

Термосиловое нагружение трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем на упругом основании

Д.В. ЛЕОНЕНКО

Исследован термосиловый изгиб несимметричного по толщине трехслойного стержня с жестким сжимаемым наполнителем, связанного с упругим основанием. В несущих слоях стержня используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина в температурном поле. Наполнитель – нелинейно-упругий. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Реакция основания описывается моделью Винклера. Рассмотрена зависимость перемещений и напряжений в стержне от геометрических и упругих характеристик слоев, жесткости упругого основания. Показано, что с ростом коэффициента жесткости перемещения уменьшаются, а скорость сходимости метода упругих решений возрастает.

Ключевые слова: нагружение, стержень, изгиб, наполнитель, основание.

The thermal-force bending of an asymmetric through thickness three-layer rod having a rigid compressible filler and fixed on an elastic foundation has been studied. In the bearing layers of the rod, the physical equations of state of the theory of small elastoplastic deformations of Ilyushin in a temperature field are used. The faces of the rod rest freely upon immovable in space rigid supports. The foundation reaction was described by Winkler's model. The dependence of displacements and stresses in the rod versus geometric and elastic characteristics of the layers and stiffness of the elastic foundations has been considered. It has been proved that with increasing stiffness coefficient the displacements diminish while the convergence rate of the method of elastic solutions grows.

Keywords: loading, rod, bend, filler, base.

Введение. Трехслойные конструкции нашли широкое применение в промышленности и строительстве. Основные геометрические гипотезы деформирования слоистых, в том числе трехслойных элементов конструкций, приведены в монографии [1]. Динамическое и квазистатическое деформирование упругих и физически нелинейных трехслойных стержней, не связанных с упругим основанием, аналитически и численно исследовано в работах [2]–[4] и др. В статьях [5], [6] рассмотрено изотермическое деформирование трехслойных пластин и панелей, связанных и не связанных с упругим основанием.

Здесь приводится постановка и решение краевой задачи о термосиловом изгибе трехслойного упругопластического стержня, покоящегося на упругом основании, со сжимаемым физически нелинейным наполнителем.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень со сжимаемым наполнителем, несущие слои которого выполнены из упругопластического материала, а наполнитель – нелинейно-упругий. Для описания кинематики пакета приняты следующие предположения: в несущих слоях выполняются гипотезы Бернулли, в жестком наполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев не сжимаемы в поперечном направлении. Деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя – слоя 3 (рисунок 1). Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены искомые функции – прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; h_k – толщина k -го слоя, в наполнителе – $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$); b_0 – ширина стержня. Распределенная поверхностная нагрузка $q(x)$ приложена к первому слою. На внешнюю поверхность второго (нижнего) несущего слоя действует реакция основания $q_R(x)$.

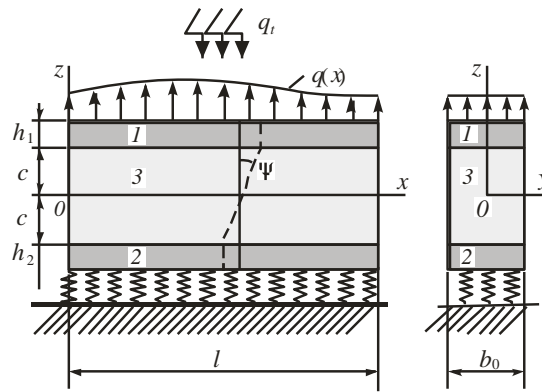


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойного стержня

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ выражаются через четыре искомые функции:

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} &= u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, & w^{(1)} &= w_1 & (c \leq z \leq c + h_1), \\
 u^{(2)} &= u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, & w^{(2)} &= w_2 & (-c - h_2 \leq z \leq -c), \\
 u^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right), \\
 w^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 & (-c \leq z \leq c),
 \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях выражаются через искомые функции с помощью (1) и соотношений Коши. Шаровая и девиаторная части тензора деформаций будут следующими ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}$; $i, j = x, y, z$):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{(k)} &= \frac{1}{3} \varepsilon_x^{(k)}, & \varepsilon_x^{(k)} &= \frac{2}{3} \varepsilon_x^{(k)} & (k=1, 2), \\
 \varepsilon^{(3)} &= \frac{1}{3} (\varepsilon_x^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), & \varepsilon_x^{(3)} &= \frac{2}{3} \varepsilon_x^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_z^{(3)}.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Введем внутренние усилия и моменты в слоях стержня:

$$\begin{aligned}
 N_x^{(k)} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz; & M_x^{(k)} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \\
 Q^{(3)} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz; & N_z^{(3)} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} dz; & M_{xz}^{(3)} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz,
 \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_z^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений, b_0 – ширина поперечного сечения.

Связь между реакцией основания и прогибом принимаем согласно гипотезе Винклера:

$$q_R = \kappa_0 w_2,$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Уравнения равновесия рассматриваемого стержня следуют из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A_e - \delta A_i = 0, \quad (4)$$

где δA_e – вариация работы внешних сил; δA_i – вариация работы внутренних сил упругости;

$$\delta A_e = b_0 \int_0^l (q \delta w_1 - q_R \delta w_2) dx,$$

$$\delta A_i = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz \right] dx. \quad (5)$$

Выразив деформации в (5) деформации через перемещения и приравняв коэффициенты при независимых вариациях нулю, получим следующую систему уравнений равновесия в усилиях:

$$\begin{cases} H_1 - P_{1,x} = 0, \\ H_1 + P_{2,x} = 0, \\ S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x} = b_0 q, \\ S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x} = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

и силовые граничные условия при $x = 0, l$:

$$P_1 = N_p^{(1)}, P_2 = N_p^{(2)}, T_1 - S_{1,x} = Q_p^{(1)}, T_2 - S_{2,x} = Q_p^{(2)}, S_1 = M_p^{(1)}, S_2 = M_p^{(2)}.$$

Здесь $N_p^{(1)}, Q_p^{(1)}, M_p^{(1)}, N_p^{(2)}, Q_p^{(2)}, M_p^{(2)}$ – заданные усилия на торцах стержня в несущих слоях; индекс $p = 0, l$ указывает, на каком конце стержня они приложены.

В слоях стержня используются физические уравнения состояния теории малых упруго-пластических деформаций Ильюшина [7] с учетом воздействия неоднородного температурного поля T :

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k(T_k)(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k))\varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T_k) \quad (k=1, 2, 3; i, j=x, y, z), \end{aligned} \quad (7)$$

где $s_{ij}^{(k)}, \sigma^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений; и деформаций; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое

$$= \varepsilon_u^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^{(k)} - \varepsilon_{yy}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{yy}^{(k)} - \varepsilon_{zz}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{zz}^{(k)} - \varepsilon_{xx}^{(k)})^2 + 6((\varepsilon_{xy}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{yz}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{zx}^{(k)})^2)};$$

$\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – функции пластичности Ильюшина в несущих слоях ($k = 1, 2$), которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}(T_k)$ следует положить равной нулю; $\varepsilon_y^{(k)}(T_k)$ – температурно зависимый предел текучести материалов несущих слоев; $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, T_k)$ – универсальная функция физической нелинейности наполнителя, равная нулю при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}(T_k)$, $\varepsilon_s^{(3)}(T_k)$ – предел физической нелинейности материала наполнителя; $G_k(T), K_k(T)$ – модули сдвиговой и объемной деформаций, α_{0k} – коэффициент температурного расширения материала.

Исходя из соотношений (7) выделим в напряжениях упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») слагаемые. С учетом формул (2) получим:

– в несущих слоях ($k = 1, 2$)

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \sigma_{xx}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{xx}^{(k)0} = 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} + 3K_k \alpha_{0k} \Delta T_k = \frac{4}{3} G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} + 3K_k \alpha_{0k} \Delta T_k;$$

– в наполнителе

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \sigma_{xx}^{(3)0} - \sigma_{xx}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xx}^{(3)0} = 2G_3 \varepsilon_{xx}^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)},$$

$$\sigma_{xx}^{(3)\omega} = 2G_3 \varepsilon_{xx}^{(3)} \omega^{(3)} + 3K_3 \alpha_{03} \Delta T_3 = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} + 3K_3 \alpha_{03} \Delta T_3,$$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)0} - \sigma_{zz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{zz}^{(3)0} = 2G_3 \varepsilon_{zz}^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)},$$

$$\sigma_{zz}^{(3)\omega} = 2G_3 \varepsilon_{zz}^{(3)} \omega^{(3)} + 3K_3 \alpha_{03} \Delta T_3 = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} + 3K_3 \alpha_{03} \Delta T_3,$$

$$\sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)0} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)0} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, \quad \sigma_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}. \quad (8)$$

Проведя подобную (8) операцию с внутренними усилиями (3), получим:

$$N_x^{(k)} = N_x^{(k)0} - N_x^{(k)\omega}; \quad N_z^{(3)} = N_z^{(3)0} - N_z^{(3)\omega}; \quad M_x^{(k)} = M_x^{(k)0} - M_x^{(k)\omega}$$

$$M_{xz}^{(3)} = M_{xz}^{(3)0} - M_{xz}^{(3)\omega}; \quad Q^{(3)} = Q^{(3)0} - Q^{(3)\omega}. \quad (9)$$

Линейные (с индексом «0») и дополнительные (с индексом « ω ») составляющие во внутренних усилиях (9) вычисляются по формулам, следующим из (3), (8):

– в несущих слоях ($k = 1, 2$)

$$\begin{aligned} N_x^{(k)0} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)0} dz = b_0 \int_{h_k} K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)} dz, \quad M_x^{(k)0} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)0} z dz = b_0 \int_{h_k} K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)} z dz, \\ N_x^{(k)\omega} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)\omega} dz = \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \varepsilon_{xx}^{(k)\omega} dz + 3b_0 \int_{h_k} K_k \alpha_{0k} \Delta T_k dz, \\ M_x^{(k)\omega} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)\omega} z dz = \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \varepsilon_{xx}^{(k)\omega} z dz + 3b_0 \int_{h_k} K_k \alpha_{0k} \Delta T_k z dz; \end{aligned}$$

– в заполнителе

$$\begin{aligned} N_x^{(3)0} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)0} dz = b_0 \int_{h_3} K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)} dz, \quad N_z^{(3)0} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)0} dz = b_0 \int_{h_3} K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)} dz, \\ N_x^{(3)\omega} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega} dz = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} dz + 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} \Delta T_3 dz, \\ N_z^{(3)\omega} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)\omega} dz = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} dz + 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} \Delta T_3 dz, \\ M_x^{(3)0} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)0} z dz = b_0 \int_{h_3} K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)} z dz, \\ M_x^{(3)\omega} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega} z dz = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} z dz + 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} \Delta T_3 z dz, \\ Q^{(3)0} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)0} dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)0} dz, \quad Q^{(3)\omega} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)\omega} dz, \\ M_{xz}^{(3)0} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)0} z dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)0} z dz, \quad M_{xz}^{(3)\omega} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} z dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)\omega} z dz. \end{aligned} \quad (10)$$

В усилиях $Q^{(3)\omega}$, $M_{xz}^{(3)\omega}$ температурные слагаемые отсутствуют.

После подстановки в (6) выражений для напряжений и внутренних усилий (8)–(10) получим систему нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,x} - a_5 u_{2,x} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} &= p_\omega, \\ -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} &= h_\omega, \\ -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\ + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 &= q + q_\omega, \\ -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\ - a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 &= g_\omega, \end{aligned} \quad (11)$$

где p_ω , h_ω , q_ω , g_ω – слагаемые, включающие функцию нелинейности и служащие поправками на тепловое воздействие, их вид будет приведен далее.

Коэффициенты a_i зависят от жесткостных параметров слоев и через них от температуры. В дальнейшем температурное поле считаем усредненным по толщине k -го слоя, иначе нарушаются принятые геометрические гипотезы о прямолинейности нормалей в слоях. В этом случае значения упругих параметров постоянно внутри каждого слоя

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}), \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}), \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z, t) dz.$$

В качестве граничных условий примем кинематические условия свободного опирания рассматриваемого упругопластического трехслойного стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в концевых сечениях стержня $x = 0, l$ (l – длина стержня) должны выполняться следующие требования по отношению к перемещениям в несущих слоях:

$$w^k = u^k,_{,x} = w^k,_{,xx} = 0 \quad k=1,2 \quad (12)$$

Присоединением условий (12) к уравнениям равновесия (11) краевая задача для перемещений при изгибе физически нелинейного трехслойного стержня замыкается.

2. Решение краевой задачи для трехслойного стержня. Для решения краевой задачи (10)–(12) применим метод линейных приближений, основанный на методе упругих решений А.А. Ильюшина [7]. В этом случае уравнения равновесия (11) переписываются в следующем итерационном виде:

$$\begin{aligned} a_1 u_1^n - a_1 u_2^n - a_4 u_1^n,_{,xx} - a_5 u_2^n,_{,xx} + a_2 w_1^n,_{,x} + a_3 w_2^n,_{,x} - 2a_6 w_1^n,_{,xxx} + a_7 w_2^n,_{,xxx} &= p_{\omega}^{n-1}, \\ -a_1 u_1^n + a_1 u_2^n - a_3 u_1^n,_{,xx} - a_9 u_2^n,_{,xx} - a_{10} w_1^n,_{,x} - a_{17} w_2^n,_{,x} - a_6 w_1^n,_{,xxx} + 2a_7 w_2^n,_{,xxx} &= h_{\omega}^{n-1}, \\ a_2 u_1^n,_{,x} - a_{10} u_2^n,_{,x} + 2a_6 u_1^n,_{,xxx} + a_6 u_2^n,_{,xxx} + a_{11} w_1^n,_{,xx} - a_{12} w_2^n,_{,xx} + \\ + a_{15} w_1^n,_{,xxxx} - a_{16} w_2^n,_{,xxxx} + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n &= q + q_{\omega}^{n-1}, \\ -a_3 u_1^n,_{,x} + a_{17} u_2^n,_{,x} - a_7 u_1^n,_{,xxx} - 2a_7 u_2^n,_{,xxx} - a_{12} w_1^n,_{,xx} + a_{14} w_2^n,_{,xx} - \\ - a_{16} w_1^n,_{,xxxx} + a_{13} w_2^n,_{,xxxx} - a_8 w_1^n + a_8 + \kappa_0 w_2^n &= g_{\omega}^{n-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где n – номер приближения.

На каждом шаге приближения должны выполняться условия свободного опирания, следующие из (11):

$$w^{kn} = u^{kn},_{,x} = w^{kn},_{,xx} = 0 \quad k=1,2, \quad (14)$$

где k – номер несущего слоя.

Величины с индексом $(n-1)$ в (13) являются поправками на физическую нелинейность материалов слоев. Они на первом шаге полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения через обобщенные внутренние усилия типа (10).

Решение системы дифференциальных уравнений (13) предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (14):

$$\begin{aligned} u_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad u_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \\ w_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad w_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$ – неизвестные амплитуды перемещений на n -м шаге.

Поперечную нагрузку $q(x)$ и дополнительные «внешние» усилия также представим в виде разложений в ряды.

Подставив выражения (15), (17) в уравнения (13) получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$:

$$\begin{cases} b_1 U_{1m}^n + b_2 U_{2m}^n + b_3 W_{1m}^n + b_4 W_{2m}^n = p_{\omega m}^{n-1}, \\ b_2 U_{1m}^n + b_5 U_{2m}^n + b_6 W_{1m}^n - b_7 W_{2m}^n = h_{\omega m}^{n-1}, \\ b_3 U_{1m}^n + b_6 U_{2m}^n + b_8 W_{1m}^n + b_9 W_{2m}^n = q_m + q_{\omega m}^{n-1}, \\ b_4 U_{1m}^n - b_7 U_{2m}^n + b_9 W_{1m}^n + b_{10} W_{2m}^n = g_{\omega m}^{n-1} \end{cases} \quad (16)$$

где b_i выражаются через коэффициенты a_n и параметр m .

Решая систему (16) любым из стандартных методов, получим коэффициенты $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ разложения в ряд искомых перемещений. Далее по формулам (15) вычисляются искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (1), напряжения – из уравнений состояния (7).

Таким образом, формулы (15)–(16) дают итерационное решение задачи о деформировании трехслойного упругопластического стержня на упругом основании.

3. Численные результаты. Численная реализация итерационного решения проведена для трехслойного стержня, набранного из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т, упругие и пластические параметры которых приведены в [8, с. 23–29]. Расчетные коэффициенты жест-

кости (МПа/м) соответствуют слабым ($\kappa_0 = 1$), средним ($\kappa_0 = 100$) и весьма жестким ($\kappa_0 = 10^5$ МПа/м) основаниям. Геометрические параметры слоев стержня: $h_1 = 0,04$, $h_2 = 0,02$, $h_3 = 0,18$. Нагрузка равномерно распределена по всей длине стержня. Ее величина подбиралась в соответствии с жесткостью основания таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени в рамках принятой модели.

Принималось, что к внешней поверхности $z = c + h_1$ рассматриваемого трехслойного стержня кроме распределенной силовой нагрузки подводится тепловой поток плотностью q_t в направлении, противоположном внешней нормали (рисунок 1). Поверхность $z = -c - h_2$ и контур стержня теплоизолированы.

Численный анализ показал сходимость метода упругих решений при изгибе упругопластического трехслойного стержня на основании *малой жесткости* ($\kappa_0 = 1$ МПа/м) и при интенсивности нагрузки $q = -6$ МПа. Здесь 7-е приближение принято за искомое решение, оно отличается от 6-го менее 1 %. Дальнейшая проверка сходимости метода показала устойчивое стремление к нулю разности между последующим и предыдущим приближениями. При исследовании изгиба трехслойных стержней, покоящихся на более жестких основаниях, сходимость метода упругих решений убыстряется за счет увеличения жесткости всей системы и уменьшения в ней перемещений. При основании средней жесткости необходимо 6 приближений, если основание высокой жесткости, то уже 3-е приближение является достаточным.

При дальнейших расчетах принималось: интенсивность поверхностной нагрузки $q_0 = -10$ МПа, интенсивность теплового потока $q_t = 5000$ Дж / ($\text{м}^2 \cdot \text{с}$), коэффициент жесткости $\kappa_0 = 100$ МПа/м. Температура вычислялась по формуле (20). Нумерация кривых везде: 1 – упругий стержень; 2 – термоупругий; 3 – термопластический.

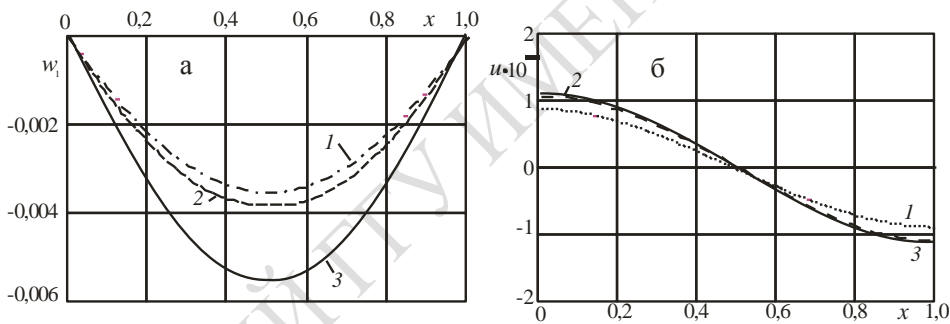


Рисунок 2 – Изменение прогиба w и продольные перемещения u в первом слое

Рисунок 2 иллюстрирует влияние температуры и физической нелинейности материалов на прогибы – a и продольные перемещения – b в первом слое. Увеличение продольных перемещений незначительно, у прогибов оно составляет в конечном итоге 53 % по сравнению с упругим.

Кривая относительной деформации ε_{zz} при воздействии температуры изменяет свою форму – кроме обжатия появляются вблизи опор зоны растяжения в заполнителе, где и достигаются максимальные значения (рисунок 3).

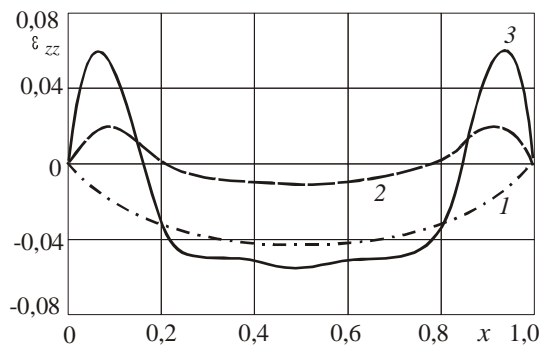


Рисунок 3 – Поперечная деформация ε_{zz} в заполнителе (в процентах)

Заключение. Предложенная методика исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней со сжимаемым заполнителем позволяет учитывать в инженерных расчетах воздействие теплового потока и физическую нелинейность материалов слоев. Численные расчеты показали их существенное влияние на напряженно-деформированное состояние в стержне.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Механика, металлургия диагностика в машиностроении» (задание № 1.40).

Литература

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Starovoitov, É.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, № 4. – P. 451–459.
3. Савицкий, Д.М. Изгиб упругого трехслойного стержня в нейтронном потоке / Д.М. Савицкий // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2014. – № 3. – С. 110–114.
4. Леоненко, Д.В. Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Д.В. Леоненко // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.
5. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.
6. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.
7. Ильюшин, А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – Ч. 1. Уругоупругие деформации. – 376 с.
8. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступила в редакцию 07.06.2018