Проблемы физики, математики и техники, № 4 (37), 2018

УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ *G*-СЕТИ С СИГНАЛАМИ И ГРУППОВЫМ УДАЛЕНИЕМ ЗАЯВОК МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

INVESTIGATION IN NON-STATIONARY MODE OF *G*-NETWORK WITH SIGNAL AND GROUP REMOVAL CUSTOMERS BY SUCCESSIVE APPROXIMATION METHOD

D.Y. Kopats, M.A. Matalytski

Y. Kupala Grodno State University

Проведено исследование в переходном режиме *G*-сети с положительными заявками и сигналами, когда они при поступлении в систему перемещают заявку в другую систему или уничтожают в ней группу положительных заявок, уменьшая их число на случайную величину, которая задается некоторым распределением вероятностей. Сигнал, поступающий в систему, в которой отсутствуют положительные заявки, не оказывает на сеть массового обслуживания никакого влияния и сразу исчезает из нее. Потоки положительных заявок и сигналов, поступающих в каждую из систем сети, являются независимыми. Для нестационарных вероятностей состояний сети выведена система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова. Предложена методика их нахождения, основанная на использовании модифицированного метода последовательных приближений, совмещённым с методом рядов. Рассмотрены свойства последовательных приближений.

Ключевые слова: *марковская G-сеть*, *положительные и отрицательные заявки*, *сигналы*, *групповое удаление*, *переходный режим*, *нестационарные вероятности состояний.*

A study was conducted in the G-network transition mode with positive customers and signals, when they move the customers to another system or destroy a group of positive customers in it, reducing their number by a random amount, which is specified by some probability distribution. A signal arriving at a system in which there are no positive applications does not have any influence on the queuing network and immediately disappears from it. Streams of positive applications and signals coming to each of the network systems are independent. For nonstationary probabilities of network states, a system of Kolmogorov difference-differential equations is derived. A method for finding them is proposed. It is based on the use of a modified method of successive approximations, combined with the method of series. The properties of successive approximations are considered.

Keywords: *Markov G-network*, *positive and negative customers*, *signals*, *group removal*, *non-stationary mode*, *non-stationary state probability.*

1 Описание сети. Постановка задачи

Рассмотрим открытую G-сеть массового обслуживания [1] с n однолинейными системами массового обслуживания (СМО). В i-ю СМО из внешней среды поступает простейший поток обычных заявок (положительных) с интенсивностью λ_{0i}^{+} и дополнительный поток сигналов, который также является простейшим с интенсивностью $\lambda_{0i}^{(c)}$, $i=\overline{1,\,n}$. Все поступающие потоки независимы. Длительности обслуживания положительных заявок в i-й СМО распределены экспоненциально с параметром μ_i, $i=\overline{1,\,n}$. После окончания обслуживания положительной заявки в i-й СМО, она направляется в j-ю СМО с вероятностью p_{ij}^{+} опять как положительная заявка, а с вероятностью p_{ij}^{-} как сигнал, и с вероятностью $p_{i0}=1-\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij}^{+}+p_{ij}^{-}\right)$ уходит из сети, $i,\,j=\overline{1,\,n}$.

Если в некоторый момент времени в i-й СМО находится $k_i \ge B_i$ положительных заявок, где B_i – целочисленная случайная величина, то при поступлении в эту систему сигнала, действующего как отрицательная заявка в эту систему, число положительных заявок в ней уменьшается на B_i (уничтожается сразу B_i положительных заявок). Если $k_i < B_i$, то в i-ой СМО не остаётся заявок. Случайная величина B_i определяет максимальный размер уничтожаемой группы заявок в i-й СМО и подчиняется произвольному дискретному закону распределения:

$$P\{B_i=m\}=\pi_{im},\ \ m\ge 1;\ \pi_{im}=0,\ m\le 0.$$

В сети циркулируют не только положительные заявки, но и сигналы [2]. Сигнал, поступающий в i-ю СМО, в которой нет положительных заявок, уходит из сети, не оказывая на неё никакого влияния. В противном случае, когда в нее поступает сигнал, то могут произойти следующие события: поступающий сигнал мгновенно перемещает положительную заявку из i-й СМО в j-ю СМО с вероятностью q_{ij}, в этом случае сигнал называют триггером; или с вероятностью $q_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{n} q_{ij}$ сигнал срабатывает как отрицательная заявка и уничтожает в i-й СМО группу положительных заявок [3]. Исследование аналогичной сети в переходном режиме, когда отрицательная заявка уничтожает только одну положительную, описано в [4].

Под состоянием рассматриваемой сети в момент времени t будем понимать вектор $\vec{k}(t) = (\vec{k}, t) = ((k_1, t), (k_2, t), ..., (k_n, t))$, который образует марковский случайный процесс со счетным числом состояний, где состояние (k_i, t) означает, что в момент времени t в i-й СМО находятся k_i положительных заявок, $i = \overline{1, n}$.

Требуется найти вероятности состояний сети в переходном режиме. Ранее для их нахождения для других сетей МО применялся метод, основанный на использовании аппарата многомерных производящих функций, но сети должны были функционировать в условиях высокой нагрузки [4], [5]; в описанных ниже результатах это ограничение снято.

2 Система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний сети

Введем некоторые обозначения. Пусть I_i – нулевой вектор размерности n, за исключением компоненты с номером i, которая равна 1; $P(\vec{k}, t)$ – вероятность состояния сети k в момент времени t; $u(x)$ – единичная функция Хевисайда, $u(x) = \begin{cases} 1, x > 0; \\ 0, x \le 0. \end{cases}$ Возможны следующие переходы случайного марковского процесса $\vec{k}(t)$ в состояние $(\vec{k}, t)$ за время Δt:

– из состояния $(\vec{k} - I_i,\ t)$, в этом случае в i-ю СМО за время Δt поступит положительная заявка с вероятностью $\lambda_{0i}^{+}\ u(k_i)\ \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$;

– из состояния $(\vec{k} + I_i,\ t)$, при этом положительная заявка уходит из сети во внешнюю среду или переходит в j-ю СМО как сигнал, если в ней не было заявок; вероятность такого события равна $\left(\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{ij}^{-}\left(1 - u(k_j)\right)\right)\Delta t + o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1,\ n}$;

– из состояния $(\vec{k} + I_i - I_j,\ t)$, в данном случае после окончания обслуживания положительной заявки в i-й СМО она направляется в j-ю СМО снова как положительная заявка или поступивший в i-ю СМО сигнал мгновенно перемещает положительную заявку из системы i-й СМО в j-ю СМО; вероятность этого события равна $\left(\mu_i p_{ij}^{+} + \lambda_{0i}^{(c)} q_{ij}\right) u(k_j)\Delta t + o\ (\Delta t)$, $i, j = \overline{1,\ n}$;

– из состояния $\left(\vec{k} + I_i + I_j - I_s,\ t\right)$, в этом случае после окончания обслуживания заявки в i-й СМО, она направляется в j-ю СМО как сигнал, который мгновенно перемещает положительную заявку из j-й СМО в СМО с номером s; вероятность такого события равна

$$\mu_i p_{ij}^{-} q_{js} u(k_s)\Delta t + o(\Delta t), \ \ i, j, s = \overline{1,\ n};$$

– из состояния $(\vec{k} + mI_i,\ t)$, в данном случае сигнал извне поступает в i-ю СМО и уничтожает в ней группу положительных заявок величиной m; вероятность такого события равна

$$\lambda_{0i}^{(c)} q_{i0} \pi_{im} \Delta t + o(\Delta t), \ \ i = \overline{1, n};$$

– из состояния $(\vec{k} + l_i I_i,\ t), k_i = 0$, в данном случае сигнал извне поступает в i-ю СМО, в которой в момент времени t находится l_i положительных заявок, а количество заявок выбранных для уничтожения m, причём $l_i < m$; вероятность такого события равна $\lambda_{0i}^{(c)} q_{i0} \pi_{im} \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$;

– из состояний $\left(\vec{k} + I_i + mI_j,\ t\right)$, в этом случае после окончания обслуживания заявки в i-й СМО, она направляется в j-ю СМО как сигнал, который уничтожает в ней случайную группу положительных заявок; вероятность такого события равна $\mu_i p_{ij}^{-} q_{j0} \pi_{jm} \Delta t + o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1,\ n}$;

– из состояний $\left(\vec{k} + I_i + l_j I_j,\ t\right), k_j = 0$, в этом случае после окончания обслуживания заявки в i-й СМО, она направляется в j-ю СМО как сигнал, в которой в момент времени t находится l_j положительных заявок, а количество заявок выбранных для уничтожения m, причём $l_j < m$, который уничтожает в ней случайную группу положительных заявок; вероятность такого события равна $\mu_i p_{ij}^{-} q_{j0} \pi_{jm} \Delta t + o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1,\ n}$;

– из состояния $(\vec{k}, t)$, при этом за время Δt состояние сети не изменилось. Это может быть по следующим причинам: в каждую СМО S_i за время Δt не поступают ни положительные заявки, ни сигналы; сигнал, который попадает в любую из систем сети застаёт систему пустой; в них за время Δt не обслужилось ни одной положительной заявки; вероятность этого события равна

$$1 + \left(-\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+} + \lambda_{0i}^{(c)} + \mu_i u(k_i)\right] + \lambda_{0i}^{(c)}\left(1 - u(k_i)\right)\right)\Delta t + \\ + o(\Delta t);$$

– из остальных состояний с вероятностью $o(\Delta t)$.

Тогда, используя формулу полной вероятности, получим, что нестационарные вероятности состояний, рассматриваемой в данном случае сети удовлетворяют следующей системе разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\begin{aligned}\frac{dP(\vec{k},t)}{dt} = \Bigg[&-\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}+\lambda_{0i}^{(c)}+\mu_i u(k_i)\right]+\\ &+\sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{(c)}\left(1-u(k_i)\right)\Bigg]P(\vec{k},t)+\\ &+\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\lambda_{0i}^{+}u(k_i)P\left(\vec{k}-I_i,\ t\right)+\\ &+\mu_i\left(p_{i0}+\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^{-}\left(1-u(k_j)\right)\right)P\left(\vec{k}+I_i,t\right)+\\ &+\lambda_{0i}^{(c)}q_{i0}\sum_{m=1}^{\infty}\pi_{im}P\left(\vec{k}+mI_i,t\right)+\\ &+\lambda_{0i}^{(c)}q_{i0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_l=1}^{m-1}\pi_{im}P\left(\vec{k}+l_iI_i,t\right)+\\ &+\sum_{j=1}^{n}\Bigg\{\left(\mu_i p_{ij}^{+}+\lambda_{0i}^{(c)}q_{ij}\right)u(k_j)P\left(\vec{k}+I_i-I_j,\ t\right)+\\ &+\mu_i p_{ij}^{-}q_{j0}\sum_{m=1}^{\infty}\pi_{jm}P\left(\vec{k}+I_i+mI_j,t\right)+\\ &+\mu_i p_{ij}^{-}q_{j0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=1}^{m-1}\pi_{jm}P\left(\vec{k}+I_i+l_jI_j,t\right)+\\ &+\sum_{s=1}^{n}\mu_i p_{ij}^{-}q_{js}u(k_s)P\left(\vec{k}+I_i+I_j-I_s,t\right)\Bigg\}\Bigg]. \quad (2.1)\end{aligned}$$

3 Нахождение вероятностей состояний сети

Можно показать, что систему РДУ (2.1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dP(\vec{k},t)}{dt} &= \Lambda(\vec{k})P(\vec{k},t)+\\ &+\sum_{i,j=0}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=-1}^{m-1}\Phi_{ijml_j}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_i+l_jI_j,t\right)+\\ &+\sum_{i,j,s=1}^{n}\Phi_{ijs}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_i+I_j-I_s,t\right), \quad (3.1)\end{aligned}$$

где

$$\Lambda(\vec{k})=-\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}+\lambda_{0i}^{(c)}+\mu_i\ u(k_i)\right]+\sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{(c)}\left(1-u(k_i)\right),$$

$$\Phi_{ijs}(\vec{k})=\mu_i p_{ij}^{-}q_{js}u(k_s),$$

$$\begin{aligned}\Phi_{ijml_j}(\vec{k}) &= \delta_{r-1}\delta_{m1}\Big[\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{+}u(k_j)\right)+\\ &+\delta_{j0}\mu_i\left(\frac{1}{n}p_{i0}+p_{ij}^{-}\delta_{k_j0}\left(1-q_{j0}\right)\right)+\\ &+\left(1-\delta_{ij}\right)\left(\mu_i p_{ij}^{+}+\lambda_{0i}^{(1)}q_{ij}\right)u(k_j)\left(1-\delta_{i0}\right)\left(1-\delta_{j0}\right)\Big]+\\ &+\delta_{l_jm}\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{(1)}q_{j0}+\mu_i p_{ij}^{-}q_{j0}\right)\pi_{jm}+\\ &+u\left(r+1\right)\left(1-\delta_{rm}\right)\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{(1)}+\mu_i p_{ij}^{-}\right)q_{j0}\delta_{k_j0}\pi_{jm}\end{aligned}$$

– интегрируемые по t функции, δ_{ij} – символ Кронекера.

Исследуем ряд $\sum_{i,j=0}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=-1}^{m-1}\Phi_{ijml_j}(\vec{k})$ на сходимость.

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=0}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=-1}^{m-1}\Phi_{ijml_j}(\vec{k})=\\ &=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=-1}^{m-1}\delta_{l_j-1}\delta_{m1}\Big[\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{+}u(k_j)\right)+\\ &+\delta_{j0}\mu_i\left(\frac{1}{n}p_{i0}+p_{ij}^{-}\delta_{k_j0}\left(1-q_{j0}\right)\right)+\\ &+\left(1-\delta_{ij}\right)\left(\mu_i p_{ij}^{+}+\lambda_{0i}^{(1)}q_{ij}\right)u(k_j)\left(1-\delta_{i0}\right)\left(1-\delta_{j0}\right)\Big]+\\ &+\delta_{rm}\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{(1)}q_{j0}+\mu_i p_{ij}^{-}q_{ij}\right)\pi_{jm}+\\ &+u\left(r+1\right)\left(1-\delta_{rm}\right)\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{(1)}+\mu_i p_{ij}^{-}\right)q_{j0}\delta_{k_j0}\pi_{jm}\le\\ &\le\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{+}u(k_j)\right)+\\ &+\delta_{j0}\mu_i\left(\frac{1}{n}p_{i0}+p_{ij}^{-}\delta_{k_j0}\left(1-q_{j0}\right)\right)+\\ &+\left(\mu_i p_{ij}^{+}+\lambda_{0i}^{(1)}q_{ij}\right)u(k_j)\left(1-\delta_{i0}\right)\left(1-\delta_{j0}\right)\Big]+\\ &\sum_{i,j=1}^{n}\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{(1)}q_{j0}+\mu_i p_{ij}^{-}q_{ij}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\pi_{jm}+\\ &+\sum_{i,j=0}^{n}\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{(1)}+\mu_i p_{ij}^{-}\right)q_{j0}\delta_{k_j0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=0}^{m-1}\pi_{jm}\le\\ &\le\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{+}u(k_j)\right)+\\ &+\delta_{j0}\mu_i\left(\frac{1}{n}p_{i0}+p_{ij}^{-}\delta_{k_j0}\left(1-q_{j0}\right)\right)+\\ &+\left(\mu_i p_{ij}^{+}+\lambda_{0i}^{(1)}q_{ij}\right)u(k_j)\left(1-\delta_{i0}\right)\left(1-\delta_{j0}\right)\Big]+\\ &\sum_{i,j=1}^{n}\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{(1)}q_{j0}+\mu_i p_{ij}^{-}q_{ij}\right)+\\ &+\sum_{i,j=0}^{n}\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{(1)}+\mu_i p_{ij}^{-}\right)q_{j0}\delta_{k_j0}\sum_{m=1}^{\infty}m\pi_{jm}=\\ &=\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{+}u(k_j)\right)+\\ &+\delta_{j0}\mu_i\left(\frac{1}{n}p_{i0}+p_{ij}^{-}\delta_{k_j0}\left(1-q_{j0}\right)\right)+\\ &+\left(\mu_i p_{ij}^{+}+\lambda_{0i}^{(1)}q_{ij}\right)u(k_j)\left(1-\delta_{i0}\right)\left(1-\delta_{j0}\right)\Big]+\\ &\sum_{i,j=1}^{n}\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{(1)}q_{j0}+\mu_i p_{ij}^{-}q_{ij}\right)+\\ &+\sum_{i,j=0}^{n}\left(\delta_{i0}\lambda_{0j}^{(1)}+\mu_i p_{ij}^{-}\right)q_{j0}\delta_{k_j0}b_i.\end{aligned}$$

Отсюда следует сходимость ряда.

Из (3.1) следует, что

$$P\left(k,t\right)=e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}\left\{P\left(\vec{k},0\right)+\right.$$

$$+\int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x}\left(\sum_{i,j=0}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=-1}^{m-1}\Phi_{ijml_j}(\vec{k})P\left(k+I_i+l_jI_j,t\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j,s=1}^{n}\Phi_{ijs}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_i+I_j-I_s,x\right)\right)dx\right\}. \quad (3.2)$$

Пусть $P_q(\vec{k},t)$ – приближение $P(\vec{k},t)$ на q-й итерации, $P_{q+1}(\vec{k},t)$ – решение системы (3.1), полученное методом последовательных приближений. Тогда из (3.2) вытекает, что

$$P_{q+1}(\vec{k},t)=e^{-\Lambda(\vec{k})t}\left\{P_q(k,0)+\right.$$

$$+\int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x}\left(\sum_{i,j=0}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=-1}^{m-1}\Phi_{ijml_j}(\vec{k})P_q\left(k+I_i+l_jI_j,t\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j,s=1}^{n}\Phi_{ijs}(\vec{k})P_q\left(k+I_i+I_j-I_s,x\right)\right)dx\right\}. \quad (3.3)$$

В качестве начального приближения возьмём стационарное распределение

$$P_0(\vec{k},t)=\lim_{t\to\infty}P(\vec{k},t),$$

которое удовлетворяет соотношению

$$\Lambda(\vec{k})P(\vec{k})=\sum_{i,j=0}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=-1}^{m-1}\Phi_{ijml_j}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_i+l_jI_j\right)+$$

$$+\sum_{i,j,s=1}^{n}\Phi_{ijs}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_i+I_j-I_s\right). \quad (3.4)$$

Для последовательных приближений справедливы следующие утверждения.

***Теорема* 3.1.** *Последовательные приближения* $P_q(\vec{k},t), q=0,1,2,...,$ *сходятся при* $t\to\infty$ *к стационарному решению системы уравнений* (3.1).

***Теорема* 3.2.** *Последовательность* $\left\{P_q(\vec{k},t)\right\}$, $q=0,1,2,...,$ *построенная по схеме* (3.3), *при любом ограниченном по t нулевом приближении* $P_0(\vec{k},t)$ *сходится при* $q\to\infty$ *к единственному решению системы* (3.1).

Доказательство этих теорем проводится аналогично как в [6].

***Теорема* 3.3.** *Любое приближение* $P_q(\vec{k},t)$, $q\ge 1$, *представимо в виде сходящегося степенного ряда*

$$P_q(\vec{k},t)=\sum_{l=0}^{\infty}d_{ql}(\vec{k})t^l, \quad (3.5)$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$d_{q+1l}(\vec{k})=\frac{-\Lambda(\vec{k})^{\,l}}{l!}\times$$

$$\times\left\{P(\vec{k},0)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda(\vec{k})^{u+1}}D_{qu}(\vec{k})\right\}, l\ge 0, \quad (3.6)$$

$$d_{q0}(\vec{k})=P(\vec{k},0),\ d_{0l}(\vec{k})=P(\vec{k},0)\delta_{l0},$$

$$D_{ql}(\vec{k})=\sum_{i,j=0}^{n}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=-1}^{m-1}\Phi_{ijml_j}(\vec{k})d_{ql}\left(\vec{k}+I_i+l_jI_j\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n}\Phi_{ijs}(\vec{k})d_{ql}\left(\vec{k}+I_i+I_j-I_s\right)\right].$$

Доказательство. Докажем, что коэффициенты степенного ряда (3.5) удовлетворяют рекурентным соотношениям (3.6). Подставим последовательные приближения (3.5) в (3.3). Тогда, учитывая, что

$$e^{-\Lambda(\vec{k})t}\int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x}x^l dx=$$

$$=\left[\frac{1}{\Lambda(\vec{k})}\right]^{l+1}l!\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda(\vec{k})\right]^l}{j!},\ l=0,1,2,...,$$

получим

$$\sum_{l=0}^{\infty}d_{ql}(\vec{k})t^l=e^{-\Lambda(\vec{k})t}P(\vec{k},0)+$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i,j=0}^{n}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l_j=-1}^{m-1}\Phi_{ijml_j}(\vec{k})\,d_{ql}\left(\vec{k}+I_i+l_jI_j\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n}\Phi_{ijs}(\vec{k})d_{ql}\left(\vec{k}+I_i+I_j-I_s\right)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\Lambda(\vec{k})}\right]^{l+1}l!\sum_{u=l+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda(\vec{k})\right]^u}{u!}.$$

Используя обозначения (3.6), этот ряд можно переписать в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty}d_{ql}(\vec{k})t^l=e^{-\Lambda(\vec{k})t}P(\vec{k},0)+$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}D_{ql}(\vec{k})\left[\frac{1}{\Lambda(\vec{k})}\right]^{l+1}l!\sum_{u=l+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda(\vec{k})\right]^u}{u!}t^u.$$

Поменяв местами индексы суммирования и разлагая $e^{-\Lambda(\vec{k})t}$ в ряд по степеням t, будем иметь

$$\sum_{l=0}^{\infty}d_{ql}(\vec{k})t^l=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda(\vec{k})\right]^l}{l!}\times$$

$$\times\left\{P(\vec{k},0)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\left[\Lambda(\vec{k})\right]^{u+1}}D_{qu}(\vec{k})\right\}t^l. \quad (3.7)$$

Приравнивая в левой и правой части выражения (3.7) коэффициенты при t^l, получим соотношения (3.6) для коэффициентов ряда (3.5).

При нахождении радиуса сходимости $R_q(\vec{k})$ степенного ряда (3.5) использовалась известная формула Коши-Адамара [7]

$$R_q(\vec{k})=\left[\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{d_{ql}^{+-}(\vec{k})}\right]^{-1}.$$

Заключение

В работе проведено исследование марковской G-сети массового обслуживания с сигналами в случае, когда отрицательная заявка может уничтожать группу положительных заявок. Для такой сети предложен модифицированный метод последовательных приближений, совмещённый с методом рядов, для нахождения нестационарных вероятностей состояний. Последовательные приближения сходятся с течением времени к стационарным вероятностям состояний, а сама последовательность приближений сходится единственному решению полученной для вероятностей состояний системы уравнений Колмогорова. Любое последовательное приближение представимо в виде сходящегося степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости, коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям, что позволяет находить их на компьютере за приемлемое процессорное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe*, *E*. Product form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // Journal of Applied Probability. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.

2. *Gelenbe*, *E*. G-networks with triggered customer movement / E. Gelenbe // Journal of Applied Probability. – 1993. – Vol. 30. – P. 742–748.

3. *Gelenbe*, *E*. G-networks with signals and batch removal / E. Gelenbe // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 1993. – Vol. 7. – P. 335–342.

4. *Малыцкий М.А*. Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок / М.А. Маталыцкий, В.В. Науменко. – Гродно: ГрГУ, 2016. – 348 с.

5. *Matalytski*, *M*. Investigation of G-network with signals at transient behavior / M. Matalytski, V. Naumenko // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2014. – Vol. 13, № 1. – P. 75–86.

6. *Копать*, *Д.Я*. Анализ сети с положительными и отрицательными заявками различных типов в переходном режиме / Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий // Вестник ГрГУ. Серия 2. – 2017. – № 3. – С. 150–162.

7. *Кудрявцев*, *Л.Д*. Курс математического анализа: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – Москва: Высшая школа, 2006. – Т. 2. – 720 с.

Поступила в редакцию 04.09.18.