

метрии выводится из общего формализма ЛСО как частный случай при отмеченных выше ограничениях на допустимые размеры оболочек.

В рамках общего подхода можно предложить и более удобный способ нахождения матриц ЛСК (или опорных столбцов), если отказаться от непосредственного решения уравнения (1) относительно $\xi^{\alpha}(q_i)$ и воспользоваться проекционным оператором типа (4.54) из [6]. Тогда после упрощений, связанных с поведением q_i при действии операций группы G_i , получаем

$$\xi_{pr}^{\alpha}(q_i) = q_i \sum_{\eta} D_{pr}^{\alpha*}(G_{\eta}) \varepsilon_{\eta}, \quad G_{\eta} \in G_i, \quad p, r = 1, \dots, N_{\alpha}$$

и остается только выделить линейно независимые столбцы и удовлетворить условию ортонормировки (2).

В заключение следует сказать, что формализм ЛСО специально разрабатывался для расчета приведенных по симметрии матричных элементов, основываясь на минимальном числе независимых матричных элементов в исходном базисе. Как правило, такие задачи весьма актуальны при расчетах электронного строения молекул, электронных или электронно-колебательных спектров. В вычислительной колебательной спектроскопии подобных проблем обычно не возникает и для перехода к симметризованному базису с успехом используется матрица преобразования симметрии $G = qC$: $A^S = CAC$. Для нахождения последней (вручную или с помощью ЭВМ) можно рекомендовать и более простой (не связанный с использованием матриц неприводимых представлений) метод последовательного учета генераторов группы [6].

Литература

- [1] Виноградова В. Н., Годнева М. И., Виноградов А. А. — *Опт. и спектр.*, 1985, т. 58, в. 1, с. 69.
- [2] Людчик А. М., Ковриков А. Б. — *Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1*, 1980, № 1, с. 76. *Деп. в ВИНТИ, № 1475-79 деп.*
- [3] Людчик А. М., Ковриков А. Б. — *Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.*, 1980, № 4, с. 99.
- [4] Людчик А. М., Ковриков А. Б. — *ДАН БССР*, 1981, т. 25, № 3, с. 213.
- [5] Ковриков А. Б., Людчик А. М., Попов В. Г., Умрейко Д. С. *Некоторые аспекты автоматизации научных исследований*. Минск, 1980.
- [6] Ковриков А. Б., Борковский Н. Б., Людчик А. М., Попов В. Г., Умрейко Д. С. *Пространственная симметрия и оптимизация расчетов молекулярных спектров*. Минск, 1983.

Поступило в Редакцию 10 апреля 1985 г.

УДК 535.2.01

Опт. и спектр., т. 60, в. 1, 1986

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФАЗОВОГО ФРОНТА СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ МЕТОДОМ ФУРЬЕ-ОПТИКИ

Костометов Г. П., Кузьмина Н. В., Розанов Н. Н.

Когерентное излучение полностью определяется распределением в некотором сечении пучка вещественных амплитуды $a(x)$ и фазы $\varphi(x)$, т. е. комплексной амплитудой

$$U(x) = a(x) e^{i\varphi(x)}, \quad (1)$$

которая считается медленноменяющейся функцией времени по сравнению с временем регистрации (x — 2-мерная поперечная координата, состояние поляризации задано). В отличие от интенсивности поля

$$I(x) = a^2(x) \quad (2)$$

его фаза $\varphi(x)$ не может быть измерена непосредственно. Это определяет сложность задачи восстановления фазы $\varphi(x)$ из экспериментов, связанных с измерением интенсивностей света.

Важность указанной фазовой проблемы прежде всего в адаптивной оптике является причиной появления большого числа методов ее решения. Все они могут быть разбиты на две группы. Методы первой группы основаны на измерениях разности фаз последовательными шагами по площади апертуры (гартмановские датчики либо интерферометры сдвига) [1], в [2] и [3] дана обширная библиография по данному вопросу).

Во вторую группу входят косвенные методы восстановления фазы по распределениям интенсивностей искомого и преобразованных оптическими схемами полей в каких-либо сечениях. Сюда входит метод итераций [4, 5], а также методы, основанные на теории целых функций [6-8] (см. общий анализ в [9]). Методы первой группы более пригодны к работе в реальном времени, но нуждаются в большом количестве измерительных средств и жестко привязаны к эксперименту. Методы второй группы более просты в эксперименте, но требуют большого количества времени для обработки эксперимента. Предлагаемый в настоящей работе метод сочетает преимущества как тех, так и других.

В начале мы рассмотрим одномерную задачу, а затем перейдем к общему случаю. Поскольку измерение интенсивности (2) не дает информации о фазе φ , то представляет интерес рассмотрение линейной комбинации поля и производной от комплексной амплитуды по координате x

$$V_0(x) = \frac{-ic_1}{2\pi} U'(x) + c_2 U(x) = \left[\frac{-ic_1}{2\pi} a'(x) + \frac{c_1}{2\pi} \varphi'(x) a(x) + c_2 a(x) \right] e^{i\varphi(x)}, \quad (3)$$

где c_1, c_2 — вещественные константы.

Оптические схемы, в которых создаются эти поля, будут описаны ниже. Отвечающее (3) распределение интенсивности имеет вид

$$I_0(x) = \frac{|c_1|^2}{(2\pi)^2} a'^2(x) + a^2(x) \left(\frac{c_1}{2\pi} \varphi'(x) + c_2 \right)^2. \quad (4)$$

Измерение величин (2) и (4) дает возможность определить φ' ,¹ однако необходимость вычисления $a'(x)$ накладывает слишком жесткие условия на точность эксперимента, в котором измеряется функция $a^2(x)$.

Добавим еще один эксперимент. Для этого рассмотрим поле

$$V_\alpha(x) = \left[\frac{-ic_1}{2\pi} a'(x) + c_2 a(x) + \frac{c_1 a(x)}{2\pi} (\varphi'(x) + \alpha'(x)) \right] e^{i(\varphi(x) + \alpha(x))}. \quad (5)$$

Здесь α — произвольная функция координаты, например линейная $\alpha(x) = \gamma x$. В последнем случае γ характеризует фазовый клин.²

Измерение интенсивности этого поля дает распределение

$$I_\alpha(x) = \frac{c_1^2}{(2\pi)^2} a'^2(x) + a^2(x) \left(\frac{c_1}{2\pi} (\varphi' + \alpha') + c_2 \right)^2. \quad (6)$$

По распределениям $I(x)$, $I_0(x)$ и $I_\alpha(x)$ уже легко восстановить функцию $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = \frac{[I_\alpha(x) - I_0(x)] 2\pi^2}{I(x) a'(x) c_1^2} - \frac{\alpha'(x)}{2} - \frac{2\pi c_2}{c_1}. \quad (7)$$

Если функция $\varphi'(x)$ мало меняется на промежутке Δ , то целесообразно, почленно интегрируя очевидным образом преобразованное (7), получить

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{2\pi^2} \int_{\Delta} a'(x) \varphi'(x) I(x) dx &= \int_{\Delta} I_\alpha(x) dx - \int_{\Delta} I_0(x) dx - \frac{c_1^2}{4\pi^2} \int_{\Delta} a'^2(x) I(x) dx - \\ &- \frac{c_1 c_2}{\pi} \int_{\Delta} I(x) \alpha'(x) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

¹ Очевидно, что имеет смысл восстановление фазы $\varphi(x)$ только с точностью до постоянного слагаемого.

² Введение фазового клина в схему восстановления фазы использовалось в [8].

Считая $\varphi'(x)$ и $\alpha'(x)$ на интервале Δ константой, получим

$$\varphi'(x)|_{x \in \Delta} \approx \frac{2\pi^2}{c_1^2} \frac{\left[\int_{\Delta} I_{\alpha}(x) dx - \int_{\Delta} I_0(x) dx \right]}{\alpha' \int_{\Delta} I(x) dx} - \frac{\alpha'}{2} - \frac{2\pi c_2}{c_1}. \quad (9)$$

Отметим, что использование формулы (9) вместо формулы (7) для восстановления фазы φ повышает устойчивость метода.

Перейдем к рассмотрению двумерного случая $x = (x_1, x_2)$. Тогда взамен полей (3) и (5) введем поля

$$V_{0,k} = \frac{-ic_1}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial x_k} + c_2 U(x) = \left[-i \frac{c_1}{2\pi} \frac{\partial a}{\partial x_k}(x) + \frac{c_1}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) a(x) + c_2 a(x) \right] e^{i\varphi(x)}, \quad k=1, 2, \quad (10)$$

$$U_{\alpha_k, k}(x) = -\frac{ic_1}{2\pi} \frac{\partial [e^{i\alpha_k(x)} U(x)]}{\partial x_k} + c_2 e^{i\alpha_k(x)} U(x) = \left[\frac{-ic_1}{2\pi} \frac{\partial a}{\partial x_k}(x) + c_2 a(x) + \frac{c_1 a(x)}{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k}(x) \right) \right] e^{i(\varphi(x) + \alpha_k(x))}, \quad k=1, 2. \quad (11)$$

Полям (10)–(11) соответствуют следующие распределения интенсивностей:

$$I_{0,k}(x) = \frac{c_1^2}{(2\pi)^2} \left[\frac{\partial a}{\partial x_k}(x) \right]^2 + a^2(x) \left(\frac{c_1}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + c_2 \right)^2, \quad k=1, 2; \quad (12)$$

$$I_{\alpha_k, k}(x) = \frac{c_1^2}{(2\pi)^2} \left[\frac{\partial a}{\partial x_k}(x) \right]^2 + a^2(x) \left(\frac{c_1}{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k}(x) \right) + c_2 \right)^2, \quad k=1, 2. \quad (13)$$

Так же как по распределениям (2), (4) и (6), в одномерном случае формулой (7) восстанавливается $\varphi'(x)$, в двумерном случае по распределениям (2), (12) и (13) можно восстановить $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)$, $k=1, 2$. Справедливы формулы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = \frac{[I_{\alpha_k, k}(x) - I_{0, k}(x)] \frac{2\pi^2}{c_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k} - \frac{2\pi c_2}{c_1^2}}{I(x) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k}}, \quad k=1, 2. \quad (14)$$

Аналогично (8) получаются соотношения

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{2\pi^2} \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) I(x) dx &= \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} I_{\alpha_k, k}(x) dx - \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} I_{0, k}(x) dx - \\ &- \frac{c_1}{4\pi^2} \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k}(x) \right)^2 I(x) dx - \frac{c_1 c_2}{\pi} \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} I(x) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k}(x) dx, \quad k=1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Если функции $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k}$ мало меняются на прямоугольнике $\Delta_1 \times \Delta_2$, то формулы (15) можно переписать в виде приближенных равенств

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big|_{\substack{x_1 \in \Delta_1 \\ x_2 \in \Delta_2}} \approx \frac{c_1^2}{c_1^2} \frac{\left[\int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} I_{\alpha_k, k}(x) dx - \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} I_{0, k}(x) dx \right]}{\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k} \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} I(x) dx} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k}(x) - \frac{2\pi c_2}{c_1}, \quad k=1, 2. \quad (16)$$

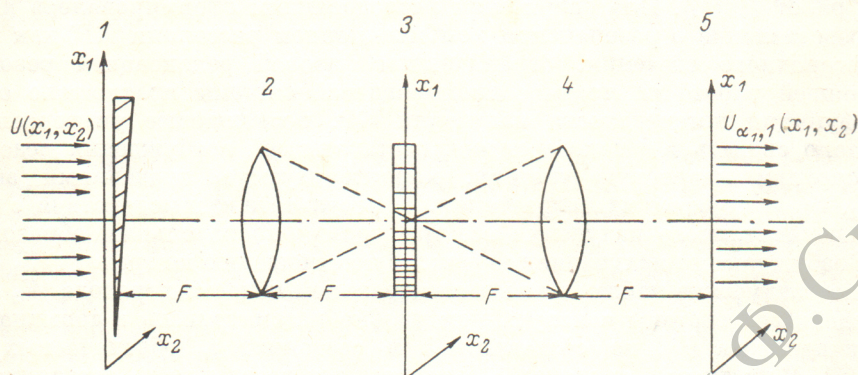
Здесь, так же как и при выводе формулы (9), функции $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)$ и $\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k}(x)$ ($k=1, 2$) считаются на прямоугольнике $\Delta_1 \times \Delta_2$ константами.

Перейдем к описанию оптических схем, в которых реализуются преобразования поля (1) в поля (10)–(11), $k=1, 2$.

На рисунке дана схема получения поля (11) при $k=1$ и $\alpha_1(x) = \gamma x_1$. Для формирования поля (11), $k=2$, клин 1 и фильтр 3 должны быть повернуты на 90° вокруг оптической оси.

Для получения полей (10) $k=1, 2$ из двух предыдущих схем достаточно удалить фазовые клинья I , осуществляющие разворот пучка. При дополнительном условии $c_2=0$ последние две схемы осуществляют известный способ дифференцирования поля соответственно по координатам x_1 и x_2 .

Для получения полей (11) ($k=1, 2$) с произвольной гладкой зависимостью $\alpha_k(x)$ вместо пропускающего фазового клина I достаточно использовать, например, отражение от гибкого (адаптивного) зеркала. Такая схема может повысить точность метода при регистрации медленных временных изменений волнового фронта излучения.



Оптическая схема формирования поля $V_{\alpha, 1}(x)$.

1 — фазовый клин с комплексным коэффициентом пропускания $e^{i\gamma x_1}$, 2, 4 — софокусные линзы с фокусным расстоянием F , 3 — амплитудный фильтр с коэффициентом пропускания $\tau(x) = c_1 x_1 + c_2$, 5 — фокальная плоскость линзы 4, совпадающая с плоскостью регистрации поля $V_{\alpha, 1}$.

Таким образом, предлагаемый метод позволяет получать распределения производных фазы $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)$ по пяти измеренным распределениям интенсивности полей: исходного поля (1), полей $V_{\alpha, k}(x)$, $k=1, 2$ (10) и полей $V_{\alpha, k}(x)$, $k=1, 2$ (11).

Обработка результатов измерений элементарна и требует минимального количества времени вычислений, что выгодно отличает предложенный алгоритм от упомянутых во введении [4-8].

Переход от распределений $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ к распределению искомой фазы рассмотрен, например, в [2], [3].

Авторы благодарны И. М. Белоусовой, Ю. И. Копилевичу, В. Н. Курзенкову, С. Н. Леонову, В. Н. Соколову за полезные обсуждения.

Литература

- [1] Харди Дж., Лефевр Дж., Калиопулос К. — В кн.: Адаптивная оптика. М., 1980, с. 304—331.
- [2] Фрид Д. — В кн.: Адаптивная оптика. М., 1980, с. 332—348.
- [3] Хаджин Р. — В кн.: Адаптивная оптика. М., 1980, с. 349—373.
- [4] Gerchberg R. W., Saxton W. O. — Optik, 1972, v. 35, p. 237.
- [5] Missel D. L. — J. Phys. D., 1973, v. 6, p. 6.
- [6] Ross G., Fiddy M. A., Moezzy H. — Optica Acta, 1980, v. 27, p. 1433.
- [7] Saxton W. O. — Adv. Elektron., Elektron. Phys., 1978, Suppl. 10.
- [8] Walker J. G. — Optica Acta, 1981, v. 28, N 6, p. 735—738.
- [9] Обратные задачи в оптике / Под ред. Г. П. Болтса. М., 1984, с. 199.

Поступило в Редакцию 28 мая 1985 г.