УДК 535.854.004.14

ВЛИЯНИЕ ОСТАТОЧНОГО ГАЗА НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ МАЛЫХ СМЕЩЕНИЙ ПРОБНЫХ ТЕЛ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Витушкин Л. Ф., Казаков А. Я.

Рассматриваются факторы, ограничивающие точность измерения малых смещений лазерно-интерферометрическими системами и вызванные наличием в светопроводах остаточного газа. Показано, что при давлении остаточного газа 10^{-5}—10^{-6} мм рт. ст. и фильтрации выходного сигнала шумы, связанные с этими явлениями, можно снизить до величин, приемлемых для гравитационных систем.

Чувствительность интерференционных измерений смещений достигла 10^{-12}—10^{-13} см [1-3] и приближается к пределу, определяемому дробовым шумом фотоприема [4]. Для достижения подобных результатов на практике требуется исключить или свести до минимума воздействие значительного числа факторов, ограничивающих чувствительность интерферометрической системы. Целый ряд таких ограничений вызван наличием остаточного газа в высокочувствительных интерферометрах. С особой тщательностью следует рассматривать связанные с этим явления при создании лазерно-интерферометрических гравитационных антенн (ЛИГА), предназначенных для детектирования гравитационного излучения от космических источников [4]. Принцип действия ЛИГА основан на регистрации относительных перемещений свободноподвешенных пробных тел, вызываемых воздействием гравитационной волны. Для обнаружения гравитационных волн от космических источников ЛИГА должна разрешать относительные смещения $\Delta l/l$, не превышающие 10^{-19} [5]. ЛИГА может быть построена на основе двухлучевой или многолучевой интерференционной схемы [4, 6], причем база (длина плеча) интерферометра должна составлять 10^4—10^5 см. Высокая чувствительность интерференционных измерений и большая база ЛИГА требуют детального изучения влияния остаточного газа на выходной сигнал интерферометра.

Зеркала и светоделители, являющиеся элементами интерференционной схемы ЛИГА, размещаются на подвешенных пробных телах и представляют собой по существу механические осцилляторы. С учетом этого мы рассмотрим следующие явления, связанные с наличием остаточного газа в светопроводах.

А. Колебания стенок светопроводов, в которых размещены плечи интерферометра, вызванные, в частности, воздействием сейсмических волн, передаются через остаточный газ на подвешенные элементы интерферометрической системы.

Б. Колебания температуры стенок светопроводов передаются через остаточный газ на зеркала и вызывают за счет теплового расширения изменения их геометрических размеров.

В. Поверхность зеркала хаотически движется под влиянием тепловых колебаний; даже при охлажденных зеркалах флуктуации давления газа, имеющего температуру стенок сосуда, вынуждают поверхность зеркал хаотически колебаться.

Г. Флуктуации числа молекул газа справа и слева от зеркала (если объемы справа и слева от зеркала не изолированы друг от друга) приводят к флуктуации оптического пути луча, приходящего к зеркалу справа или слева.

Д. Рассеянное остаточным газом излучение искажает интерференционную картину.

Мы полагаем, что газ в интерферометрической системе находится при среднем или высоком вакууме и используем следующие обозначения: S — площадь зеркала, M — его масса, ρ, p, n — соответственно плотность газа, его давление и число молекул в 1 см^3, T — температура газа, m — масса молекулы газа, k — постоянная Больцмана.

При описании явления, указанного в п. А, будем исходить из следующей картины. Зеркало расположено перпендикулярно оси цилиндрического световода на расстоянии L от его торца, колеблющегося с частотой ω_1 и амплитудой a. Отражение молекул газа от движущейся стенки приводит к распространению волны избыточного давления.

Пренебрегая эффектами, вносимыми столкновениями молекул и отличием распределения скоростей молекул, подлетающих к стенке, от максвелловского, находим выражение для силы, действующей на зеркало [7],

$$F(t) = a\omega_1 S\rho \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \int_0^\infty e^{-y} \qquad \left(t - \frac{L}{\sqrt{y}} \sqrt{\frac{m}{2kT}}\right) dy.$$

Эту формулу можно записать в виде

$$F(t) = a\omega_1 S\rho \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \chi(\nu) \cos(\omega_1 t + \psi(\nu)),$$

где

$$\nu = \omega_1 L \sqrt{\frac{m}{2kT}}.$$

При малых или больших значениях ν можно выписать асимптотику для $\chi(\nu)$ [7]. Нас интересует газ (воздух) при комнатной температуре, причем $\omega_1 \sim 10^2$ Гц, $L \sim 10 \div 10^2$ см. При этих значениях параметров значения ν находятся в промежуточной области. Однако порядок величины $\chi(\nu)$ можно оценить: $\chi(\nu) \sim 0.5 \div 3$. Если частота колебаний зеркала на подвесе ω, а коэффициент трения μ_1, то движение зеркала описывается уравнением

$$M\ddot{x} + \mu_1 \dot{x} + M\omega^2 x = a\omega_1 S\rho\chi(\nu) \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \cos(\omega_1 t + \psi(\nu)). \qquad (1)$$

Отсюда мы находим $x(t)$, а затем определяем максимум модуля этой величины как функции от t

$$|x(t)| \leqslant y(\omega_1) = a\omega_1 S\rho\chi(\nu) \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} [M^2(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + \mu_1^2\omega_1^2]^{-1/2}. \qquad (2)$$

При $\omega_1 = \omega$ $y(\omega_1)$ достигает наибольшего значения

$$y(\omega) = \frac{aS\rho}{\mu_1} \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \chi(\nu). \qquad (3)$$

При комнатной температуре $\rho = 10^{-3-\gamma}$ г·см$^{-3}$ ($\gamma = \log_{10}(p/p_0)$, где $p_0 = 760$ мм рт. ст.), $S = 10$ см^2, $a = 10^{-3}$ см, $M = 10^2$ г, $\omega = 1$ Гц и, считая, что $\mu_1 = M\omega Q^{-1}$, где Q — добротность системы подвес-зеркало, получим для $Q \sim 10^5$

$$y(\omega) \sim 10^{-\gamma} \text{ см}.$$

Можно добиться снижения влияния рассматриваемого фактора, если у сигнала, снимаемого с фотодетектора, отфильтровывать частоты ниже Ω, причем $\Omega \gg \omega$ (именно такая ситуация возникает при использовании ЛИГА для обнаружения гравитационных волн частоты, большей чем Ω). Согласно этой процедуре, нам надо оценить максимум модуля функции

$$x_\Omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{-\Omega} + \int_{\Omega}^{\infty}\right] \exp(i\omega t)\, x(\omega)\, d\omega,$$

где $x(\omega)$ — Фурье-образ $x(t)$. Для этого достаточно использовать вместо (3) соотношение (2) при $\omega_1 = \Omega$

$$y(\Omega) \approx \frac{aS\rho}{M\Omega} \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\, \chi(\nu).$$

При $\Omega \sim 10^2$ Гц и тех же значениях остальных параметров

$$y(\Omega) \sim 10^{-7-\gamma} \text{ см}.$$

Рассмотрим теперь процесс передачи остаточным газом колебаний температуры стенок светопровода на зеркала (п. Б). Упрощая картину явления (и завышая конечные оценки), мы будем считать, что молекулы газа, ударяющиеся в зеркало, имеют температуру стенок сосуда $T+f(t)$ и при соударении передают зеркалу с температурой $T+\Delta T(t)$ энергию $k[(f(t)-\Delta T(t)]/2$. Пусть коэффициент теплоемкости для зеркала равен c, площадь всей его поверхности равна S_1, средняя тепловая скорость молекулы газа $\bar{v}$. Пренебрегая процессами переноса тепла в зеркале, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\Delta T(t) = \varkappa\,[f(t) - \Delta T(t)], \qquad \varkappa = kn\bar{v}S_1/2cM,$$

откуда

$$\Delta T(t) = \varkappa \int_0^t \exp[-\varkappa(t-y)]\, f(y)\, dy.$$

Пусть коэффициент теплового расширения для зеркала α, толщина зеркала d. Тогда рассматриваемое явление приведет к появлению набега фазы отраженной от зеркала волны, равному

$$\Delta x(t) = \alpha\varkappa d \int_0^t \exp[-\varkappa(t-y)]\, f(y)\, dy.$$

Если $f(t) = \delta T \cos\omega_1 t$, то

$$\Delta x(t) = \alpha\varkappa d\delta T \left\{ \frac{\varkappa\cos\omega_1 t - \omega_1 \sin\omega_1 t}{\varkappa^2 + \omega_1^2} - \frac{2\varkappa^2}{\pi(\varkappa^2+\omega_1^2)} \int_0^\infty \frac{\cos\omega_2 t\, d\omega_2}{\varkappa^2 + \omega_2^2} \right\}.$$

При интересующих нас значениях параметров $\varkappa \ll \omega_1 \ll 1$ Гц и

$$|\Delta x(t)| \approx \frac{\alpha\varkappa d\delta T}{\omega_1}.$$

Применяя, как и в предыдущем пункте, фильтрацию сигнала, находим (полагая $\Omega \gg \omega_1$)

$$|\Delta x_\Omega(t)| \approx \frac{\alpha\varkappa d\delta T}{\Omega}.$$

Для оценок положим: $n = 3\cdot 10^{19-\gamma}$ см$^{-3}$, $T = 300$ K, $\delta T = 1$ K, $S_1 = 20$ см^2, $M = 100$ г, $d = 1$ см, $\alpha = 10^{-6}$ K^{-1}, $c = 5\cdot 10^6$ эрг/(г·K) $\Omega = 100$ Гц. Тогда

$$|\Delta x_\Omega(t)| \approx 4\cdot 10^{-8-\gamma} \text{ см}.$$

Флуктуации давления газа и тепловые колебания подвеса приводят к флуктуациям положения зеркала (п. В). Уравнение движения зеркала

$$M\ddot{x} + (\mu_1 + \mu_2)\dot{x} + M\omega^2 x = F_1(t) + F_2(t). \tag{4}$$

Здесь $F_1(t)$ и $F_2(t)$ — случайные силы, действующие на зеркало со стороны подвеса и газа; μ_2 — коэффициент трения, вносимого наличием остаточного газа. Последнюю величину нетрудно вычислить, используя элементарную кинетическую теорию,

$$\mu_2 = 4Sp\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}.$$

Наша цель — вычислить $\overline{|x(t)|^2}$. $F_1(t)$ и $F_2(t)$ статистически независимы, причем $\overline{F_{1,2}(t)}=0$. Из (4) следует

$$\overline{|x(t)|^2}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_1dk_2\exp[ik_2t-ik_1t]\left[\overline{F_1(k_1)F_1^*(k_2)}+\overline{F_2(k_1)F_2^*(k_2)}\right]}{[M(\omega^2-k_1^2)-i(\mu_1+\mu_2)k_1][M(\omega^2-k_2^2)-i(\mu_1+\mu_2)k_2]}. \quad (5)$$

Известна статистика отклонений подвеса как в случае отсутствия газа (т. е. при $\mu_2=0$), так и без учета тепловых колебаний подвеса (т. е. при $\mu_1=0$) [8]

$$\overline{|x_1(t)|^2}=\frac{kT_1}{M\omega^2}, \quad \overline{|x_2(t)|^2}=\frac{kT}{M\omega^2}. \quad (6)$$

Здесь T — температура газа, T_1 — температура системы подвес-зеркало. Известно также, что дисперсия случайной силы прямо пропорциональна μ [8], так что числитель подынтегрального выражения в (5) есть линейная комбинация μ_1 и μ_2. С другой стороны, как следует из (5), в окончательное выражение для $\overline{|x(t)|^2}$ должна входить комбинация $(\mu_1+\mu_2)$, причем так, чтобы при $\mu_2=0$ или $\mu_1=0$ получались формулы (6). Единственная формула, удовлетворяющая этим ограничениям, дает искомый результат

$$\overline{|x(t)|^2}=\frac{k}{M\omega^2}\frac{\mu_1T_1+\mu_2T}{\mu_1+\mu_2}.$$

Из этой формулы следует, что при давлениях, меньших чем 10^{-2} мм рт. ст. и $T_1>4$ К, $T\sim300$ К, $\mu_2T\ll\mu_1T_1$ и влиянием остаточного газа можно пренебречь. При тех же значениях M, ω, что и в п. А, $T_1\simeq300$ К,

$$\sqrt{\overline{|x(t)|^2}}\approx\sqrt{\frac{kT_1}{M\omega^2}}\approx 6\cdot10^{-10} \text{ см.}$$

Уменьшить эту величину можно за счет понижения T_1. Однако эта возможность трудно реализуема на практике. Другой подход к этой проблеме — фильтрация низких частот. Мы вычислим $\overline{|x_\Omega(t)|^2}$, где

$$x_\Omega(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{-\infty}^{-\Omega}+\int\limits_{\Omega}^{\infty}\right]dk_1\frac{\exp(-ik_1t)F_1(k_1)}{M(\omega^2-k_1^2)+i\mu_1k_1}.$$

Согласно [8],

$$\overline{F_1(k_1)F_1^*(k_2)}=2\mu_1kT\delta(k_1-k_2),$$

откуда

$$\overline{|x_\Omega(t)|^2}=\frac{2\mu_1kT_1}{\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{-\Omega}+\int\limits_{\Omega}^{\infty}\right]\frac{dk_1}{|M(\omega^2-k_1^2)+i\mu_1k_1|^2}.$$

Считая, что $\mu_1\ll M\Omega$, $\omega\ll\Omega$, находим

$$\sqrt{\overline{|x_\Omega(t)|^2}}\approx\sqrt{\frac{2\mu_1kT_1}{3\pi M^2\Omega^3}}.$$

При $T_1\sim300$ К, $\Omega\sim100$ Гц и тех же, что и ранее, значениях остальных параметров

$$\sqrt{\overline{|x_\Omega(t)|^2}}\sim10^{-15} \text{ см.}$$

Таким образом, фильтрация дает возможность получить удовлетворительный результат даже без охлаждения системы подвес-зеркало.

При оценке влияния фактора, описанного в п. Г, будем считать, что плоскость зеркала, расположенного перпендикулярно оси цилиндрического сосуда, разделяет сосуд на части объема V_1, V_2 (мы пренебрегаем толщиной зеркала). Рассматривая флуктуации числа частиц в V_1 и V_2, получаем соотношение

$$\overline{(\Delta N_1)^2}=\overline{(\Delta N_2)^2}=\frac{nV_1V_2}{V_1+V_2}.$$

Стандартный результат [8] соответствует значению $V_1=\infty$. При не очень больших плотностях газа справедливо следующее следствие закона Лоренц—Лорентца:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 + Dn(\mathbf{r}), \tag{7}$$

где $n(\mathbf{r})$ — плотность числа частиц в точке $\mathbf{r}$, $\varepsilon(\mathbf{r})$ — диэлектрическая проницаемость газа, D — характерная для газа константа. Флуктуация ΔN_1 приводит к флуктуации оптического пути луча, идущего вдоль оси светопровода к зеркалу,

$$\Delta x = \eta \frac{D}{2} \Delta n = \eta \frac{D \Delta N_1}{2 S_2},$$

где S_2 — площадь поперечного сечения сосуда, η — множитель, зависящий от конкретной оптической схемы прибора и учитывающий число прохождений лучом данного отрезка. Таким образом,

$$\overline{(\Delta x)^2} = \left(\frac{D\eta}{2S_2}\right)^2 \frac{nV_1V_2}{V_1+V_2}. \tag{8}$$

Для воздуха при комнатной температуре $D=2\cdot10^{-23}$ см$^{-3}$. Если $S_2=20$ см^2, $\eta=1$, $n=3\cdot10^{19-\gamma}$ см$^{-3}$, $V_1=V_2$, длина сосуда 10^3 см, то

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} \approx 10^{-11-\gamma/2} \text{ см}.$$

Если отфильтровать низкие частоты, то соответствующий результат будет отличаться от (8) множителем π^{-1} arctg Ω, где

$$\varkappa = S_3 \frac{V_1+V_2}{V_1V_2} \sqrt{\frac{nkT}{2\pi}},$$

S_3 — площадь зазора между зеркалом и стенкой сосуда. При $S_3 \sim 10^2$ см^2 и прежних значениях остальных параметров этот множитель влияет на окончательный результат незначительно.

Наличие флуктуаций $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ приводит к рассеянию на них излучения [9] (п. Д). Для наших оценок достаточно считать поле скалярным.

Координату вдоль оси цилиндра (светопровода) будем обозначать x. Пусть вдоль оси цилиндра распространяется плоская волна $\exp(ik_0x)$. Используя результаты [9], выпишем выражение для поля излучения, включающего прямое и рассеянное в объеме V, через который прошла волна,

$$u(\mathbf{r}) = \exp(ikx) + \frac{k_0^2}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| + ikx_1]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} M(\mathbf{r}_1)\, \delta\varepsilon(\mathbf{r}_1)\, d^3\mathbf{r}_1.$$

Здесь

$$k = k_0\left(1 + \frac{Dn}{2}\right),$$

функция $M(\mathbf{r})$ есть характеристическая функция объема V. Вычислим флуктуации интенсивности рассеянного излучения. В [9] получена формула

$$\overline{(\Delta I)^2} = |\psi_u|^2, \tag{9}$$

где $\psi_u(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ — функция корреляции для поля излучения. Ее нетрудно вычислить

$$\psi_u(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{k_0^4}{(4\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 M(\mathbf{r}_1) M(\mathbf{r}_2) \overline{\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1)\, \delta\varepsilon(\mathbf{r}_2)} \times$$

$$\times \frac{\exp[ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| - ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| + ik(x_1-x_2)]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}.$$

Используя (7) и полагая

$$\overline{\delta n(\mathbf{r}_1)\, \delta n(\mathbf{r}_2)} = n(\mathbf{r}_1)\, \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

находим

$$\psi_u(\mathbf{r},\ \mathbf{r}) = \frac{k_0^4}{(4\pi)^2} D^2 n L(\mathbf{r}),$$

где

$$L(\mathbf{r}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{M(\mathbf{r}_1)\, d^3\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^2}$$

— эффективный геометрический размер области, слабо зависящий от $\mathbf{r}$. Из (9) следует, что

$$\sqrt{\overline{(\Delta I)^2}} = \frac{k_0^4}{(4\pi)^2} D^2 n L. \tag{10}$$

Если мы измеряем малые смещения, находясь при первоначальной настройке на склоне интерференционной полосы $I(x) = 2\cos^2 kx$, т. е. при $kx_0 = \pi/4$, среднеквадратичная ошибка измерения, соответствующая (10), есть

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} = \frac{k_0^3}{(4\pi)^2} D^2 n L.$$

При $n = 3 \cdot 10^{19-\gamma}$ см$^{-3}$, $k_0 = 2 \cdot 10^4$ см$^{-1}$, $L \sim 10^2$ см, $D = 2 \cdot 10^{-23}$ см$^{-3}$

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} \sim 10^{-12-\gamma}\ \text{см}.$$

Из наших результатов следует, что для изучаемой модели ЛИГА при давлениях, меньших чем 10^{-5}—10^{-6} мм рт. ст., используя фильтрацию сигнала, можно уменьшить влияние рассмотренных факторов на выходной сигнал до приемлемой величины, т. е. снизить амплитуду флуктуаций оптического пути до значений менее 10^{-15} см.

В работе использовался аппарат классической физики, однако при рассмотрении смещений, меньших чем 10^{-15} см (для наших значений параметров осциллятора), необходимо использовать квантово-механические оценки и расчеты.

Авторы благодарны Н. А. Разумовскому за ценные дискуссии.

Литература

[1] Moss G. E., Miller L. R., Forward R. L. — Appl. Opt., 1971, v. 10, N 10, p. 2495.
[2] Billing H. e. a. — J. Phys. E, 1979, v. 12, N 1, p. 1043.
[3] Forward R. L. — Phys Rev., 1978, v. 17, N 2, p. 379.
[4] Витушкин Л. Ф., Ивановская М. И., Колосницын Н. И. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1981, в. 12, с. 102.
[5] Руденко В. Н. — УФН, 1978, т. 126, в. 3, с. 361.
[6] Алексеев А. Д., Витушкин Л. Ф., Колосницын Н. И., Московкин В. М. — ЖЭТФ, 1980, т. 79, в. 4, с. 1141.
[7] Физическая акустика. Т. 2, Ч. А. М., 1968. 485 с.
[8] Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М., 1982. 608 с.
[9] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М., 1978. 463 с.

Поступило в Редакцию 27 февраля 1985 г.