,}5,\qquad(5.1)$$
$$x_1=0,\ x_2=2.8,\ x_3=0,\ x_4=0,\ \ |u(t)|\le1,\ \ 0\le t\le6.$$

После выполнения первой процедуры получено приближенное решение задачи (5.1), определена структура $S$:

$$S = \{L = 1, L_* = 1, L_0 = 0, L_{*0} = 1, L_{00} = 0,$$

$$L^R_{*0} = 1, L^R_{00} = 0, L^R_* = 0, K = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$I_1 = 2, I_2 = 1, I_3 = 1, I_4 = 2, I_5 = 2, J_1 = 2,$$

$$p_1 = 1, s(1) = 2,$$

$$k^0 = (-1,1), k^1 = (-1,1), k^2 = (1,1), k^3 = (-1,1),$$

$$k^4 = (1,1), k^5 = (1,-1), k^6 = (1,0)\}$$

и вычислены приближенные значения вектора определяющих элементов $\theta$

$$\theta = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6, \bar{\upsilon}_1\} \qquad (5.2)$$

По известной структуре сформирована система нелинейных уравнений

$$\begin{gathered} G_1(\theta) = d'\chi(\theta, \eta_3) - \alpha = 0, \\ G_2(\theta) = \psi'(\theta, \eta_1)b_1 = 0, \\ G_3(\theta) = \psi'(\theta, \eta_4)b_2 = 0, \\ G_4(\theta) = \psi'(\theta, \eta_5)b_1 = 0, \qquad (5.3) \\ G_5(\theta) = \psi'(\theta, \eta_6)b_1 = 0, \\ G_6(\theta) = \psi'(\theta, \eta_5)b_2 = 0, \\ G_7(\theta) = \psi'(\theta, \eta_3 - 0)b_2 / d'b_2 = 0, \end{gathered}$$

относительно вектора $\theta$ (5.2). В результате решения системы (5.3) получены значения вектора определяющих элементов с точностью $10^{-10}$. После построения траекторий систем (4.4), (4.5) проверено выполнение соотношений (3.1), (4.7), (4.9). Так как они выполняются, то за решение задачи (5.1) принято управление, построенное по правилам (4.8) (рисунок 5.1)

$$u_1^*(t) = -1, t \in [0, \eta_1[, \;\; u_1^*(t) = 1, t \in [\eta_1, \eta_5[,$$

$$u_1^*(t) = -1, t \in [\eta_5, \eta_6[, \;\; u_1^*(t) = 1, t \in [\eta_6, t^*[,$$

$$u_2^*(t) = 1, t \in [0, \eta_2[, \;\; u_2^*(t), t \in [\eta_2, \eta_3[$$

подсчитываются согласно (4.8)

$$u_2^*(t) = -1, t \in [\eta_3, \eta_4[, \;\; u_2^*(t) = 1, t \in [\eta_6, t^*[,$$

$$u_2^*(t) = -1, t \in [\eta_5, \eta_6[,$$

$$\eta_1 = 0.6675010, \eta_2 = 1.6376353,$$

$$\eta_3 = 2.2334522, \eta_4 = 3.6395361,$$

$$\eta_5 = 3.9074147, \eta_6 = 5.5142681.$$

График управления представлен на рисунке 5.1.

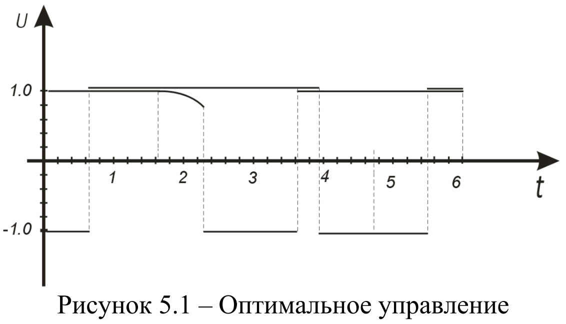


Рисунок 5.1 – Оптимальное управление

ЛИТЕРАТУРА

1. *Математическая теория оптимальных процессов* / Понтрягин Л.С. [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 384 с.

2. *Дубовицкий*, *А.Я.* Задачи на экстремум при наличии ограничений / А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1965. – Т. 5, № 3. – С. 395–453.

3. *Габасов*, *Р.Ф.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. Р.Ф.Габасов, Ф.М.Кириллова. – Мн.: Изд-во : «Университетское», 1984, – 205с.

4. *Костюкова*, *О.И.* Конечный алгоритм оптимизации линейной динамической системы со смешанными ограничениями. Мн.: 1990. – 35 с. – (Препринт / АН БССР. Институт математики; 24(424)).

5. *Карасева*, *Г.Л.* Критерий оптимальности для специальной задачи многомерного управления // Вестник БГУ. Серия 1. – 1997. – № 1. – С. 49–52.

6. Карасёва, Г.Л. Критерий оптимальности для задачи управления с негладким критерием качества / Г.Л.Карасёва // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2010. – № 5 (62). – С. 68–72.

7. *Алёшин*, *Н.А.* Задача оптимального управления с негладким критерием качества как задача ЛП / Н.А. Алёшин, Г.Л. Карасёва // «Наука молодых»: Сборник научных статей по материалам X Всероссийской научно-практической конференции / Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева. – г. Арзамас, 30–31 марта 2017 г. – С. 518–522.

8. *Жогаль*, *С.П.* Исследование случайных автоколебательных систем с одной степенью свободы методом канонических разложений / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 37–41.

9. *Жогаль*, *С.П.* О существовании и единственности решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 50–54.

*Поступила в редакцию* 15.09.18.