УДК 512.12:378.147-057.875:001.89

Г. Н. Казимиров
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ПРОГРЕССИЙ В РАМКАХ СПЕЦКУРСА И ЛАБОРАТОРИИ СНИЛ

Продолжая методику повторения школьного курса блочным методом, обратимся к теме арифметической и геометрической прогрессий. Ранее это было предложено применительно к теме "Тригонометрия" (см. [1]). При изучении прогрессий вполне несложно заметить аналогию в определениях и доказательствах основных формул по этой теме.

Рассмотрим определения этих прогрессий.

Определение 1. Числовая последовательность (a_n), у которой каждый следующий член получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа d, называется **арифметической прогрессией.**

Определение 2. Числовая последовательность (b_n), у которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на одно и то же числа q, называется **геометрической прогрессией.**

Обычно в определении геометрической прогрессии указывают, что $q\neq 0$. Однако это не обязательно. Просто в этом случае получается неинтересная последовательность. Теперь, если сравнить определения 1 и 2, то они отличаются только тем, что в определении 2 используется умножение вместо сложения.

Сравним теперь свойства этих прогрессий.

Утверждение 1. Для *n-го* члена арифметической прогрессии справедлива формула

$a_n = a_1 +(n-1)d$

Доказательство: $a_2 = a_1 +d$

$a_3 = a_2 +d$

…………

$a_n = a_{n-1} +d$

Складывая левые и правые части этих равенств, получим

$a_2+a_3+\ldots+a_n= a_1+a_2 +\ldots+ a_{n-1}+(n-1)d$

Убирая в этом равенстве одну и ту же сумму $a_2 +\ldots+ a_{n-1}$, получим требуемую формулу.

Утверждение 2. Для *n-го* члена геометрической прогрессии справедлива формула

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Доказательство: $b_2 = b_1 \cdot q$

$b_3 = b_2 \cdot q$

…………

$b_n = b_{n-1} \cdot q$

Перемножая левые и правые части этих равенств, получим

$b_2 \cdot b_3 \cdot\ldots\cdot b_n= b_1 \cdot b_2 \cdot\ldots\cdot b_{n-1} \cdot q^{n-1}$

Убирая в этом равенстве один и тот же множитель $b_2\cdot\ldots\cdot b_{n-1}$, получим требуемую формулу.

Мы видим, что если в формулировке и доказательстве утверждения 1 заменить сложение умножением, то получим утверждение 2.

Сравним теперь следующие два свойства и их доказательства.

Утверждение 3. Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда $\forall n \in N, n \geq 2$ выполняется равенство

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \qquad (1)$$

Доказательство: Пусть (a_n)-арифметическая прогрессия с разностью d. В силу определения $a_{n-1} = a_n-d$ *и* $a_{n+1} = a_n+d$. Складывая эти равенства, получим условие (1). Обратно. Пусть выполнено (1). Тогда 2 $a_n= a_{n-1}+ a_{n+1}$. Или

a_n- a_{n-1}= a_{n+1}.- a_n. Что и означает, что (a_n)-арифметическая прогрессия.

Утверждение 4. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $\forall n \in N, n \geq 2$ выполняется равенство

b_n^2= $b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ (2)

Доказательство: Пусть (b_n)-геометрическая прогрессия со знаменателем q ($q \neq 0$) . При $q=0$ равенство (2) очевидно. В силу определения $b_{n-1}=\frac{b_n}{q}$ и b_{n+1} =$b_n \cdot q$. Перемножая эти равенства, получим условие (2). Обратно. Пусть выполнено (2). Тогда

$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{b_{n+1}}{b_n}$

Что и означает, что (b_n)-геометрическая прогрессия.

Мы опять видим полную аналогию в формулировках и доказательствах утверждений 3 и 4.

Полная аналогия сохраняется и в следующих утверждениях и их доказательствах.

Утверждение 5. Если (a_n)-арифметическая прогрессия и $m+p=k+s$, то $a_m+a_p= a_k+a_s$.

Утверждение 5. Если (b_n)-геометрическая прогрессия и $m+p=k+s$, то $b_m \cdot b_p= b_k \cdot b_s$.

Разница наблюдается лишь в доказательствах формул суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий, поскольку и в одном и другом случае находится сумма, а не произведение.

Указанную методическую схему можно использовать для подготовки уроков по повторению, закреплению и обобщению формул для прогрессий. Дело в том, что проблемы при решении задач на прогрессии у школьников возникают чаще всего из-за незнания формул. Если же знать их вывод и отмеченную аналогию, то их можно быстрее воспроизвести и запоминать меньше действий.

Автор успешно использовал эту схему в рамках лаборатории СНИЛ по развивающему обучению на начальных курсах факультета математики и технологий программирования [2, с. 252-254] , а также на спецкурсе «Методика решения задач школьной математики».

Литература

1. Казимиров, Г. Н. Методика изучения школьного курса тригонометрии / Г. Н. Казимиров // Современное образование: преемственность и непрерывность образовательной системы «школа – университет – предприятие» [Электронный ресурс] : XIII международная научно-методическая конференция (Гомель, 11–12 февр. 2021 г.) : [материалы] / М-во образования Респ. Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: И. В. Семченко (гл. ред.) [и др.]. – Электрон. текст. данные (7,64 МБ). – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2021. – С. 273-275.

2. Казимиров, Г.Н. Некоторые аспекты коррекции школьной и вузовской подготовки в рамках СНИЛ «Методические проблемы развивающего образования» / Г. Н. Казимиров // Актуальные вопросы научно-методической и учебно-организационной работы: сочетание классических подходов и инновационных организационно-образовательных моделей и технологий [Электронный ресурс] : материалы респ. науч.-метод. конф. (Гомель, 12-13 марта 2020 года) / М-во образования Респ. Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: И. В. Семченко (гл.ред.) [и др.]. – Электронные текстовые данные (объем 10,5 Мб). – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2020. – С. 252–254.

3. Латотин, Л. А. Математика : учеб. пособие для 10-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский ; пер. с белорус. яз. Л. В. Латотиной. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2013. – 408 с. : ил.