

УДК 539.3

## Напряженно-деформированное состояние термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем

А.С. ЗЕЛЕНАЯ

Исследовано напряженно-деформированное состояние несимметричных по толщине термоупругих трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом наполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. Равномерно распределенная нагрузка приложена к внешней поверхности первого несущего слоя. Тепловой поток направлен перпендикулярно первому несущему слою. Приведены численные результаты для трехслойной металлополимерной пластины при воздействии на нее температуры.

**Ключевые слова:** трехслойная прямоугольная пластина, сжимаемый наполнитель, термоупругая пластина, напряженно-деформированное состояние.

The bending of asymmetric in thickness of elastic three-layered plates with compressible filler is investigated. The kinematic hypotheses are based on the hypothesis of broken line: the Kirchhoff hypotheses are accepted for the outer layers, the deformed normal remains rectilinear in rigid compressible filler. A uniformly distributed load is applied to the outer surface of the first bearing layer. The temperature flow is directed perpendicular to the first carrier layer. Numerical results are presented for a three-layer metal-polymer plate upon exposure to temperature.

**Keywords:** three-layer rectangular plate, compressible filler, thermoelastic plate, stress-strain state.

**Введение.** К современным конструкциям, которые используются в промышленности и строительстве, повышаются требования по прочности и весу, поэтому широкое распространение получили многослойные конструкции, частным случаем которых являются трехслойные элементы конструкций. Трехслойные элементы при рациональном сочетании материалов с различными свойствами становятся способными сопротивляться многообразным внешним воздействиям и позволяют сократить расходы в период эксплуатации. Вместе с тем, требования, которые предъявляются к ним в процессе разработки, становятся все более суровыми, так как в процессе эксплуатации, кроме силовых воздействий, они подвергаются также и воздействию температуры. В связи с этим возникает необходимость разработки новых и уточнения уже существующих методов их расчета.

В монографии [1] рассматривается деформирование трехслойных стержней в терморadiационных полях. Колебания трехслойных стержней и пластин под действием нагрузок рассмотрены в статьях [2]–[3]. Упругопластический изгиб трехслойного стержня на упругом основании рассмотрен в работе [4]. В статьях [5]–[7] исследованы пластины и стержни при воздействии температуры. Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем рассмотрено в статье [8].

Здесь выполнена постановка и решение задачи о статическом деформировании термоупругих прямоугольных трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем.

**Постановка краевой задачи.** Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная прямоугольная пластина, состоящая из двух несущих слоев и сжимаемого наполнителя. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком наполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты  $z$ . На границах контакта перемещения непрерыв-

ны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1).

Допустим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешняя распределенная нагрузка  $q$ , проекции которой на координатные оси:  $q(x, y)$ ,  $p_x(x, y)$ ,  $p_y(x, y)$ , и тепловой поток интенсивностью  $q_t$ , направленный перпендикулярно первому несущему слою.

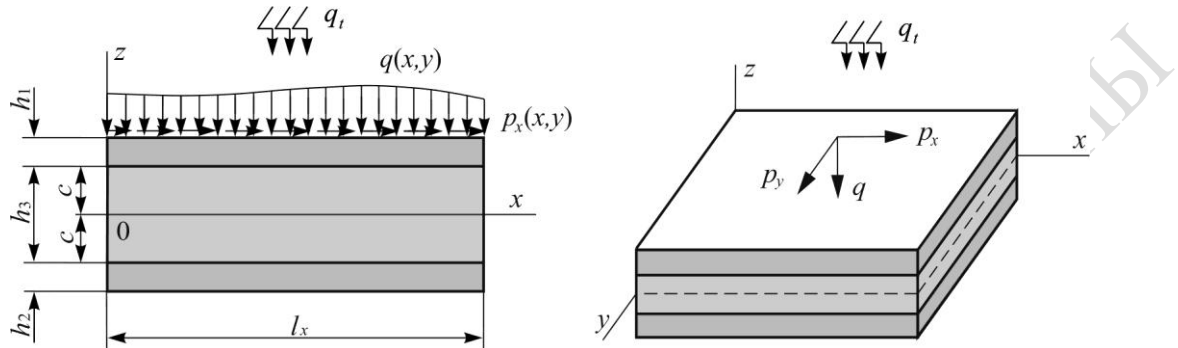


Рисунок 1 – Расчетная схема прямоугольной трехслойной пластины

Используем соотношения закона Гука в девиаторно-сферической форме в качестве физических уравнений состояния, которые в температурном поле принимают вид:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad (1)$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T_k) \quad (i, j = x, y, z, k = 1, 2, 3),$$

где  $G_k(T_k)$ ,  $K_k(T_k)$  – температурно-зависимые модули упругости материала  $k$ -го слоя,  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного удлинения,  $\Delta T_k$  – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения  $T_0$ .

Выделим в тензоре напряжений силовую (с индексом «0») и температурную (с индексом «t») составляющие в нормальных компонентах тензора напряжений.

С учетом (1) компоненты тензора напряжений в слоях пластины примут вид:

– в несущих слоях ( $k = 1, 2$ )

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \sigma_{xx}^{(k)t}, \quad \sigma_{xx}^{(k)0} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)} = K_k^+(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^-(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)t} = 3K_k\alpha_{0k}\Delta T_k,$$

$$\sigma_{yy}^{(k)} = \sigma_{yy}^{(k)0} - \sigma_{yy}^{(k)t}, \quad \sigma_{yy}^{(k)0} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)} = K_k^+(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)} + K_k^-(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)t} = 3K_k\alpha_{0k}\Delta T_k, \quad \sigma_{xy}^{(k)} = \sigma_{xy}^{(k)0} = 2G_k\varepsilon_{xy}^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)};$$

– в заполнителе

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \sigma_{xx}^{(3)0} - \sigma_{xx}^{(3)t}, \quad \sigma_{xx}^{(3)t} = 3K_3\alpha_{03}\Delta T_3,$$

$$\sigma_{xx}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + 3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)} = K_3^+(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)},$$

$$\sigma_{yy}^{(3)} = \sigma_{yy}^{(3)0} - \sigma_{yy}^{(3)t}, \quad \sigma_{yy}^{(3)t} = 3K_3\alpha_{03}\Delta T_3,$$

$$\sigma_{yy}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)} + 3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)} = K_3^+(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^-(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)},$$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)0} - \sigma_{zz}^{(3)t}, \quad \sigma_{zz}^{(3)t} = 3K_3\alpha_{03}\Delta T_3,$$

$$\sigma_{zz}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)} + 3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)} = K_3^+(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^-(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)},$$

$$\sigma_{xy}^{(3)} = \sigma_{xy}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)},$$

$$\sigma_{yz}^{(3)} = \sigma_{yz}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)}, \quad (2)$$

где  $K_k^+(T_k) = K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k)$ ,  $K_k^-(T_k) = K_k(T_k) - \frac{2}{3}G_k(T_k)$  – температурно-зависимые параметры упругости материала  $k$ -го слоя.

Аналогичную (2) операцию проводим с внутренними и обобщенными усилиями. Приведенные обобщенные усилия подставим в уравнение равновесия Лагранжа, при этом учитываем, что температура изменяется только по толщине пластины  $T_k = T_k(z)$  и поле стационарно. Переносим температурные составляющие в правую часть. Система уравнений равновесия в усилиях примет вид:

$$\begin{aligned} H_{1x}^0 - V_{1,y}^0 - P_{1x,x}^0 &= p_x, \\ H_{1x}^0 + V_{2,y}^0 + P_{2x,x}^0 &= 0, \\ H_{1y}^0 - V_{1,x}^0 - P_{1y,y}^0 &= p_y, \\ H_{1y}^0 + V_{2,x}^0 + P_{2y,y}^0 &= 0, \\ S_{1x,xx}^0 + H_2^0 - T_{1x,xx}^0 - U_{1,xy}^0 + S_{1y,yy}^0 - T_{1y,y}^0 &= q + 0,5(p_{x,x} h_1) + 0,5(p_{y,y} h_1) + H_2^t, \\ S_{2x,xx}^0 - H_2^0 - T_{2x,xx}^0 - U_{2,xy}^0 + S_{2y,yy}^0 - T_{2y,y}^0 &= -H_2^t. \end{aligned} \quad (3)$$

Задача замыкается добавлением силовых граничных условий, где при  $x = 0, l_x$  должны выполняться требования:

$$\begin{aligned} P_{1x}^0 &= N_{rx}^{(1)} + P_{1x}^t, \quad P_{2x}^0 = N_{rx}^{(2)} + P_{2x}^t, \quad V_1^0 = Q_{rxy}^{(1)}, \quad V_2^0 = Q_{rxy}^{(2)}, \quad T_{1x}^0 - S_{1x,x}^0 - U_1^0 = Q_{rx}^{(1)}, \\ T_{2x}^0 - S_{2x,x}^0 - U_{2,y}^0 &= Q_{rx}^{(2)}, \quad S_{1x}^0 = M_{rx}^{(1)} + S_{1x}^t, \quad S_{2x}^0 = M_{rx}^{(2)} + S_{2x}^t. \end{aligned}$$

При  $y = 0, l_y$

$$\begin{aligned} P_{1y}^0 &= N_{sy}^{(1)} + P_{1y}^t, \quad P_{2y}^0 = N_{sy}^{(2)} + P_{2y}^t, \quad V_1^0 = Q_{sxy}^{(1)}, \quad V_2^0 = Q_{sxy}^{(2)}, \quad T_{1y}^0 - S_{1y,y}^0 = Q_{sy}^{(1)}, \\ T_{2y}^0 - S_{2y,y}^0 &= Q_{sy}^{(2)}, \quad S_{1y}^0 = M_{sy}^{(1)} + S_{1y}^t, \quad S_{2y}^0 = M_{sy}^{(2)} + S_{2y}^t, \quad U_1^0 = Q_{sxy}^{(1)}, \quad U_2^0 = Q_{sxy}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $N_{rx}^{(p)}$ ,  $Q_{rxy}^{(p)}$ ,  $Q_{rx}^{(p)}$ ,  $M_{rx}^{(p)}$ ,  $N_{ly}^{(p)}$ ,  $Q_{sxy}^{(p)}$ ,  $Q_{sy}^{(p)}$ ,  $M_{sy}^{(p)}$  – заданные усилия на торцах пластины, где индекс  $p$  соответствует номеру несущего слоя. Индекс  $r$  принимает значения  $0, l_x$ , индекс  $s = 0, l_y$ , указывая, на каком конце пластины задано усилие.

В граничные условия (4) и уравнения равновесия (3) температура  $T(z, t)$  входит в явном виде.

Подставим в уравнения равновесия (3) выражения линейных и нелинейных составляющих внутренних усилий через искомые функции  $u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}, w_1, w_2$ . Получим систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 u_{1x} - a_1 u_{2x} - a_4 u_{1x,xx} - a_5 u_{2x,xx} - a_9 u_{1x,yy} - a_{18} u_{2x,yy} - a_{21} u_{1y,xy} - a_{23} u_{2y,xy} + a_2 w_{1,x} + \\ + a_3 w_{2,x} - 2a_{24} w_{1,xyy} + a_{25} w_{2,xyy} - 2a_{29} w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} &= p_x, \\ -a_1 u_{1x} + a_1 u_{2x} - a_5 u_{1x,xx} - a_9 u_{2x,xx} - a_{18} u_{1x,yy} - a_{20} u_{2x,yy} - a_{23} u_{1y,xy} - a_{22} u_{2y,xy} - a_{10} w_{1,x} - \\ - a_{17} w_{2,x} - a_{24} w_{1,xyy} + 2a_{25} w_{2,xyy} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_{30} w_{2,xxx} &= 0, \\ a_1 u_{1y} - a_1 u_{2y} - a_4 u_{1y,yy} - a_5 u_{2y,yy} - a_9 u_{1y,xx} - a_{18} u_{2y,xx} - a_{21} u_{1x,xy} - a_{23} u_{2x,xy} + a_2 w_{1,y} + \\ + a_3 w_{2,y} - 2a_{24} w_{1,xyy} + a_{25} w_{2,xyy} - 2a_{29} w_{1,yyy} + a_7 w_{2,yyy} &= p_y, \\ -a_1 u_{1y} + a_1 u_{2y} - a_5 u_{1y,yy} - a_9 u_{2y,yy} - a_{18} u_{1y,xx} - a_{20} u_{2y,xx} - a_{23} u_{1x,xy} - a_{22} u_{2x,xy} - a_{10} w_{1,y} - \\ - a_{17} w_{2,y} - a_{24} w_{1,xyy} + 2a_{25} w_{2,xyy} - a_6 w_{1,yyy} + 2a_{30} w_{2,yyy} &= 0, \\ -a_2 u_{1x,x} - a_2 u_{1y,y} + a_{10} u_{2x,x} + a_{10} u_{2y,y} + 2a_{29} u_{1x,xxx} + a_6 u_{2x,xxx} + 2a_{29} u_{1y,yyy} + a_6 u_{2y,yyy} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2a_{24}u_{1x,yxy} + a_{24}u_{2x,yxy} + 2a_{24}u_{1y,xyx} + a_{24}u_{2y,xyx} + a_{11}w_{1,xx} + a_{11}w_{1,yy} - a_{12}w_{2,xx} - \\
 & - a_{12}w_{2,yy} + a_{15}w_{1,xxx} + a_{15}w_{1,yyy} - a_{16}w_{2,xxx} - a_{16}w_{2,yyy} + a_{26}w_{1,xyy} - a_{28}w_{2,xyy} + \\
 & + a_8w_1 - a_8w_2 = q + 0,5(p_{x,x}h_1) + 0,5(p_{y,y}h_1) + q_t, \\
 & -a_3u_{1y,y} - a_3u_{1x,x} + a_{17}u_{2y,y} + a_{17}u_{2x,x} - a_7u_{1y,yyy} - a_7u_{1x,xxx} - 2a_{30}u_{2y,yyy} - 2a_{30}u_{2x,xxx} - \\
 & - 2a_{25}u_{2y,xyx} - a_{25}u_{1y,xyx} - 2a_{25}u_{2x,yxy} - a_{25}u_{1x,yxy} - a_{12}w_{1,xx} - a_{12}w_{1,yy} + a_{14}w_{2,xx} + a_{14}w_{2,yy} - \\
 & - a_{16}w_{1,xxx} - a_{16}w_{1,yyy} + a_{13}w_{2,xxx} + a_{13}w_{2,yyy} - a_{28}w_{1,xyy} + a_{27}w_{2,xyy} - \\
 & - a_8w_1 + a_8w_2 = g_t. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Здесь дополнительные нагрузки  $q_t = H_2^t$ ,  $g_t = -H_2^t$ , коэффициенты  $a_1, \dots, a_{30}$  определяются по интегральным формулам, учитывающими температурное изменение параметров упругости материалов по толщине пластины:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{L_0(G_3)}{4c^2}, \quad a_2 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} + \frac{L_1(G_3)}{4c^2} - \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
 a_3 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} - \frac{L_1(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \quad a_4 = L_0(K_1^+) + \frac{L_1(K_3^+)}{2c} + \frac{L_0(K_3^+)}{4} + \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \\
 a_5 &= \frac{L_0(K_3^+)}{4} - \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \quad a_6 = \frac{L_1(K_1^+)}{2} - \frac{L_0(K_1^+)}{2} \left(c + \frac{h_1}{2}\right) + \frac{h_1 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_1 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_1 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
 a_7 &= \frac{h_2}{8c^2} c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+), \quad a_8 = \frac{L_0(K_3^+)}{4c^2}, \quad a_9 = L_0(K_2^+) - \frac{L_1(K_3^+)}{2c} + \frac{L_0(K_3^+)}{4} + \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \\
 a_{10} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} + \frac{L_1(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
 a_{11} &= \frac{h_1 L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{h_1 L_1(K_3^-)}{4c^2} - \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4} - \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_1(G_3)}{2c} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
 a_{12} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2} + \frac{L_1(K_3^-)}{8c^2} (h_1 - h_2) + \frac{L_0(K_3^-)}{8c} (h_1 + h_2) - \frac{L_0(G_3)}{4c^2} (h_1 - h_2), \\
 a_{13} &= L_2(K_2^+) + L_1(K_2^+) \left(c + \frac{h_2}{2}\right) - \frac{h_2^2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_2^2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_2^2 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
 a_{14} &= \frac{h_2 L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{h_2 L_1(K_3^-)}{4c^2} - \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4} + \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_1(G_3)}{2c} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
 a_{15} &= L_2(K_1^+) - L_1(K_1^+) \left(c + \frac{h_1}{2}\right) - \frac{h_1^2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_1^2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_1^2 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
 a_{16} &= \frac{h_1 h_2}{16c^2} c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+), \quad a_{17} = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} - \frac{L_1(G_3)}{4c^2} - \frac{L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
 a_{18} &= \frac{L_0(G_3)}{4} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \quad a_{19} = L_0(G_1) + \frac{L_1(G_3)}{2c} + \frac{L_0(G_3)}{4} + \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
 a_{20} &= L_0(G_2) + \frac{L_1(G_3)}{2c} + \frac{L_0(G_3)}{4} + \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
 a_{21} &= L_0(G_1) + \frac{L_1(G_3)}{2c} + \frac{L_0(G_3)}{4} + \frac{L_2(G_3)}{4c^2} + L_0(K_1^-) + \frac{L_1(K_3^-)}{2c} + \frac{L_0(K_3^-)}{4} + \frac{L_2(K_3^-)}{4c^2}, \\
 a_{22} &= L_0(G_2) + \frac{L_1(G_3)}{2c} + \frac{L_0(G_3)}{4} + \frac{L_2(G_3)}{4c^2} + L_0(K_2^-) + \frac{L_1(K_3^-)}{2c} + \frac{L_0(K_3^-)}{4} + \frac{L_2(K_3^-)}{4c^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \frac{L_0(G_3)}{4} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4} - \frac{L_2(K_3^-)}{4c^2}, \\
a_{24} &= \frac{h_1}{4c^2} c^2 L_0(G_3) - L_2(G_3) + \frac{h_1}{4c^2} c^2 L_0(K_3^-) - L_2(K_3^-), \\
a_{25} &= \frac{h_2}{4c^2} c^2 L_0(G_3) - L_2(G_3) + \frac{h_2}{4c^2} c^2 L_0(K_3^-) - L_2(K_3^-), \\
a_{26} &= 2L_2(K_1^-) - L_1(K_1^-)(2c + h_1) + \frac{h_1^2 L_1(K_3^-)}{4c} + \frac{h_1^2 L_0(K_3^-)}{8} + \frac{h_1^2 L_2(K_3^-)}{8c^2} - \\
&\quad - 4L_2(G_1) + L_1(G_1)(4c + 2h_1) - \frac{h_1^2 L_1(G_3)}{2c} - \frac{h_1^2 L_0(G_3)}{4} - \frac{h_1^2 L_2(G_3)}{4c^2}, \\
a_{27} &= 2L_2(K_2^-) - L_1(K_2^-)(2c + h_2) + \frac{h_2^2 L_1(K_3^-)}{4c} + \frac{h_2^2 L_0(K_3^-)}{8} + \frac{h_2^2 L_2(K_3^-)}{8c^2} + \\
&\quad + 4L_2(G_2) - L_1(G_2)(4c + 2h_2) + \frac{h_2^2 L_1(G_3)}{2c} + \frac{h_2^2 L_0(G_3)}{4} + \frac{h_2^2 L_2(G_3)}{4c^2}, \\
a_{28} &= \frac{h_1 h_2}{4c^2} c^2 L_0(G_3) - L_2(G_3) + \frac{h_1 h_2}{8c^2} c^2 L_0(K_3^-) - L_2(K_3^-), \quad a_{29} = \frac{h_1}{8c^2} c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+), \\
a_{30} &= \frac{L_1(K_2^+)}{2} - \frac{L_0(K_2^+)}{2} \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{h_2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_2 L_2(K_3^+)}{16c^2}. \quad (6)
\end{aligned}$$

В соотношениях  $a_1, \dots, a_{30}$  введен интегральный оператор

$$L_n(f_k(z)) = \int_{h_k} f_k(z) z^n dz, \text{ где } n = 0, 1, 2.$$

В качестве граничных условий можно принять или силовые (4), или кинематические условия. В данном случае принимаем кинематические условия свободного опирания рассматриваемой пластины по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры.

Получим граничные условия в перемещениях ( $k = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned}
\text{при } x = 0, l_x \quad u_{kx, x} = u_{ky} = w_k = w_{k, xx} = 0; \\
\text{при } y = 0, l_y \quad u_{ky, y} = u_{kx} = w_k = w_{k, yy} = 0. \quad (7)
\end{aligned}$$

Систему дифференциальных уравнений (5) решаем методом Бубнова-Галеркина в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (7):

$$\begin{aligned}
u_{1x} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{1xpm} \cos \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, & u_{2x} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{2xpm} \cos \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, \\
u_{1y} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{1ypm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \cos \frac{\pi my}{l_y}, & u_{2y} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{2ypm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \cos \frac{\pi my}{l_y}, \\
w_1 &= \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{1pm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, & w_2 &= \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{2pm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, \quad (8)
\end{aligned}$$

где  $U_{1xpm}, U_{2xpm}, U_{1ypm}, U_{2ypm}, W_{1pm}, W_{2pm}$  – искомые амплитуды перемещений прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем.

Также в виде разложения в тригонометрические ряды представим поперечную нагрузку и температурные составляющие в слоях пластины:

$$\begin{aligned}
q &= \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{pm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, & q_{pm} &= \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} q(x, y) \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y} dx dy, \\
q_t &= \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{tpm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, & q_{tpm} &= \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} q_t(x, y) \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y} dx dy,
\end{aligned}$$

$$g_t = \sum_{p,m=0}^{\infty} g_{tpm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, \quad g_{tpm} = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} g_t(x, y) \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y} dx dy. \quad (9)$$

В систему уравнений равновесия (5) подставим перемещения (8), нагрузки и температурные составляющие (9), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомым амплитуд перемещений  $U_{1xpm}, U_{2xpm}, U_{1ypm}, U_{2ypm}, W_{1pm}, W_{2pm}$ :

$$\begin{aligned} b_1 U_{1xpm} + b_2 U_{2xpm} + b_{11} U_{1ypm} + b_{12} U_{2ypm} + b_3 W_{1pm} + b_4 W_{2pm} &= 0, \\ b_2 U_{1xpm} + b_5 U_{2xpm} + b_{12} U_{1ypm} + b_{13} U_{2ypm} + b_6 W_{1pm} + b_7 W_{2pm} &= 0, \\ b_{11} U_{1xpm} + b_{12} U_{2xpm} + b_{14} U_{1ypm} + b_{15} U_{2ypm} + b_{16} W_{1pm} + b_{17} W_{2pm} &= 0, \\ b_{12} U_{1xpm} + b_{13} U_{2xpm} + b_{15} U_{1ypm} + b_{18} U_{2ypm} + b_{19} W_{1pm} + b_{20} W_{2pm} &= 0, \\ b_3 U_{1xpm} + b_6 U_{2xpm} + b_{16} U_{1ypm} + b_{19} U_{2ypm} + b_8 W_{1pm} + b_9 W_{2pm} &= q_{pm} + g_t, \\ b_4 U_{1xpm} + b_7 U_{2xpm} + b_{17} U_{1ypm} + b_{20} U_{2ypm} + b_9 W_{1pm} + b_{10} W_{2pm} &= g_t, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $b_i$  зависят от параметров  $p$  и  $m$ , коэффициентов (6) и введены в [9].

**3. Численный параметрический анализ.** Численные расчеты проводились для трехслойной пластины, пакет которой составлен из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, толщины слоев  $h_1 = 0,04$  м,  $h_2 = 0,02$  м,  $h_3 = 0,2$  м. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью  $q = -2$  МПа, размеры пластины  $l_x = 1$  м,  $l_y = 1$  м.

Рисунки 2–3 иллюстрируют влияние температуры на изменение напряжений в слоях вдоль оси  $x$  ( $y = 0,5l_y$ ) упругой пластины: 1 –  $T = 293$  К; 2 –  $T = 343$  К; 3 –  $T = 393$  К.

На рисунке 2, а показано распределение нормальных напряжений  $\sigma_{xx}^{(1)}$ . Кривые без штриха соответствуют напряжениям на поверхности склейки этого слоя с заполнителем  $z = c$ , со штрихом – 1', 2', 3' – напряжения на внешней поверхности  $z = c + h_1$ . Нагревание пластины приводит к расширению материала. При нагревании на 50 К напряжения увеличиваются по модулю в обоих плоскостях на 40,3%, а при нагревании на 100 К – на 135%. В обоих случаях графики напряжений сдвигаются в отрицательную область.

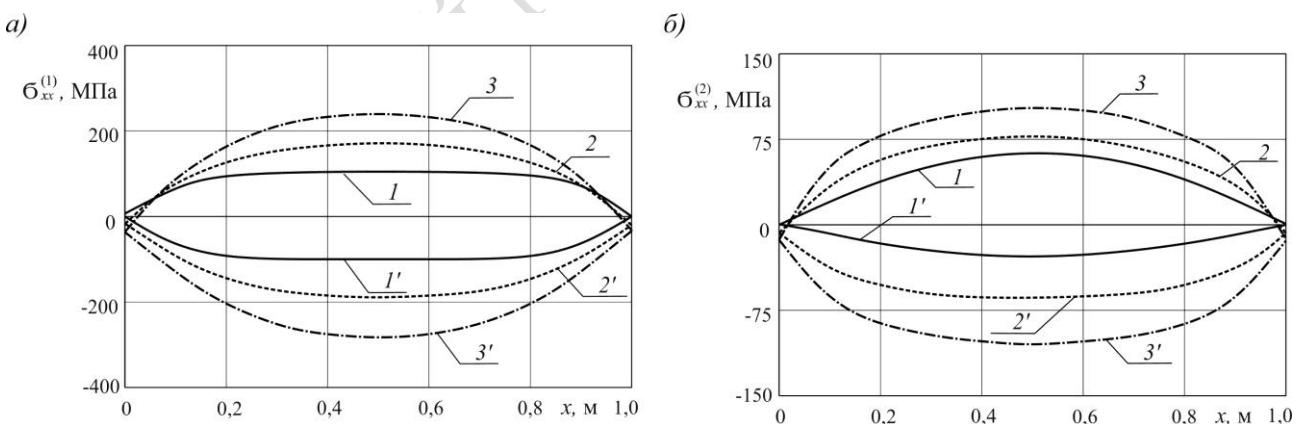


Рисунок 2 – Напряжения в несущих слоях

Рисунок 2, б иллюстрирует распределение нормальных напряжений  $\sigma_{xx}^{(2)}$  во втором несущем слое. Кривые без штриха соответствуют напряжениям на внешней поверхности  $z = -c - h_2$ , со штрихом – 1', 2', 3' – напряжения на поверхности склейки слоя с заполнителем  $z = -c$ . Здесь наблюдается аналогичная зависимость, характерная для первого несущего слоя. Также при нагревании пластины на 50 К и 100 К напряжения увеличиваются по модулю в обоих плоскостях и сдвигаются в отрицательную область. При нагревании на 50 К напряжения увеличиваются по модулю на 30,6%, а при нагревании на 100 К – на 67,7%.

Изменение вдоль оси  $x$  пластины продольных  $\sigma_{xx}^{(3)}$  и поперечных  $\sigma_{zz}^{(3)}$  напряжений в заполнителе на плоскостях склейки с несущими слоями иллюстрирует рисунок 3, а, б. Кривые без штриха соответствуют напряжениям в склейке со вторым слоем  $z = -c$ , со штрихом – напряжения в склейке с первым слоем  $z = c$ . Здесь также при воздействии температуры графики напряжений сдвигаются в отрицательную область.

Напряжения  $\sigma_{zz}^{(3)}$  уменьшаются вследствие уменьшения деформации обжатия заполнителя.

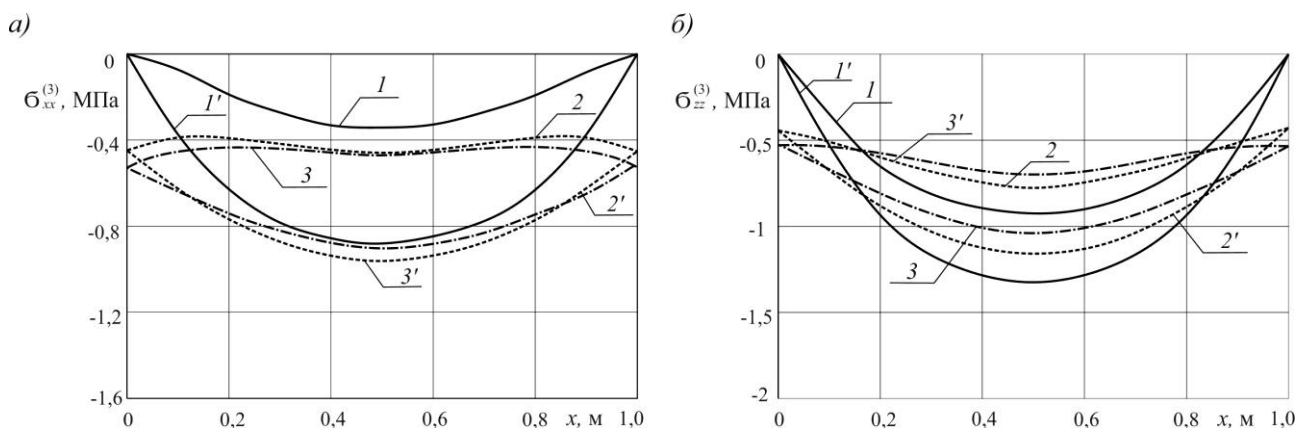


Рисунок 3 – Напряжения в заполнителе

**Заключение.** Полученное в работе решение можно использовать для исследования напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем. Численное решение показало, что учет температуры приводит к существенному уточнению напряженно-деформированного состояния.

### Литература

1. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.
2. Леоненко, Д.В. Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании / Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2007. – № 3. – С. 70–74.
3. Леоненко, Д.В. Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Д.В. Леоненко // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.
4. Starovoitov, É.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaia // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, № 4. – P. 451–459.
5. Starovoitov, E.I. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 47. – № 5. – P. 580–589.
6. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.
7. Starovoitov, E.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.
8. Зеленая, А.С. Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – № 6 (105). – С. 89–95.
9. Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр. – Гомель : БелГУТ, 2017. – Вып. 10. – С. 67–74.