

УДК 535.42

ОПТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ ВЕБЕРА – ГАУССА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

OPTICAL WEBER – GAUSS BEAMS

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Найдены и анализируются аналитические выражения в замкнутой форме для оптических пучков Вебера – Гаусса ($W-G$). Установлены физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков. Выполнено графическое моделирование пучков $W-G$ и показано, что комплексные значения свободного параметра a являются физически приемлемыми.

Ключевые слова: пучки, пучки Вебера – Гаусса, параболические гауссовы пучки, пучки Гельмгольца – Гаусса.

Analytical expressions in the closed shape for optical Weber – Gauss ($W-G$) beams are found and analyzed. Physical restrictions on possible values of the free parameters of such beams are discovered. Pictorial modelling of $W-G$ beams is fulfilled and it is shown that complex values of the free parameter a are physically comprehensible.

Keywords: beams, Weber – Gauss beams, parabolic Gauss beam, Helmholtz – Gauss beams.

Введение

По-прежнему актуальны в настоящее время поиск и исследования новых типов световых пучков [1]–[4]. Большой интерес привлекает семейство пучков Гельмгольца – Гаусса ($HL-G$) [5]. Из них наиболее исследованы пучки Бесселя [6], [2] и Бесселя – Гаусса [7], [8]. Слабо изучены решения волнового уравнения в параболической системе координат, описывающие волновые поля Вебера [3], [4] и пучки Вебера – Гаусса ($W-G$) (или параболические гауссовы пучки) [5], [9].

В настоящей работе получены аналитические выражения в замкнутом виде, описывающие пучки $W-G$. Установлены физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков. Проведено графическое моделирование пучков $W-G$ и показано, что комплексные значения свободного параметра a являются физически приемлемыми.

1 Параксиальные волновые поля Вебера

Для монохроматических волн вида $f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}) \exp(ik_z z - i\omega t)$ скалярное параболическое уравнение для огибающей $f(\mathbf{r})$, описывающее параксиальные световые пучки, имеет вид [1] $(\Delta_{\perp} + 2ik_{\perp} \partial_z) f(\mathbf{r}) = 0$.

Разделяя переменные подстановкой $f(\mathbf{r}) = f_{12}(\mathbf{r}_{\perp}) f_3(z)$ получаем функцию $f_3(z) = \exp(-ik_{\perp}^2 q / (2k))$, где $q = z - iq_0^*$ – стандартный комплексный параметр пучка, и $2D$ уравнение Гельмгольца

$$(\Delta_{\perp} + k_{\perp}^2) f_{12}(\mathbf{r}_{\perp}) = 0, \quad (1.1)$$

где $k_{\perp}^2 = k^2 - k_z^2$. Перейдем к параболической

цилиндрической системе координат подстановкой $[x = (\eta^2 - \xi^2) / 2; y = \xi\eta]$ [10], [3]. Теперь уравнение (1.1) принимает вид

$$(\partial_{\xi\xi}^2 + \partial_{\eta\eta}^2) + k_{\perp}^2 (\xi^2 + \eta^2) f_{12}(\xi, \eta) = 0. \quad (1.2)$$

Разделяя переменные подстановкой $f_{12}(\xi, \eta) = f_1(\xi) f_2(\eta)$ получаем два независимых дифференциальных уравнения типа Вебера

$$d_{\xi\xi}^2 f_1(\xi) + (k_{\perp}^2 \xi^2 - 2k_{\perp} a) f_1(\xi) = 0; \quad (1.3)$$

$$d_{\eta\eta}^2 f_2(\eta) + (k_{\perp}^2 \eta^2 + 2k_{\perp} a) f_2(\eta) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь a – безразмерная постоянная разделения переменных.

Уравнения (1.3), (1.4) имеют по два независимых решения, которые можно выразить через различные специальные функции, например, через функции параболического цилиндра или функции Уиттекера. Целесообразным представляется выразить решения уравнения (1.3) через функцию Куммера M (вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1$). Тогда четные и нечетные решения для функций $f_1(\xi)$ следующие:

$$f_1(\xi) = \left[A_1 M \left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; ik_{\perp} \xi^2 \right) + A_2 \xi M \left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; ik_{\perp} \xi^2 \right) \right] \times \exp \left(-\frac{ik_{\perp} \xi^2}{2} \right) \equiv f_{1e}(\xi, -a) + f_{1o}(\xi, -a).$$

A_1 и A_2 – произвольные константы. Индексы снизу e и o обозначают чётные и нечётные относительно аргумента ξ решения.

Функции $f_2(\eta)$ получаются из $f_1(\xi)$ заменами $\xi \rightarrow \eta$, $a \rightarrow -a$.

$$f_2(\eta) = \left[B_1 M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; ik_{\perp} \eta^2\right) + B_2 \eta M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; ik_{\perp} \eta^2\right) \right] \exp\left(-\frac{ik_{\perp} \eta^2}{2}\right) \equiv f_{2e}(\eta, a) + f_{2o}(\eta, a).$$

Чтобы функция f_{12} в (1.2) была непрерывной во всём пространстве, следует для общего решения $f(\mathbf{r})$ выбирать только произведения функций одинаковой чётности по η и ξ , т. е.

$$f_o(\mathbf{r}) = f_{2o}(\eta, a) f_{1o}(\xi, -a) f_3(z);$$

$$f_e(\mathbf{r}) = f_{2e}(\eta, a) f_{1e}(\xi, -a) f_3(z).$$

Теперь четные и нечетные решения для парааксиальных параболических полей (пучков Вебера) соответственно равны:

$$f_e = M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; ik_{\perp} \eta^2\right) \cdot M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; ik_{\perp} \xi^2\right) \times \exp\left[-\frac{ik_{\perp}}{2} \left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{k_{\perp} q}{k}\right)\right]. \quad (1.5)$$

$$f_o = \xi \eta M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; ik_{\perp} \eta^2\right) \cdot M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; ik_{\perp} \xi^2\right) \times \exp\left[-\frac{ik_{\perp}}{2} \left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{k_{\perp} q}{k}\right)\right]. \quad (1.6)$$

Поперечные картины полученных парааксиальных пучков представляют собой наложение системы софокусных парабол. Поэтому пучки называются параболическими. Кроме того, параболические пучки ещё часто называют пучками Вебера. Параболические волновые поля зависят от двух координат η , ξ и параметров a и k_{\perp} . Эти поля, как и поля Бесселя, являются бездифракционными [3], поскольку их амплитуды в поперечной плоскости не зависят от z . Как и поля Бесселя, параболические поля обладают свойством самовосстановления после препятствия.

2 Пучки Вебера – Гаусса

Параболические пучки или, что то же самое, пучки Вебера переносят бесконечную энергию и поэтому физически не реализуемы во всём пространстве. Чтобы найти выражения, описывающие пучки с параболической симметрией, обладающие конечной энергией, необходима гауссова аподизация выражений (1.5), (1.6). Пучки $W-G$, обладающие конечной энергией, проще всего получить из парааксиальных пучков Вебера (1.5), (1.6), применяя преобразование Аппеля [10] в форме [8]

$$f(x, y, q) \rightarrow G f\left(\frac{x}{\beta q}, \frac{y}{\beta q}, -\frac{1}{\beta^2 q}\right).$$

При этом $\xi \rightarrow \xi \sqrt{1/(\beta q)}$, $\eta \rightarrow \eta \sqrt{1/(\beta q)}$. Здесь

β – размерная константа,

$$G = \frac{1}{q} \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2q}\right]$$

– гауссиан.

В итоге четные и нечетные пучки $W-G$ (с точностью до постоянного множителя) описываются выражениями

$$f_{W-G,e} = \frac{1}{q} M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{k_{\perp} \eta^2}{\beta q}\right) \times M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{k_{\perp} \xi^2}{\beta q}\right) \exp\left[\frac{ik}{2q} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - \frac{k_{\perp}}{k\beta}\right)^2\right],$$

$$f_{W-G,o} = \frac{\xi \eta}{\beta q} M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{k_{\perp} \eta^2}{\beta q}\right) \times M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{k_{\perp} \xi^2}{\beta q}\right) \exp\left[\frac{ik}{2q} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - \frac{k_{\perp}}{k\beta}\right)^2\right].$$

Пучки $W-G$ зависят от трех пространственных переменных (ξ, η, z) и пяти свободных параметров ($k, k_{\perp}, z_0, q_0, a$). Отметим, что явные выражения для пучков $W-G$ в [5], [9] не приведены. Для наглядности выразим переменные ξ и η как $\xi^2 = \rho - x$; $\eta^2 = \rho + x$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. В качестве константы β возьмем $\beta = i/z_0$. Тогда четные и нечетные пучки $W-G$ описываются соответственно выражениями

$$f_{W-G,e} = \frac{1}{q} M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{k_{\perp} z_0 (\rho + x)}{q}\right) \times M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{k_{\perp} z_0 (\rho - x)}{q}\right) \exp\left[\frac{ik}{2q} \left(\rho + \frac{ik_{\perp} z_0}{k}\right)^2\right],$$

$$f_{W-G,o} = \frac{y z_0}{q^2} M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{k_{\perp} z_0 (\rho + x)}{q}\right) \times M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{k_{\perp} z_0 (\rho - x)}{q}\right) \exp\left[\frac{ik}{2q} \left(\rho + \frac{ik_{\perp} z_0}{k}\right)^2\right].$$

3 Нормированные пучки Вебера – Гаусса

Чтобы уменьшить число свободных параметров и записать выражения в более общем виде, перейдем к безразмерным величинам, используя характерные продольный и поперечный линейные размеры пучка z_0 и x_0 : $z_0 = kx_0^2/2$. Тогда безразмерные переменные и параметры:

$$X = \frac{x}{x_0}; Y = \frac{y}{x_0}; K_{\perp} = k_{\perp} x_0;$$

$$Q = q/z_0 \equiv Z - iQ_0; R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\rho}{x_0}.$$

Окончательно, явные выражения в безразмерной замкнутой форме для четных и нечетных пучков $W-G$ соответственно имеют вид:

$$f_{W-Q,e} = \frac{1}{Q} M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{K_{\perp}(R+X)}{Q}\right) \times \quad (3.1)$$

$$\times M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{K_{\perp}(R-X)}{Q}\right) \exp\left[\frac{i}{Q}\left(R + \frac{iK_{\perp}}{2}\right)^2\right],$$

$$f_{W-Q,o} = \frac{Y}{Q^2} M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{K_{\perp}(R+X)}{Q}\right) \times \quad (3.2)$$

$$\times M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{K_{\perp}(R-X)}{Q}\right) \exp\left[\frac{i}{Q}\left(R + \frac{iK_{\perp}}{2}\right)^2\right].$$

Поля Вебера (параболического цилиндра) являются решениями уравнения Гельмгольца в параболической системе координат и, как хорошо известно [11], выражаются через функции параболического цилиндра с комплексными параметрами. Бэндрес и др. [3] предложили использовать вещественные решения уравнения Гельмгольца в параболических координатах через функции P_e и P_o , которые выражаются через ряды с вещественными членами. Однако явные замкнутые аналитические выражения для функций Бэндреса P_e и P_o и для пучков $W-G$ в литературе, насколько нам известно, не приводятся. Выражения (3.1) и (3.2) являются основным результатом работы.

Пучки $W-G$ в безразмерной форме зависят от трех пространственных переменных (X, Y, Z) и только от трех свободных параметров (K_{\perp}, a, Q_0) . Такие пучки должны быть физически реализуемыми, т. е. переносить конечную мощность. Используя подход [8] для нахождения ограничений на параметры пучков Бесселя – Гаусса, нетрудно показать, что условие конечной переносимой мощности для пучков $W-G - Q_0 > 0$. При этом на параметры K_{\perp} и a не накладываются никакие ограничения. Они могут быть произвольными комплексными константами.

4 Графическое моделирование картин распределения интенсивности пучков Вебера – Гаусса

Пучки $W-G$ принадлежат семейству пучков $HL-G$, введенных Бэндресом и др. [5]. Для характеристики пучков $HL-G$ ранее был введен параметр

$\gamma = k_{\perp} w_0 / 2$ [5]. При $\gamma > 1$, согласно [7], [5], пучок $HL-G$ сохраняет свои бездифракционные свойства до расстояния $z_{\max} = k w_0 / k_{\perp}$, а затем расходится, образуя кольцеобразную картину интенсивности.

Произведем численные оценки различных величин пучков $W-G$. Как и в работе [5], полагаем, что длина волны $\lambda = 0.63 \cdot 10^{-6}$ м, размер перетяжки гауссиана $w_0 \approx 2 \cdot 10^{-3}$ м. Тогда волновое число $k \approx 10^7$ м. Пусть далее параметр $k_{\perp} = 10^4$ м⁻¹, $x_0 = w_0$, и $Q_0 = 1$. В наших безразмерных обозначениях $K_{\perp} \approx 20$, $\gamma = K_{\perp} / 2 \approx 10$. Безразмерное расстояние $Z_{\max} = z_{\max} / z_0 = 2 / K_{\perp}$, до которого пучок $W-G$ всё еще сохраняет свое недифрагирующе-подобное поведение, равно $Z_{\max} \approx 0.1$. Графическое моделирование подтверждает эти теоретические оценки.

Картинки интенсивности могут быть самыми разнообразными в зависимости от задаваемых параметров a , K_{\perp} и расстояния Z . Они инвариантны относительно преобразований $(a \rightarrow -a)$ и $(x \rightarrow -x)$. Ось OX является осью симметрии. При $a = 0$ возникает дополнительная симметрия картин относительно оси OY .

На рисунке 4.1 изображены картинки интенсивности в поперечных сечениях пучков $W-G$ при $a = 0$ и различных расстояниях Z в области недифрагирования. Картинки представляют собой семейство софокусных парабол, которое с возрастанием Z остается практически неизменным. На параболы накладывается пятно гауссиана, которое с увеличением Z расширяется.

До настоящего времени рассматривались [5], [4], [9] только вещественные параметры a . Однако a могут быть любыми. При чисто мнимых a индексы функций Куммера становятся вещественными. Такие пучки $W-G$ пока не изучались. Например, при $a = i/2$ четный пучок $W-G$ редуцируется к децентрированному (смещенному) гауссову пучку

$$f_{W-Q,e} = \frac{1}{Q} \exp\left[\frac{i}{Q}\left(Y^2 + \left(X + \frac{iK_{\perp}}{2}\right)^2\right)\right].$$

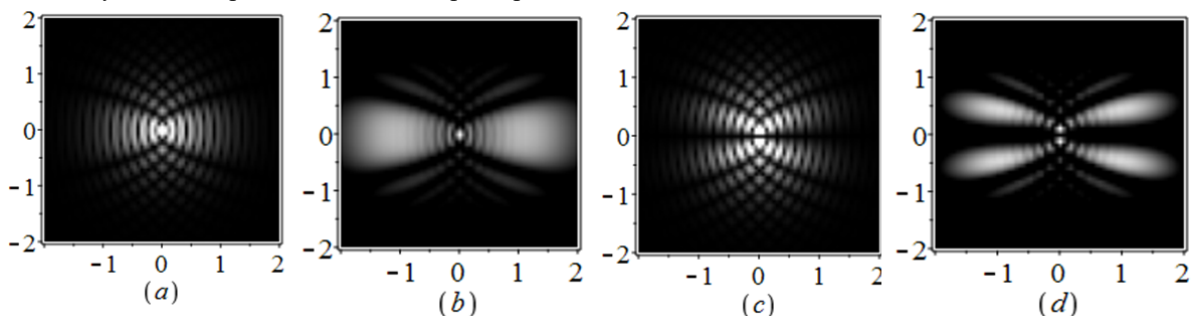


Рисунок 4.1 – Картинки интенсивности I_o четных и I_e нечетных пучков Вебера – Гаусса

(a): $I_e, a = 0, Z = 0$; (b): $I_e, a = 0, Z = 0.06$; (c): $I_o, a = 0, Z = 0.12$.

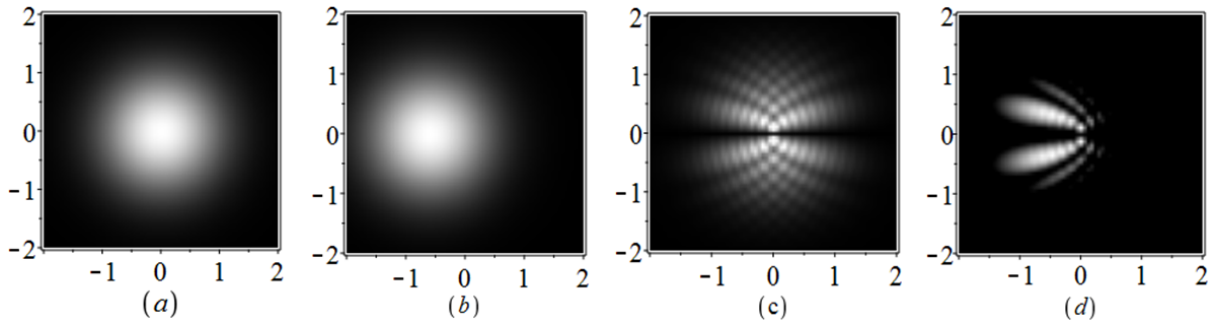


Рисунок 4.2 – Картины интенсивности I_e четных и I_o нечетных пучков $W-G$ при чисто мнимых значениях параметра a . (a): $I_e, a = i/2, Z = 0$; (b): $I_e, a = i/2, Z = 0.06$; (c): $I_o, a = i/2, Z = 0$; (d): $I_o, a = i/2, Z = 0.06$.

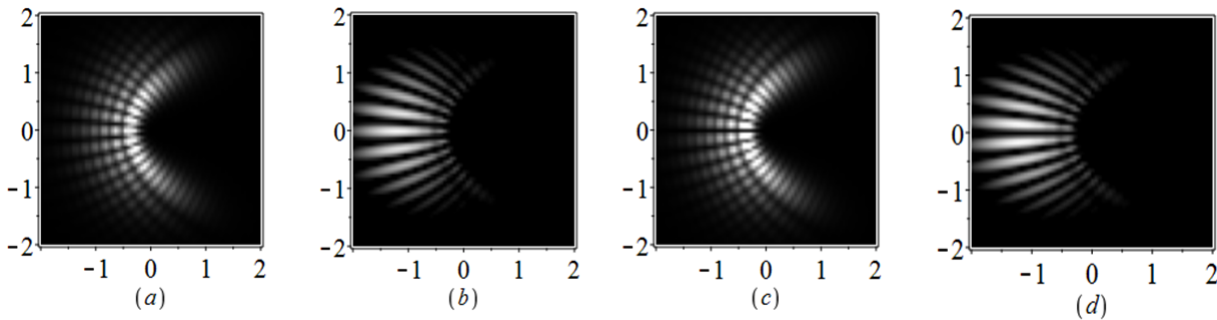


Рисунок 4.3 – Картины интенсивности I_e четных и I_o нечетных пучков $W-G$ при комплексных значениях параметра a . (a): $I_e, a = i/2 + 6, Z = 0$; (b): $I_e, a = i/2 + 6, Z = 0.12$; (c): $I_o, a = i/2, Z = 0$; (d): $I_e, a = i/2, Z = 0.12$.

Рисунок 4.2 подтверждает этот вывод. На нем изображены картины интенсивности I_o четных и I_e нечетных пучков $W-G$ при чисто мнимых значениях параметра a . Видно, что с увеличением расстояния Z в области бездифракционности картина парабол остается практически неизменной, а гауссово пятно смещается влево вдоль оси OX .

На рисунке 4.3 представлены картины интенсивности I_o четных и I_e нечетных пучков Вебера – Гаусса при комплексных значениях параметра a . Видно, что с увеличением расстояния Z в области бездифракционности картина парабол остается практически неизменной, а гауссово пятно смещается влево вдоль оси OX .

Заключение

В данной работе исследуются свойства пучков $W-G$. Найдены явные выражения для пучков $W-G$ в безразмерной замкнутой форме. Показано, что свойства пучков $W-G$ зависят от трех пространственных переменных (X, Y, Z) и только от трех свободных параметров K_{\perp}, a, Q_0 . Условия переносимой конечной мощности этих пучков – $Q_0 > 0$. На параметры K_{\perp} и a не накладываются никакие ограничения. Они могут быть произвольными комплексными константами.

Проведенное графическое моделирование интенсивности пучков Вебера – Гаусса с различными значениями свободного параметра a (включая комплексные) показало, что картины интенсивности отражают параболическую симметрию таких мод.

Варьирование комплексных свободных параметров a и K_{\perp} таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.
2. Girdel, S.S. Vectorial of Bessel light beams / S.S. Girdel, S.N. Kurilkina // Proc. SPIE. – 2001. – Vol. 4358. – P. 258–264.
3. Bandres, M.A. Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cedra // Optics Letters. – 2004. – Vol. 29, № 1. – P. 44–46.
4. Rodriguez-Lara, B.M. Dynamical constants of structured photons with parabolic-cylindrical symmetry / B.M. Rodriguez-Lara, R. Jauregui // Phys. Rev. A. – 2009. – Vol. 79, № 5. – P. 055806(4).

5. *Gutierrez-Vega, J.C.* Helmholtz-Gauss waves / J.C. Gutierrez-Vega, M.A. Bandres // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – Vol. 25, № 2. – P. 289–298.
6. *Durnin, J.* Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // *JOSA A.* – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.
7. *Gori, F.* Bessel-Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // *Opt. Commun.* – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.
8. *Гиргель, С.С.* Обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2015. – № 4 (25). – С. 11–15.
9. *Rodriguez-Lara, B.M.* Normalization of optical Weber waves and Weber – Gauss beams / B.M. Rodriguez-Lara // *JOSA A.* – 2010. – Vol. 27, № 2. – P. 327–332.
10. *Миллер, У.* Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – М.: Мир, 1981. – 342 с.
11. *Абрамовиц, М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

Поступила в редакцию 22.08.18.