

УДК 535.317.1

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ФАЗОВЫХ ОБЪЕКТОВ В ГОЛОГРАФИИ

Петров П. Г., Лопатин В. В., Кухта В. Р.

Рассмотрен механизм формирования изображения трехмерных фазовых объектов. Проанализированы полученные в рамках метода плавных возмущений выражения, связывающие распределения амплитуды, фазы и плотности энергии восстановленной волны с распределением коэффициента диэлектрической проницаемости неоднородности $\epsilon = n^2$, а также пути восстановления этого распределения.

В последнее время при исследовании явлений, приводящих к изменению показателя преломления n среды, широко используются голографические методы. К таким явлениям относятся распространение гидро- и газодинамических потоков, ударных и акустических волн, плазма, горение и взрыв [1-3]. Разработаны и широко применяются различные методы визуализации подобных явлений, а также методы численного расчета профиля n по экспериментальным распределениям фазы S электромагнитной волны, восстановленной с голограммы [4-6].

Между тем при визуализации остается неясным, как связаны распределения плотности энергии восстановленной с голограммы волны и показателя преломления n по объему фазового объекта. В основе существующих численных методов восстановления профиля n по распределению фазы S электромагнитной волны, прошедшей неоднородность, как правило, используют законы геометрической оптики. Приближения геометрической оптики имеют весьма ограниченную область применения и не позволяют рассчитывать распределение n по объему фазового объекта, если он имеет достаточно сложную конфигурацию и структуру. Для описания волны, рассеянной на таких объектах, необходимо учитывать дифракцию, что проще всего сделать, пользуясь методом плавных возмущений (МПВ).

Постановка задачи, основные соотношения и понятия

Предположим, что исследуемый фазовый объект, в котором необходимо определить распределение коэффициента диэлектрической проницаемости $\epsilon(\mathbf{r})$, не изменяется во времени и покоится, а $\epsilon(\mathbf{r})$ задано в некоторой области V_r , которая представляет собой часть трехмерного пространства, занятую объектом.

Пусть далее волновое поле $U_r(t, \mathbf{r})$, используемое для записи голограммы, является скалярным и монохроматическим

$$U_r(t, \mathbf{r}) = U_r(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t).$$

В такой постановке задачи учитываются только общеволновые явления, такие как интерференция и дифракция, но не рассматриваются поляризационные эффекты.

При сделанных предположениях поле волны $U_r(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta U_r(\mathbf{r}) + k^2 (1 + \tilde{\epsilon}(\mathbf{r})) U_r(\mathbf{r}) = 0. \quad (1)$$

Здесь $k = \omega \langle \varepsilon \rangle / c = 2\pi \langle \varepsilon \rangle / \lambda$ — волновое число, c — скорость света в вакууме, ω , λ — соответственно частота и длина волны. $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon - \langle \varepsilon \rangle) / \langle \varepsilon \rangle$ — отклонение диэлектрической проницаемости оптической неоднородности от его среднего значения $\langle \varepsilon \rangle$

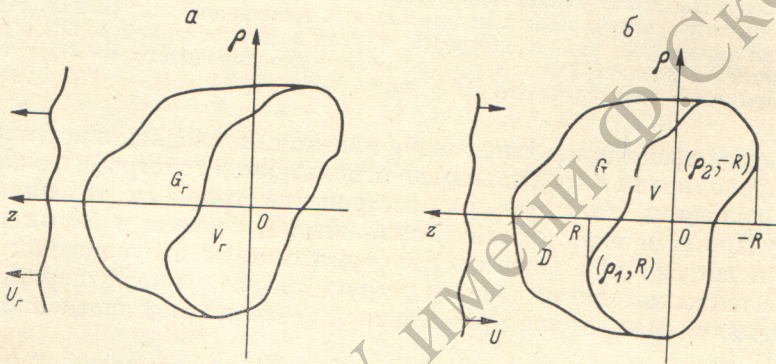
$$\langle \varepsilon \rangle = \begin{cases} \left(\int_{V_r} \varepsilon(r) d^3r \right) / \int_{V_r} d^3r & \mathbf{r} \in V_r, \\ \varepsilon_{\text{ср}} & \mathbf{r} \notin V_r, \end{cases}$$

$\varepsilon_{\text{ср}}$ — диэлектрическая проницаемость невозмущенной среды. Уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению

$$U_r(\mathbf{r}) = U_{0r}(\mathbf{r}) - k^2 \int \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon(\mathbf{r}') U_r(\mathbf{r}') d^3r', \quad (2)$$

где $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению для точечного источника $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$,

$$\Delta \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$



Фазовый объект.

а — на стадии записи голограммы, V_r — область, занятая объектом, G_r — некоторая область, включающая V_r , U_r — волна, рассеянная объектом; б — на стадии восстановления изображения, G, V — области в пространстве изображений, соответствующие G_r и V_r , U — волна, восстановленная с голограммы.

Поле $U_{0r}(\mathbf{r})$ в (2) удовлетворяет невозмущенному уравнению Гельмгольца

$$\Delta U_{0r}(\mathbf{r}) + k^2 U_{0r}(\mathbf{r}) = 0.$$

Пусть все рассеянное исследуемым объектом поле $U_r(\mathbf{r})$ попадает на голограмму, тогда восстановленное с голограммы в свободном пространстве поле $U_r(\mathbf{r})$, если оно строит действительное изображение объекта, будет соответствовать полю U_r в некоторой области $D = G \mid V$. Причем область V в пространстве изображений соответствует V_r , а область G — некоторой области G_r , включающей V_r (см. рисунок). Внутри области V восстановленное поле уже не соответствует полю U_r в области V_r , так как восстановленное поле подчиняется законам распространения света в свободном пространстве. По этой причине, имея информацию о волновом поле $U \sim U_r$ внутри области G , и если даже известен вид функций $U_{0r}(\mathbf{r})$ и $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, на основании (2) без дополнительных допущений о распределении $\varepsilon(\mathbf{r})$ его восстановить невозможно.

Будем считать, что объект рассеивает волновое поле только вперед, т. е. характерный масштаб неоднородности $l_\varepsilon \sim |\varepsilon / \nabla \varepsilon| \gg \lambda$, а поле распространяется вдоль оси Oz , $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, z)$, где $\rho = \rho(x, y)$.

Считаем также, что в любой точке области выполняется неравенство

$$\lambda z / l_\varepsilon^2 \ll (l_\varepsilon / \lambda)^2. \quad (3)$$

Пусть $U(\rho, z) = v(\rho, z) \exp(ikz)$, $U_0(\rho, z) = A_0(\rho) \exp(ikz)$. Тогда уравнение (2) можно записать в параболическом приближении [7]

$$v(\rho, z) = A_0(\rho) + \int dz' \int d^2\rho' \frac{k^2}{4\pi(z-z')} \varepsilon(\rho', z') v(\rho', z'). \quad (4)$$

Представим поле $v(\rho, z)$ в виде

$$v(\rho, z) = A_0(\rho) \exp \Phi(\rho, z) = A(\rho, z) \exp iS'(\rho, z').$$

Здесь комплексная фаза $\Phi = \chi + iS'$, где $S' = S - kz$ — отклонение фазы от регулярного набега kz , $\ln(A/A_0) = \chi$ — уровень. Первое приближение метода плавных возмущений для решения (4) дает [7]

$$\Phi(\rho, z) = - \int dz' \int d^2\rho' \frac{1}{4\pi(z-z')} \exp \frac{ik(\rho-\rho')}{2(z-z')} \varepsilon(\rho', z'), \quad (5)$$

приближение справедливо, когда изменения Φ на поперечных расстояниях порядка длины волны λ малы по сравнению с $\sigma_\varepsilon = \sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle}$ (сама величина Φ имеет порядок малости σ_ε). Представим $\Phi(\rho, z)$, $\varepsilon(\rho, z)$, $S'(\rho, z)$, $\chi(\rho, z)$ в виде интегралов Фурье

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, z) &= \int \varphi(\mathbf{x}, z) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2\mathbf{x} = \hat{F}[\varphi], \quad \varepsilon(\rho, z) = \hat{F}[\varepsilon], \quad S'(\rho, z) = \hat{F}[T], \\ \chi(\rho, z) &= \hat{F}[K]. \end{aligned} \quad (6)$$

Параметром интегрирования в (6) является пространственная частота $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_x, x_y)$.

Спектр комплексной фазы $\varphi(\mathbf{x}, z)$ на основании (5) и (6) можно выразить в виде

$$\varphi(\mathbf{x}, z) = \frac{ik}{2} \exp\left(-\frac{i\mathbf{x}^2(z+R)}{2k}\right) \int_{-R}^R \exp\left(\frac{i\mathbf{x}^2 z'}{2k}\right) \theta(\mathbf{x}, z') dz'. \quad (7)$$

Последнее уравнение записано в предположении, что $\langle \varepsilon \rangle = 1$, а область V заключена в слое $|z| \leq R$, так что найдутся по крайней мере 2 точки $(\rho_1 R)$ и $(\rho_2, -R)$, которые принадлежали бы области V (см. рисунок).

Обозначив $\eta(\mathbf{x}, \Omega) = \int \theta(\mathbf{x}, z') \exp(-i\Omega z') dz'$, спектр комплексной фазы запишем как

$$\varphi(\mathbf{x}, z) = \frac{ik}{2} \exp\left(-\frac{i\mathbf{x}^2(z+R)}{2k}\right) \eta\left(\mathbf{x}, -\frac{z^2}{2k}\right). \quad (8)$$

Последнее соотношение устанавливает связь между спектром комплексной фазы и спектром ε . Следует отметить, что η определен на поверхности параболоида вращения.

Связь с геометрической оптикой

Определим связь выражений, полученных в рамках МПВ (дифракционное приближение), с уравнением эйконала (приближение геометрической оптики).

Разложим $\theta(\mathbf{x}, z')$ в ряд Фурье по координате z на отрезке $[-R, R]$ $\theta(\mathbf{x}, z') =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\pi z'/R)$$

$$c_n = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \theta(\mathbf{x}, z') \exp\left(-\frac{in\pi z'}{R}\right) dz' = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad (9)$$

$$a_n = a_{-n}, \quad b_n = -b_{-n}, \quad b_0 = 0, \quad n = 1, 2 \dots$$

Тогда для любого $z \in G$ (7) можно представить в виде

$$\varphi(\mathbf{x}, z) = ik \exp\left(-\frac{i\mathbf{x}^2(z+R)}{2k}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\mathbf{x}^2 R/2k)}{\mathbf{x}^2/2k - \pi n/R} c_n. \quad (10)$$

Поскольку спектр фазы $T = Im\varphi$, то

$$T = k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(x^2 R/2k)}{\left(\frac{x^2}{2k}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2} \left(\left(\frac{a_0}{2} + a_n\right) \frac{x^2}{2k} \cos \frac{x^2(z+R)}{2k} + \frac{\pi n}{R} b_n \sin \frac{x^2(z+R)}{2k} \right). \quad (11)$$

Если считать, что $z = -R$ и выполняется

$$\frac{x_m^2 R}{2k} \sim \frac{\lambda R}{l_e^2} \ll 1 \quad (12)$$

(здесь x_m — максимальная пространственная частота), а исследуемый фазовый объект имеет диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\rho, z) = \varepsilon(\rho, -z)$, или $b_n = 0$, $n=1, 2, \dots$, то в ряде (11) можно ограничиться членом a_0 . Тогда для отклонения фазы от регулярного набега из (6) с учетом (9) и (11) нетрудно получить

$$S'(\rho, -R) \approx \frac{k}{2} \int_{-R}^R \tilde{\varepsilon}(\rho, z') dz'. \quad (13)$$

Последнее выражение, полученное при условии (12), означаящем, что к объекту применим метод геометрической оптики, представляет собой первое приближение решения методом возмущений уравнения эйконала

$$(\nabla S)^2 = k^2 \varepsilon. \quad (14)$$

Это уравнение широко используется на практике при восстановлении профилей ε [8].

Пусть теперь исследуемый фазовый объект имеет неизменную диэлектрическую проницаемость вдоль оси Oz , т. е. $a_0 \neq 0$, $a_n = b_n = 0$ при $n=1, 2, \dots$. Если по-прежнему выполняется условие (12), то отклонение фазы связано с распределением ε также выражением (13), но уже с большей точностью, чем в первом случае.

Поскольку нам пришлось ограничить ряд (9) только единственным членом a_0 , то в терминах геометрической оптики это означает, что лучи, прошедшие через объект, являются прямыми и параллельными оси Oz , т. е. рефракция отсутствует. Наличие же изменения $\varepsilon(\rho, z)$ вдоль оси Oz приведет к тому, что, с одной стороны, нельзя будет в (9) ограничиться только a_0 , а с другой — к искривлению лучей, проходящих через объект. Таким образом, по сути дела в (11) учтена рефракция. Последний термин, правда, не употребляется в волновой оптике, где его достаточно близким аналогом является дифракция.

Более слабое ограничение (3) и позволяет учесть дифракцию. На практике чаще приходится иметь дело с фазовыми объектами, для которых справедливо (3), но не выполняется (12). Например, если отношение масштаба неоднородности к длине волны $l_e/\lambda = 100$, то из (3) следует $R \ll 10^6 l_e$, а из (12) — $R \ll 10^2 l_e$. Это означает, что допустимые значения $x_m R$ могут быть в 10^4 раз больше при использовании (7), чем при применении выражений, вытекающих из уравнения эйконала.

Визуализация фазовых объектов

Плотность энергии или интенсивность $I = (UU^*) = A_0^2 \exp 2\chi$, поэтому для нахождения $\chi = \ln(I/I_0)/2$ достаточно измерить распределение интенсивности $I = A^2$, что практически всегда легче выполнить, чем получить распределение фазы S .

Спектр этой величины, определяемый на основании (8),

$$K(x, z) = \frac{k}{2} \sin \frac{x^2(z+R)}{2k} \eta\left(x, -\frac{x^2}{2k}\right) \quad (15)$$

обращается тождественно в ноль при $z = -R$, т. е. в этой плоскости $I = I_0$ и объект невидим. В плоскостях $z = z_1 = -R - \delta$, $z = z_2 = -R + \delta$ уровни $\chi(z_1) = -\chi(z_2)$ и происходит обращение контраста. С этой позиции находит теоретическое обоснование метод «небольшой дефокусировки» [9], применяющийся для

визуализации фазовых объектов. При увеличении отклонения δ от плоскости $z = -R$ увеличивается вклад в результирующую интенсивность рассеянного неоднородностью света.

Спектр фазы на основании (8) определяется как

$$T(x, z) = \frac{k}{2} \cos \frac{x^2(z+R)}{2k} \eta \left(x, -\frac{x^2}{2k} \right). \quad (16)$$

Любопытно, что при формировании интерференционной картины (с целью получения распределения фазы) спектр фазы $T(x, z)$ совпадает со спектром η в плоскости $z = -R$, т. е. $T(x, -R) = \eta(x, -x^2/2k)$, а в плоскостях $z = z_1$ и $z = z_2$ получатся одинаковые распределения фазы $S(\rho, z_1) = S(\rho, z_2)$. Другими словами, хотя изгиб полос на интерферограммах в этих плоскостях будет совпадать, это вовсе не означает, что мы регистрируем симметричный относительно плоскости $z = -R$ объект. Более того, если объект симметричен, то плоскость симметрии не может совпадать с $z = -R$, а находится от нее на расстоянии R . Поскольку мы получили (15), (16), не делая никаких предположений относительно вида $\varepsilon(\rho, z)$ и геометрии объекта, все сказанное справедливо для любых объектов, удовлетворяющих (3). Но тогда по общепринятой терминологии плоскость $z = -R$ является поверхностью локализации интерференционной картины. Если при записи объект освещался набором плоских волн под различными углами к оси Oz , (например, с помощью диффузора), то поверхностью локализации интерференционной картины, очевидно, будет некоторая поверхность в пространстве изображений, которая соответствует освещаемой поверхности объекта.

Таким образом, распределение ε можно восстанавливать не только по спектру фазы (16), но и по спектру уровня (15), что должно значительно облегчить обработку экспериментальных результатов.

При применении полученных результатов в каждом конкретном случае удобнее пользоваться не информацией о размерах объекта и характером масштаба его неоднородности l_ε , а распределениями $\chi(\rho, z)$ и $S(\rho, z)$, взятыми из экспериментальных данных. При этом должны выполняться 2 условия [7, 10]: 1) среднее квадратичное отклонение уровня не должно превышать единицы ($\chi^2 < 1$), 2) $\langle (S(\rho, z) - S(\rho' + \rho, z))^2 \rangle \ll 1$ (усреднение производится по ρ').

Оба условия независимы, и возможны ситуации, когда первое выполняется, а второе нет. Если выполняется первое условие, то распределение ε нужно искать по распределению χ , если выполняется второе, то — по распределению фазы S .

Обработка экспериментальных результатов

Не касаясь вопросов, связанных с общими положениями корректности постановки и решения обратных задач [11, 12], ограничимся замечаниями, вытекающими из выражения (8).

К сожалению, непосредственно из (8) невозможно восстановить ε достаточно сложного объекта, так как его спектр η сосредоточен на поверхности параболоида вращения, а не во всей области определения η , поэтому нужно или априорно задать функцию ε в виде $\varepsilon(\rho, z) = \varepsilon(\rho, z(\rho))$, например предположить существование какого-либо вида симметрии распределения ε в V_r , или произвести выборку по спектрам φ_m ($m = 1, N$), полученным при N направлениях просвечивания объекта. Количество направлений просвечивания зависит от ширины x_m спектра ε , а угол между двумя направлениями в соответствии с теоремой о выборке не должен быть больше $\psi = \arcsin(1/x_m R)$. Отсюда минимальное количество направлений просвечивания $N = 4\pi/\psi$. Как уже отмечалось, спектр в соответствии с (8) сосредоточен на поверхности параболоида вращения $\Omega = -x^2/2k$, а не на плоскости $\Omega = 0$, как это следует из решения (13) — приближения геометрической оптики. Это создает важное на практике условие дополнительного сглаживания экспериментально полученных распределений S и χ . В самом деле, если объект просвечивается под двумя направлениями, лежащими в плоскости xOz , и угол между направлениями равен ψ , то это эквивалентно

просвечиванию при одном направлении, например вдоль оси Oz двух объектов с распределением $\varepsilon(x, y, z)$ и $\varepsilon_\psi(x, y, z) = \varepsilon(x \cos \psi + z \sin \psi, y, -x \sin \psi + z \cos \psi)$ соответственно для спектров.

$$\eta(x_x, x_y, x^2/2k) = \eta_\psi(x_x \cos \psi - \frac{x^2}{2k} \sin \psi, x_y, \frac{x^2}{2k} \cos \psi + x_x \sin \psi), \quad (17)$$

где x_x, x_y — проекции вектора \mathbf{x} на оси Ox и Oy , $x^2 = x_x^2 + x_y^2$. Пусть $\Phi_\psi = \chi_\psi + iS_\psi$ — распределение фазы при просвечивании под углом ψ . Так как $\varphi \sim \eta$, а $\varphi_\psi \sim \eta_\psi$, то (17) будет справедливо и для $T, T_\psi; K, K_\psi$ с точностью до постоянного множителя, что дает условие «сшивания» полученного в эксперименте распределения χ или S при разных направлениях просвечивания.

Если в результате голографического эксперимента получены распределения фазы S или χ в плоскостях $z = z_j$ ($j = \overline{1, M}$) и по ним определены соответствующие спектры K_j и T_j , то на основании (15), (16) спектры фазы и уровня χ можно выразить как $T_j = T(\mathbf{x}, z_j)$, $K_j = K(\mathbf{x}, z_j)$.

Но тогда, если измерялось распределение фазы, появляется возможность определить средневзвешенный спектр

$$\bar{\eta}(\mathbf{x}, -\frac{x^2}{2k}) = \frac{2}{kM} \sum_{j=1}^M T_j \sec \frac{x^2(z_j + R)}{2k}, \quad (18)$$

а если измерялось распределение уровня, то

$$\bar{\eta}(\mathbf{x}, -\frac{x^2}{2k}) = \frac{2}{kM} \sum_{j=1}^M K_j \operatorname{cosec} \frac{x^2(z_j + R)}{2k}. \quad (19)$$

Аналогично через дисперсии величин T_j и K_j нетрудно оценить дисперсию определения η .

Таким образом, учет волнового характера взаимодействующего с фазовым объектом поля позволяет вскрыть необъяснимую с позиций геометрической оптики связь между распределениями интенсивности и диэлектрической проницаемости объекта исследования, определить местоположение поверхности локализации интерференционной картины при голографической интерферометрии и показать, что только на этой поверхности для ряда объектов выполняются соотношения геометрической оптики. Дифракционное приближение позволяет, кроме того, дать рекомендации по обработке экспериментальных данных с целью минимизации погрешности восстановления распределения диэлектрической проницаемости.

Литература

- [1] Островский О. И., Бутусов М. М., Островская Г. В. Голографическая интерферометрия. М., 1977.
- [2] Бурмаков А. П., Лабуда А. А., Лужковский В. М. — Инж.-физ. журн., 1975, т. 29, с. 499.
- [3] Proc. of the X Congr. High Speed Photogr. Nice, France, 1974.
- [4] Iwata K., Nagata R. — JOSA, 1970, v. 60, p. 133.
- [5] Sweeney D. W., Vest C. M. — Appl. Opt., 1973, v. 12, p. 2649.
- [6] Кухта В. Р., Лопатин В. В., Петров П. Г. — Опт. и спектр., 1984, т. 56, в. 1, с. 178.
- [7] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. М., 1978, ч. 2.
- [8] Клишкин В. Ф., Папирин А. Н., Солоухин Ф. И. Оптические методы регистрации быстротекущих процессов. Новосибирск, 1980.
- [9] Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М., 1971.
- [10] Писарева В. А. — Акуст. журн., 1960, т. 6, с. 87.
- [11] Тихонов А. Н. — ДАН СССР, 1983, т. 151, № 3, с. 501.
- [12] Турчин В. Ф. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1967, т. 7, № 6, с. 270.

Поступило в Редакцию 29 февраля 1984 г.