

УДК 535.4

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ТМ ВОЛНЫ НА ТРЕХМЕРНОЙ ФАЗОВОЙ РЕШЕТКЕ

Скочилов А. Ф.

Методом связанных волн исследуется задача дифракции плоской электромагнитной волны ТМ поляризации на трехмерной фазовой решетке. Получены решения уравнений связанных волн (с учетом вторых производных), которые в предельном случае бесконечно малой модуляции диэлектрической проницаемости среды переходят в результаты известной теории Когельника для трехмерных решеток. Приведены значения дифракционной эффективности решетки при различных углах Брэгга. Показано, что для отражательных решеток зависимость дифракционной эффективности от толщины решетки при углах Брэгга, близких к 45° , является периодической.

Дифракция плоской электромагнитной волны ТЕ поляризации на трехмерной решетке рассматривалась в [1] методом связанных волн в приближении медленноменяющихся амплитуд. В [2, 3] были учтены вторые производные, и тем самым задача дифракции ТЕ волны методом связанных волн была решена полностью. В [4] было показано, что уравнения связанных волн для ТМ поляризации плоской волны, полученные в приложении к [1], некорректны, поскольку в этом случае прошедшая и дифрагированная в первый порядок волны, распространяющиеся внутри решетки, не являются плоскими, и, следовательно, продольными компонентами амплитуды относительно направления распространения соответствующих волн пренебрегать нельзя. Задача дифракции плоской ТМ волны решалась в [5] методом электродинамической теории возмущений, а в [6-8] — в приближении медленноменяющихся амплитуд с помощью разложения вектора амплитуды волны по специально выбранному ортогональному базису. Это разложение привело к четырем скалярным дифференциальным уравнениям первого порядка, описывающим дифракцию ТМ волны, однако затем продольными компонентами амплитуды также пренебрегалось и задача сводилась к решению двух скалярных уравнений, аналогичных уравнениям Когельника. В [9] была решена система четырех скалярных дифференциальных уравнений первого порядка с учетом продольных компонент амплитуды, однако условие пренебрежения вторыми производными наложило ограничение на возможные значения угла Брэгга.

В данной работе получены решения уравнений связанных волн с учетом вторых производных для дифракции плоской ТМ волны на трехмерной фазовой решетке в изотропной среде при произвольных значениях угла Брэгга.

Уравнения связанных волн для дифракции света на записанной в немагнитной изотропной среде фазовой решетке, внутри которой диэлектрическая проницаемость изменяется по закону

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\mathbf{K}\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{K} = (K_x, 0, K_z)$ — вектор решетки (решетка расположена в области $z \in [0, T]$), диэлектрическая проницаемость окружающей решетку среды равна ε_0 , имеют вид [4, 9]

$$\mathbf{R}'' - R''_z \mathbf{e}_z - 2i\rho_z \mathbf{R}' + iR'_z \rho + i(\mathbf{R}\rho)' \mathbf{e}_z + (\mathbf{R}\rho)\rho + 2\alpha\beta \mathbf{S} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{S}'' - S''_z \mathbf{e}_z - 2i\sigma_z \mathbf{S}' + iS'_z \sigma + i(\mathbf{S}\sigma)' \mathbf{e}_z + (\mathbf{S}\sigma)\sigma + 2\alpha\beta \mathbf{R} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{R}(z)$ — амплитуда недифрагированной волны, распространяющейся в направлении вектора $\rho = (\rho_x, 0, \rho_z)$; $\mathbf{S}(z)$ — амплитуда дифрагированной

в первый порядок волны, распространяющейся в направлении вектора $\sigma = \rho - K$, причем $|\rho| = |\sigma| = \beta = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ (условие Брэгга выполнено), $\chi = \omega \varepsilon_1 \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} / 4$, ω — частота света, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, штрих означает дифференцирование по z .

В случае дифракции плоской волны ТМ поляризации $R = (R_x, 0, R_z)$, $S = (S_x, 0, S_z)$ и уравнения связанных волн (2)–(3) после проекции на оси x и z представляют собой систему четырех скалярных дифференциальных уравнений второго порядка с неизвестными R_x, R_z, S_x и S_z . Поскольку коэффициенты при неизвестных в этих уравнениях постоянны, решение находим в виде $R_x(z) = R_{x0} \exp(i\gamma z)$ (и аналогично для R_z, S_x и S_z). Характеристическое уравнение для γ получается четвертого порядка

$$\gamma^4 - 2(\rho_z + \sigma_z)\gamma^3 + 4|\rho_z \sigma_z + A(\rho_x - \sigma_x)^2|\gamma^2 + 8A(\rho_x - \sigma_x)(\rho_z \sigma_x - \rho_x \sigma_z)\gamma - 4\{(\beta z)^2 - A[\rho_z \sigma_x - \rho_x \sigma_z]^2\} = 0, \quad A = \frac{\chi^2}{\beta^2 - 4z^2}, \quad (4)$$

поэтому общее решение для компонент амплитуды имеет вид

$$R_x(z) = \sum_{j=1}^4 R_{xj}^0 \exp(i\gamma_j z), \quad (5)$$

где γ_j — корни уравнения (4) (и аналогично для R_z, S_x и S_z). Таким образом, поле внутри фазовой решетки, как и в случае дифракции ТЕ волны [3], представлено в виде совокупности восьми парциальных волн: четыре парциальные составляющие R-волны и четыре парциальные составляющие S-волны. Анализ характеристического уравнения (4) показывает, что интерференция парциальных волн на границах раздела формирует в среде вне решетки прошедшую R_1 , дифрагированную S_1 и дифракционно-отраженные волны R_2 и S_2 , направления распространения которых совпадают с направлениями распространения соответствующих волн в случае дифракции ТЕ волны [3].

Условие непрерывности тангенциальных компонент электрического поля и их первых производных приводит для пропускающей решетки к следующим системам граничных условий (аналогичных граничным условиям [3]):

а) $z=0$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 R_{xj}^0 &= E_{0x} + R_{2x}, & \sum_{j=1}^4 (\gamma_j - \rho_z) R_{xj}^0 &= -\rho_z (E_{0x} - R_{2x}), \\ \sum_{j=1}^4 S_{xj}^0 &= S_{2x}, & \sum_{j=1}^4 (\gamma_j - \sigma_z) S_{xj}^0 &= |\sigma_z| S_{2x}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

б) $z=T$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 R_{xj}^0 \exp[i(\gamma_j - \rho_z)T] &= R_{1x} \exp(-i\rho_z T), \\ \sum_{j=1}^4 S_{xj}^0 \exp[i(\gamma_j - \sigma_z)T] &= S_{1x} \exp(-i|\sigma_z|T), \\ \sum_{j=1}^4 \gamma_j - \rho_z R_{xj}^0 \exp[i(\gamma_j - \rho_z)T] &= -\rho_z R_{1x} \exp(-i\rho_z T), \\ \sum_{j=1}^4 (\gamma_j - \sigma_z) S_{xj}^0 \exp[i(\gamma_j - \sigma_z)T] &= -|\sigma_z| S_{1x} \exp(-i|\sigma_z|T). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь E_{0x} — тангенциальная составляющая электрического поля падающей на решетку волны. Граничные условия для отрагательной решетки получаются из уравнений (6)–(7) путем взаимной замены S_{1x} на S_{2x} (граничные условия для нормальных компонент вектора электрической индукции $D = \varepsilon E$ не дают в данном случае ничего нового [10], поскольку уравнение $\operatorname{div} D = 0$ является следствием уравнений $\operatorname{rot} E = -\mu_0 \partial H / \partial t$ и $\operatorname{rot} H = \varepsilon \partial E / \partial t$, из которых были получены уравнения связанных волн).

Подстановка (5) в уравнения (2)–(3) позволяет определить 12 неизвестных R_{xj}^0 , R_{zj}^0 и S_{zj}^0 через 4 произвольные постоянные S_{xj}^0 , которые затем однозначно определяются из граничных условий (6)–(7) вместе с x -компонентами векторов R_1 , S_1 , R_2 и S_2 , а z -компоненты этих векторов вычисляются с помощью найденных значений R_{zj}^0 и S_{zj}^0 .

В случае ненаклонных пропускающей ($\sigma_z = \rho_z$, $\sigma_x = -\rho_x$) и отражательной ($\sigma_z = -\rho_z$, $\sigma_x = \rho_x$) решеток характеристическое уравнение (4) имеет следующие корни: для пропускающей решетки

$$\gamma_{1,2} = \beta c_R \alpha_{1,2}(\delta), \quad \gamma_{3,4} = \beta c_R \alpha_{1,2}(-\delta), \quad \alpha_{1,2}(\delta) = 1 \pm \left[1 + \frac{2\delta(c_R^2 - b_R^2 - 2\delta)}{c_R^2(1 - 2\delta)} \right]^{1/2}, \quad (8)$$

где $c_R = \rho_z/\beta$, $b_R = \rho_x/\beta$, $\delta = \kappa/\beta$; а для отражательной

$$\gamma_1 = -\gamma_3 = \beta c_R \alpha_1, \quad \gamma_2 = -\gamma_4 = \beta c_R \alpha_2, \quad \alpha_{1,2} = \sqrt{2} \left\{ 1 \pm \left[1 + \frac{\delta^2(c_R^2 - b_R^2)^2 - 4\delta^2}{c_R^4(1 - 4\delta^2)} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (9)$$

После подстановки (8)–(9) в граничные условия (6)–(7), полагая при этом $E_{0x} = c_R$, компоненты амплитуды дифрагированной волны S_1 можно представить в виде

$$S_{1k}^{(n)} = F_{1k} \exp(i\gamma_2 T) + F_{2k} \exp(i\gamma_4 T) \quad (10)$$

для пропускающей решетки,

$$S_{1k}^{(n)} = \frac{f_{0k} + f_{1k} \exp(i\gamma_2 T) + f_{2k} \exp(2i\gamma_2 T)}{f_{3k} + f_{4k} \exp(2i\gamma_2 T)} \quad (11)$$

для отражательной решетки ($k=x, z$). Выражения для величин F_{nk} и f_{mk} ($n=1, 2$; $m=0, 1, 2, 3, 4$) довольно громоздки, поэтому мы не выписываем их в явном виде. Эти величины зависят от δ , c_R и b_R , а также содержат члены порядка $\delta^2 \exp[i(\gamma_2 - \gamma_1)T]$, которые приводят к малым, но очень быстрым осцилляциям F_{nk} и f_{mk} с периодом порядка периода решетки. Очевидно, как предложено в [11], нас должны интересовать значения амплитуд электрического поля, усредненные по многим периодам решетки. После такого усреднения F_{nk} и f_{mk} перестают зависеть от T . Амплитуды дифракционно-отраженных волн R_2 и S_2 оказываются порядка δ/c_R^2 , и, поскольку параметр $\delta = \epsilon_1/4 \epsilon_0$, характеризующий глубину модуляции диэлектрической проницаемости среды, обычно много меньше единицы, интенсивность этих волн оказывается малой, за исключением случая скользящего падения ($c_R \rightarrow 0$), который был подробно изучен в [3].

Если параметр δ устремить к нулю, то $F_{1x} = -F_{2x} = \frac{1}{2} c_R$, $F_{1z} = -F_{2z} = \frac{1}{2} b_R$, $f_{0x} = -f_{2x} = 2c_R$, $f_{0z} = -f_{2z} = 2b_R$, $f_{1x} = f_{1z} = 0$, $f_{3k} = f_{4k} = 2i$, $\gamma_2 = -\gamma_4 = -\kappa |c_R^2 - b_R^2|/c_R$ для пропускающей и $\gamma_2 = i\kappa |c_R^2 - b_R^2|/c_R$ для отражательной решеток, поэтому из (10)–(11) получаем для амплитуды дифрагированной волны $S_{TM} = S_{1x} e_x + S_{1z} e_z$

$$S_{TM}^{(n)} = -i \sin(\nu_{||}) e_{TM}, \quad S_{TM}^{(0)} = -i \operatorname{th}(\nu_{||}) e_{TM}, \quad e_{TM} = c_R e_x + b_R e_z, \quad (12)$$

т. е. известные выражения теории Когельника, где $\nu_{||} = \kappa |c_R^2 - b_R^2| T/c_R$ — параметр Когельника для ТМ поляризации плоской волны. Таким образом, формулы Когельника (12) соответствуют нулевым членам разложения амплитуды дифрагированной волны (10)–(11) по параметру δ .

Поскольку $(c_R^2 - b_R^2) = \cos 2\theta$ (θ — угол Брэгга), из (8)–(9) видно, что при углах Брэгга, удовлетворяющих условию

$$\theta = \frac{1}{2} \arccos(\pm 2\delta), \quad (13)$$

для пропускающей решетки либо γ_2 , либо γ_4 обращаются в нуль, а для отражательной одновременно γ_2 и γ_4 равны нулю. Кроме того, при условии $|\cos 2\theta| > 2\delta$ величины γ_2 и γ_4 в случае отражательной решетки являются мнимыми,

что соответствует монотонному возрастанию дифракционной эффективности $\eta_{\parallel} = |S_{1x}|^2 + |S_{1z}|^2$ с увеличением толщины решетки, но при значениях угла Брэгга, удовлетворяющих условию $|\cos 2\theta| < 2\delta$, γ_2 и γ_4 становятся действительными, и это приводит к периодической зависимости η_{\parallel} от толщины решетки. При $\delta \rightarrow 0$ диапазон значений углов Брэгга, допускающий существование периодических решений для η_{\parallel} , стягивается в точку $\theta = 45^\circ$, причем в этом случае, согласно (12), $\eta_{\parallel} = 0$.

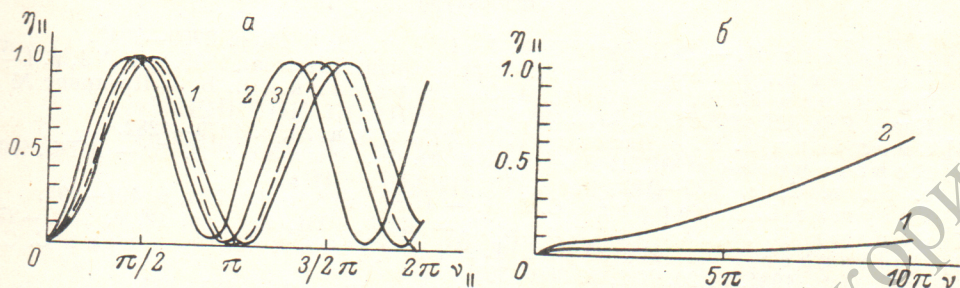


Рис. 1. Дифракционная эффективность пропускающих решеток.
 а: — 1 — $\theta = 35^\circ$, $\delta = 0.08$; 2 — $\theta = 55^\circ$, $\delta = 0.08$; 3 — $\theta = 55^\circ$, $\delta = 0.05$. б: — 1 — $\theta = 45^\circ$, $\delta = 0.05$; 2 — $\theta = 45^\circ$, $\delta = 0.08$.

Интересно отметить, что если синусоидальную решетку (1) заменить периодической многослойной системой, которая состоит из двух чередующихся однородных слоев с $\epsilon^{(1)} = \epsilon_0 + (\epsilon_1/2)$ и $\epsilon^{(2)} = \epsilon_0 - (\epsilon_1/2)$, то выражение (13) будет определять углы Брюстера для распространения света из первой среды во вторую и наоборот.

Дифракционная эффективность в [6-8] при условии дифракции чисто ТМ волны совпадает с дифракционной эффективностью, вычисленной по теории

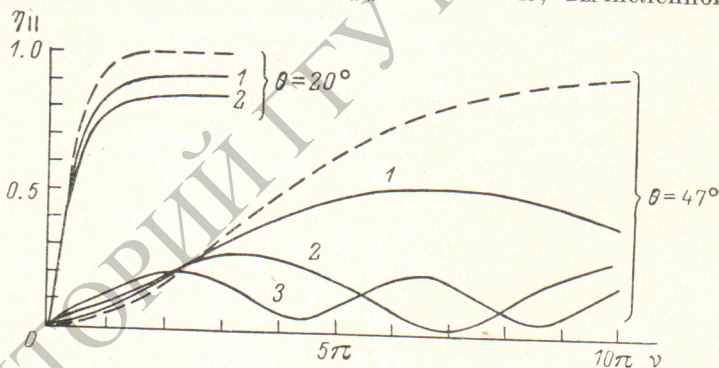


Рис. 2. Дифракционная эффективность отражательных решеток.
 δ : 1 — 0.05, 2 — 0.08, 3 — 0.12.

Когельника. На рис. 1, а представлены зависимости η_{\parallel} от параметра ν_{\parallel} для пропускающей решетки при различных значениях угла θ и параметра δ (дифракционная эффективность $\eta_0 = \sin^2 \nu_{\parallel}$, вычисленная при $\delta = 0$, т. е. по теории Когельника, изображена штриховой кривой). Различие между η_{\parallel} и η_0 повышается с увеличением угла Брэгга, причем для значений $\theta < 45^\circ$ максимумы (минимумы) η_{\parallel} смещаются вправо относительно максимумов (минимумов) η_0 , а при $\theta > 45^\circ$ они располагаются левее. При $\theta = 45^\circ$ $\eta_0 = 0$, однако решение (10) допускает отличные от нуля значения η_{\parallel} , как показано на рис. 1, б (по оси абсцисс откладываются значения $\nu = \kappa T / C_R$). На рис. 2 показаны зависимости η_{\parallel} от параметра ν для отражательной решетки, причем значение $\theta = 20^\circ$ соответствует случаю $|\cos 2\theta| > 2\delta$, а $\theta = 47^\circ$ — случаю $|\cos 2\theta| < 2\delta$ (для выбранных значений δ). Штриховая кривая описывает функцию $\eta_0 = \text{th}^2 \nu_{\parallel}$.

В заключение можно отметить, что в результате решения системы четырех скалярных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих

дифракцию плоской ТМ волны на трехмерной фазовой решетке, наибольшие отличия значений дифракционной эффективности от значений, предсказываемых теорией Когельника, наблюдаются при углах Брэгга, близких к 45° , причем в случае отражательной решетки существует диапазон значений углов Брэгга, определяемый условием $|\cos 2\theta| < 2\delta$, внутри которого зависимость дифракционной эффективности от толщины решетки является периодической.

Литература

- [1] Kogelnik H. — Bell. Syst. Tech. J., 1969, v. 48, N 14, p. 2909—2947.
- [2] Kessler S., Kowarshik R. — Opt. a. Quant. Electron., 1975, v. 7, N 1, p. 1—14.
- [3] Васнецов М. В., Соскин М. С., Тараненко В. Б. — Препринт № 15. Клев, ИФ АН УССР, 1984, с. 19.
- [4] Смолевич А. М. — Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, в. 23, с. 1279—1282.
- [5] Константинов О. В., Романов Ю. Ф., Рыхлов А. Ф. — ЖТФ, 1981, т. 51, в. 2, с. 239—246.
- [6] Solyman L., Sheppard C. J. R. — JOSA, 1979, v. 69, N 4, p. 491—495.
- [7] Сердюк В. М., Хапалюк А. П. — ЖТФ, 1981, т. 51, в. 12, с. 2537—2540.
- [8] Gallagher H. J., Gaylord T. K., Moharam M. G., Guest C. C. — Appl. Opt., 1981, v. 20, N 2, p. 300—306.
- [9] Скочиллов А. Ф. — Опт. и спектр., 1985, т. 58, в. 3, с. 685—688.
- [10] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1982, с. 620.
- [11] Russel P. St. J., Solyman L. — Opt. Commun., 1979, v. 30, N 1, p. 5—7.

Поступило в Редакцию 26 октября 1984 г.