УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

КОВАЛЁВА
Виктория Александровна

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ЦЕПЯМИ ПОДГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2015

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный руководитель:	**Скиба Александр Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра алгебры и геометрии.
Официальные оппоненты:	**Гальмак Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, учреждение образования «Могилевский государственный университет продовольствия», кафедра высшей математики;
	Трофимук Александр Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры, учреждение образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования.

Оппонирующая организация — учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Защита состоится 16 мая 2015 года в 10.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20. Телефон ученого секретаря: +375 232 57 37 91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 14 апреля 2015 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д. А. Ходанович

ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы являются конечными.

Напомним, что собственная подгруппа M группы G называется *максимальной подгруппой* в G, если M не содержится ни в какой другой собственной подгруппе из G.

Результаты, связанные с изучением максимальных подгрупп, составили одно из самых содержательных направлений в теории конечных групп. Прежде всего это связано с тем, что многие известные классы групп допускают описание на основе свойств максимальных подгрупп. В частности, Б. Хупперт в работе[1] доказал, что группа является нильпотентной тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт установил, что группа сверхразрешима в том и только в том случае, когда индексы всех ее максимальных подгрупп являются простыми числами. В.Е. Дескинсом[2,3] было доказано, что группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда индекс любой максимальной подгруппы из G совпадает с ее нормальным индексом. Отметим также, что максимальные подгруппы лежат в основе многих важных признаков принадлежности группы выделенному классу групп. Наиболее известными среди них являются теорема Дескинса-Янко-Томпсона[4] о разрешимости группы, обладающей нильпотентной максимальной подгруппой, класс нильпотентности 2-силовских подгрупп которой не превосходит двух, а также теоремы О.Ю. Шмидта[5] и Б. Хупперта[1] о разрешимости групп, все максимальные подгруппы которых являются нильпотентными и сверхразрешимыми соответственно.

По мере развития теории максимальных подгрупп авторами стали предприниматься попытки изучения и применения их обобщений — максимальных цепей и n-максимальных подгрупп. Напомним, что *максимальной цепью длины n* группы G называется всякая цепь вида $H_n < H_{n-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G$, где H_i — максимальная подгруппа в H_{i-1} для всякого $i = 1, \ldots, n$. Подгруппа H группы G называется *n-максимальной подгруппой* в G, если H является последним членом некоторой максимальной цепи длины n.

Работы, посвященные изучению максимальных цепей и, в частности, n-максимальных подгрупп ($n > 1$), составили обширное направление тео-

[1] Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. — 1954. — Vol. 60. — P. 409-434.

[2] Deskins, W.E. A note on the index complex of maximal subgroups / W.E. Deskins // Arch. Math. — 1990. — Vol. 54. — P. 236-240.

[3] Deskins, W.E. On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Sympos. Pure Math. — 1959. — Vol. 1. — P. 100-104.

[4] Janko, Z. Finite groups with a nilpotent maximal subgroup / Z. Janko // J. of Austl. Math. Soc. — 1964. — Vol. 4. — P. 449-451.

[5] Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сборник. — 1924. — Т. 31. — С. 366-372.

рии конечных групп, обогащенное большим числом глубоких теорем и содержательных примеров. Наиболее ранние результаты в этом направлении были получены Л. Редеи[6], описавшим неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Б. Хуппертом[1], установившим сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы нормальны. Кроме того, в работе[1] Хупперт доказал, что в случае, когда все 3-максимальные подгруппы группы G нормальны, коммутант G' является нильпотентной группой и главный ранг группы G не превосходит двух. Позже, результаты Редеи и Хупперта получили развитие в работах многих других авторов (З. Янко, М. Судзуки, Т.М. Гаген, В.Е. Дескинс, А.Е. Спенсер, Р. Шмидт, В.А. Ведерников, Э.М. Пальчик, Н.П. Конторович, Я.Г. Беркович, Р.К. Агравал, П. Флавелл и др.). В этой связи, следует прежде всего отметить не потерявшую свое фундаментальное значение и в настоящее время работу А. Манна[7], в которой отмеченные выше результаты Хупперта были перенесены не только на субнормальные подгруппы, но и на произвольное n, зависящее только от числа простых делителей порядка группы. В частности, Манном было доказано, что если все n-максимальные подгруппы разрешимой группы G субнормальны и $|\pi(G)| \geq n+1$, то G нильпотентна; если же $|\pi(G)| \geq n-1$, то G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. И наконец, в случае, когда $|\pi(G)| = n$, Манн привел полное описание группы G.

В последние годы круг математиков, вовлеченных в изучение максимальных цепей и n-максимальных подгрупп, значительно расширился (А. Баллестер-Болинше, Л.М. Эскуэрро, В. Го, Ш. Го, К.П. Шам, Б. Ли, Ш. Ли, В.А. Белоногов, А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.С. Монахов, В.Н. Семенчук, А.Н. Скиба, В.Н. Тютянов, В.Н. Князина, В.И. Мурашко, Д.П. Андреева, Ю.В. Луценко, Е.В. Легчекова, и др.), что свидетельствует о несомненной актуальности данного направления.

Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{U}$-*субнормальной в смысле Кегеля*[8] или K-$\mathfrak{U}$-*субнормальной*[9] в G, если найдется такая цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_{i-1}/(H_{i-1})_{H_i}$ сверхразрешима для всякого $i = 1, \ldots, n$.

[6] Rédei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. — 1950. — Vol. 84. — P. 129-153.

[1] Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. — 1954. — Vol. 60. — P. 409-434.

[7] Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 395-409.

[8] Kegel, O.H. Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. — 1965. — Vol. 87. — P. 409-434.

[9] Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. — Dordrecht: Springer-Verlag, 2006. — 391 p.

В данной диссертации, развивая результаты многих из упомянутых выше авторов (Б. Хупперт, Р.К. Агравал, В.Н. Семенчук, В.С. Монахов, В.Н. Князина, А.Н. Скиба, Ю.В. Луценко и др.), мы даем полную классификацию групп, у которых все вторые либо все третьи максимальные подгруппы K-$\mathfrak{U}$-субнормальны. Отметим, что для достижения такой цели в диссертации получено расширение отмеченных результатов работы А. Манна[7] до K-$\mathfrak{U}$-субнормальных подгрупп, что, в свою очередь, привело к необходимости развития соответствующих результатов Х. Виландта, К. Дёрка, О.-Ю. Крамера и др.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» с 2011 по 2015 гг. в соответствии со следующим научными темами:

– «Разработка и применение методов локального анализа в вопросах классификации конечных групп по характеру вложения подгрупп», входящей в государственную программу научных исследований на 2011–2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»), регистрационный номер в БелИСА — 20112850;

– «Конечные группы с заданными системами K-$\mathfrak{U}$-субнормальных n-максимальных подгрупп», грант Министерства образования Республики Беларусь для аспирантов на 2014 год, регистрационный номер в БелИСА — 20140740.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является описание конечных групп с заданными свойствами максимальных цепей подгрупп.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

– исследовать общее строение конечных групп, в которых все n-максимальные подгруппы являются обобщенно субнормальными;

– получить полное описание конечных групп с $\mathfrak{U}$-субнормальными в смысле Кегеля третьими максимальными подгруппами;

– найти характеризации конечных групп по наличию в них максимальных цепей с простыми индексами;

[7] Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 395-409.

– найти характеризации конечных p-разрешимых и p-сверхразрешимых групп по свойствам их максимальных цепей;

– получить описание обобщенного гиперцентра конечных групп с заданными максимальными цепями подгрупп.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются конечные группы с заданными максимальными цепями подгрупп и, в частности, с заданными n-максимальными подгруппами. Предметом исследования является влияние свойств максимальных цепей и n-максимальных подгрупп на строение группы.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы доказательства абстрактной теории конечных групп, а также методы теории классов групп, в частности, методы теории формаций.

Научная новизна

В диссертационной работе получено решение задачи Л.А. Шеметкова о расширении результатов работы А. Манна[7] до $\mathfrak{U}$-субнормальных в смысле Кегеля подгрупп. Кроме того, получено описание конечных групп с обобщенно субнормальными вторыми и третьими максимальными подгруппами, а также найдены новые характеризации конечных групп по свойствам их максимальных цепей.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в исследованиях по теории составных конечных групп, в частности, в дальнейших исследованиях структуры групп с заданными максимальными цепями подгрупп, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ и диссертаций. Результаты исследований также могут найти применение в криптографии.

Положения, выносимые на защиту

1. Описание общего строения конечных групп, все n-максимальные подгруппы которых являются обобщенно субнормальными, теоремы 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3 [3], 2.4.2, 2.4.8 и 2.4.9 [6].

2. Описание конечных групп, каждая третья максимальная подгруппа которых является $\mathfrak{U}$-субнормальной в смысле Кегеля, теоремы 3.1.6 [7, 8], 3.1.7 и 3.1.8 [7].

3. Описание конечных групп, вторые максимальные подгруппы которых принадлежат максимальным цепям с простыми индексами, теорема 3.2.2 [4, 5].

[7]Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 395-409.

4. Критерии p-разрешимости и разрешимости конечных групп с условиями на максимальные цепи подгрупп, теорема 4.1.5 [2], следствие 4.1.9 [1].

5. Критерии p-сверхразрешимости конечных групп с условиями на максимальные цепи подгрупп, теорема 4.2.4 [2].

6. Описание обобщенного гиперцентра конечных групп с заданными максимальными цепями подгрупп, теорема 4.2.7 [2].

Все результаты диссертации являются новыми и впервые получены автором.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Александра Николаевича Скибы. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В работах [1, 2, 3, 6, 9, 13, 14, 15, 17, 18], опубликованных совместно с научным руководителем, идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализованы соискателем. Работы [7, 8] выполнены и опубликованы совместно с китайским математиком Сяолан Йи. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Результаты диссертационной работы неоднократно обсуждались и докладывались автором на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, а также на следующих конференциях:

– XV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 26-28 марта 2012 г.);

– Международной конференции «Алгебра и линейная оптимизация», посвященной 100-летию С.Н. Черникова (Екатеринбург 14-19 мая 2012 г.);

– Международной математической конференции, посвященной 70-летию профессора В.В. Кириченко (Николаев, 13-19 июня 2012 г.);

– Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию С.Н. Черникова (Киев, 20-26 августа 2012 г.);

– Международной конференции «XI Белорусская математическая конференция» (Минск, 4-9 ноября 2012 г.);

– Международной (44-й Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 27 января - 2 февраля 2013 г.);

– Международной конференции «Алгебра и комбинаторика», посвященной 60-летию члена-корреспондента РАН А.А. Махнеева (Екатеринбург, 3-7 июня 2013 г.);

– 9-ой Международной алгебраической конференции в Украине (Львов, 8-13 июля 2013 г.);

– Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 11-15 ноября 2013 г.);

– Международной (45-й Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2-8 февраля 2014 г.);

– XVII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 24-26 марта 2014 г.).

Опубликованность результатов диссертации

По теме диссертационного исследования опубликована 21 работа. Из них 8 статей в научных журналах из списка ВАК Беларуси, 1 препринт, 1 статья в сборнике научных работ, 11 материалов и тезисов докладов конференций. Общий объем опубликованных материалов составляет 8,96 авторских листов, в том числе: статьи в научных журналах — 6,03 авторских листов, препринт — 2 авторских листа, статья в сборнике научных работ — 0,3 авторских листов, материалы и тезисы докладов конференций — 0,63 авторских листов.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 126 наименований использованных источников и 21 наименования публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 141 страница, из них 11 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Александру Николаевичу Скибе за постоянное внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке.

Глава 1 содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации, на основе которого формулируются основные задачи диссертации.

Основное содержание диссертации представлено в главах 2, 3 и 4.

В работе А. Манна[7] были исследованы группы с субнормальными n-максимальными подгруппами. В частности, Манном было доказано, что если все n-максимальные подгруппы разрешимой группы G субнормальны и $|\pi(G)| \geq n+1$, то G нильпотентна; если же $|\pi(G)| \geq n-1$, то G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. И наконец, в случае, когда $|\pi(G)| \geq n$, Манн привел полное описание группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Напомним, что подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля*[8] или *K-$\mathfrak{F}$-субнормальной*[9] в G, если имеется такая цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

В 2005 году на Гомельском алгебраическом семинаре Л.А. Шеметковым была поставлена задача расширения результатов А. Манна до K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп.

Основной целью главы 2 «Общее строение групп с K-$\mathfrak{F}$-субнормальными n-максимальными подгруппами» является полное решение задачи Л.А. Шеметкова. Эта цель достигается в разделе 2.5 на основе детального изучения свойств K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в разделах 2.1-2.4.

В разделе 2.1 изучаются наиболее общие свойства K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

При исследовании групп, все n-максимальные подгруппы которых являются K-$\mathfrak{F}$-субнормальными, оказалось, что весьма существенным является условие Σ_t-замкнутости формации $\mathfrak{F}$. В разделе 2.2 доказана следующая теорема, которая позволяет ответить на вопрос о Σ_t-замкнутости некоторых важных формаций конечных групп.

2.2.11 Теорема [6]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — r-кратно насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^{r+1}$ для некоторого $r \geq 0$. Тогда для некоторого простого числа p обе формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{G}_p\mathfrak{M}$ являются Σ_{r+3}-замкнутыми.*

В данной теореме символы $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}^r$ и $\mathfrak{G}_p$ обозначают классы всех нильпотентных групп, всех разрешимых групп с нильпотентной длиной, не превышающей r ($r \geq 1$), и всех p-групп соответственно.

Следствиями теоремы 2.2.11 являются следующие известные результаты К. Дёрка и О.-Ю. Крамера.

2.2.12 Следствие (К. Дёрк[10]). *Если группа G содержит четыре сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G являются попарно взаимно*

[7]Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 395-409.

[8]Kegel, O.H. Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. — 1965. — Vol. 87. — P. 409-434.

[9]Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. — Dordrecht: Springer-Verlag, 2006. — 391 p.

[10]Doerk, K. Minimal nicht uberauflosbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. — 1966. — Vol. 91. — P. 198-205.

простыми, то G сверхразрешима.

2.2.13 Следствие (О.-Ю. Крамер[11]). *Каждая насыщенная формация, содержащаяся в $\mathfrak{N}^2$, является Σ_4-замкнутой.*

Доказательство теоремы 2.2.11 основывается на следующем обобщении теоремы Х. Виландта о разрешимости групп, содержащих три разрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами.

2.2.3 Теорема [6]. *Пусть G — такая группа, что $G = A_1A_2 = A_2A_3 = = A_1A_3$, где A_1, A_2 и A_3 — разрешимые подгруппы из G. Если индексы $|G : N_G(A_1')|$, $|G : N_G(A_2')|$, $|G : N_G(A_3')|$ являются попарно взаимно простыми, то группа G разрешима.*

2.2.5 Следствие (Х. Виландт). *Если группа G содержит три разрешимые подгруппы A_1, A_2 и A_3, индексы которых $|G : A_1|$, $|G : A_2|$, $|G : A_3|$ являются попарно взаимно простыми, то группа G разрешима.*

Отметим, что исследование общего строения групп с K-$\mathfrak{F}$-субнормальными n-максимальными подгруппами существенно использует экстремальный случай, когда $n = 2$. В разделе 2.3 получено описание групп с K-$\mathfrak{F}$-субнормальными вторыми максимальными подгруппами в случае, когда $\mathfrak{F}$ — такая наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, что каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима и содержит неединичную нормальную силовскую подгруппу.

2.3.3 Теорема [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — такая наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, что каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима и содержит нормальную силовскую p-подгруппу $G_p \neq 1$ для некоторого простого числа p. В том и только в том случае каждая вторая максимальная подгруппа группы G является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G, когда либо $G \in \mathfrak{F}$, либо G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой и $G^{\mathfrak{F}}$ является минимальной нормальной подгруппой в G.*

2.3.5 Следствие (Б. Хупперт[1]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G нормальна в G и $|\pi(G)| \geq 3$, то G нильпотентна.*

2.3.6 Следствие (А. Манн[7]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G, то G разрешима.*

2.3.7 Следствие (Р.К. Агравал[12]). *Если любая 2-максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой силовской подгруппой из G и $|\pi(G)| \geq 3$, то G нильпотентна.*

[11] Kramer, O.-U. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes / O.-U. Kramer // Math. Z. — 1974. — Vol. 139, № 1. — P. 63-68.

[1] Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. — 1954. — Vol. 60. — P. 409-434.

[7] Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 395-409.

[12] Agrawal, R.K. The influence on a finite group of its permutable subgroups / R.K. Agrawal // Canad. Math. Bull. — 1974. — Vol. 17, № 2. — P. 159-165.

2.3.8 Следствие (Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба[13]). *В том и только в том случае каждая вторая максимальная подгруппа группы G является субнормальной в G, когда либо G нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

В разделе 2.4 исследуется структура разрешимых групп, все n-максимальные подгруппы которых являются K-$\mathfrak{F}$-субнормальными для некоторой насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Доказаны следующие теоремы.

2.4.2 Теорема [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — такая r-кратно насыщенная формация, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^{r+1}$ для некоторого $r \geq 0$. Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G и $|\pi(G)| \geq n + r + 1$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

2.4.3 Следствие (А. Манн[7]). *Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G субнормальна и $|\pi(G)| \geq n + 1$, то G нильпотентна.*

2.4.8 Теорема [6]. *Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$ — такая насыщенная формация, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$, где F — канонический локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Пусть G — разрешимая группа с $|\pi(G)| \geq n + 1$. В том и только в том случае все n-максимальные подгруппы группы G являются K-$\mathfrak{F}$-субнормальными в G, когда G — группа одного из следующих типов:*

I. *$G \in \mathfrak{F}$.*

II. *$G = A \rtimes B$, где $A = G^{\mathfrak{F}}$ и B — холловы подгруппы в G, G дисперсивна по Оре и выполняются следующие условия:*

(1) *подгруппа A либо имеет вид $N_1 \times \cdots \times N_t$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа в G, являющаяся силовской подгруппой в G ($i = 1, \ldots, t$), либо является силовской p-подгруппой в G экспоненты p для некоторого простого числа p, причем коммутант, подгруппа Фраттини и центр группы A совпадают и $A/\Phi(A)$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором группы G;*

(2) *для каждого простого делителя p порядка группы A любая n-максимальная подгруппа H из G принадлежит $\mathfrak{F}$ и индуцирует на силовской p-подгруппе из A группу автоморфизмов, содержащуюся в $F(p)$.*

2.4.9 Теорема [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — такая насыщенная формация, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$. Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G и $|\pi(G)| \geq n$, то G ϕ-дисперсивна для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$.*

Наконец, в разделе 2.5 на основе теорем 2.4.2, 2.4.8 и 2.4.9 получены теоремы 2.5.1, 2.5.2 и 2.5.3, которые дают решение задачи Л.А. Шеметкова о

[13]Луценко, Ю.В. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Матем. заметки. — 2012. — Т. 91, № 5. — С. 680-688.

[7]Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 395-409.

расширении результатов работы А. Манна[7] до K-$\mathfrak{U}$-субнормальных подгрупп.

2.5.1 Теорема [3]. *Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G и $|\pi(G)| \geq n+2$, то G сверхразрешима.*

2.5.2 Теорема [3]. *Пусть G — разрешимая группа и $|\pi(G)| \geq n+1$. В том и только в том случае все n-максимальные подгруппы из G являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными в G, когда G является группой одного из следующих типов:*

I. *Группа G сверхразрешима.*

II. $G = A \rtimes B$, *где $A = G^{\mathfrak{U}}$ и B — холловы подгруппы в G, G дисперсивна по Оре и выполняются следующие условия:*

(1) *подгруппа A либо имеет вид $N_1 \times \cdots \times N_t$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа в G, являющаяся силовской подгруппой в G ($i = 1, \ldots, t$), либо является силовской p-подгруппой в G экспоненты p для некоторого простого числа p, причем коммутант, подгруппа Фраттини и центр группы A совпадают, каждый главный фактор группы G ниже $\Phi(A)$ является циклическим и $A/\Phi(A)$ является нециклическим главным фактором группы G;*

(2) *для каждого простого делителя p порядка группы A любая n-максимальная подгруппа H из G сверхразрешима и индуцирует на силовской p-подгруппе из A группу автоморфизмов, являющуюся расширением некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$.*

2.5.3 Теорема [3]. *Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G и $|\pi(G)| \geq n$, то G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$.*

В главе 3 «Группы с обобщенно субнормальными вторыми и третьими максимальными подгруппами» получены приложения теорем 2.5.1, 2.5.2 и 2.5.3 для описания групп с обобщенно субнормальными вторыми и третьими максимальными подгруппами.

В разделе 3.1 получено полное описание групп, все третьи максимальные подгруппы которых являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными. Отметим, что важную роль при исследовании таких групп играют минимальные несверхразрешимые группы, у которых сверхразрешимый корадикал является минимальной нормальной подгруппой. В связи с тем, что общее описание минимальных несверхразрешимых групп было получено в работах Б. Хупперта[1] и К. Дёр-

[7] Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 395-409.

[1] Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. — 1954. — Vol. 60. — P. 409-434.

ка[10], в диссертации введено следующее понятие.

3.1.1 Определение [7, 8]. *Группа G называется специальной группой Дёрка-Хупперта или SDH-группой, если G является минимальной несверхразрешимой группой, причем сверхразрешимый корадикал $G^{\mathfrak{U}}$ группы G является минимальной нормальной подгруппой в G.*

Заметим, что в случае, когда $|\pi(G)| > 4$ и каждая 3-максимальная подгруппа группы G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, G сверхразрешима ввиду теоремы 2.5.1. Поэтому для описания групп G с K-$\mathfrak{U}$-субнормальными третьими максимальными подгруппами необходимо было рассмотреть лишь случаи, когда $|\pi(G)| \leq 4$. Получены следующие результаты.

3.1.6 Теорема [7, 8]. *Пусть G — группа и $|\pi(G)| = 2$. Пусть p и q — различные простые делители $|G|$, P и Q — силовские p-подгруппа и q-подгруппа из G соответственно. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа из G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, когда либо G сверхразрешима, либо выполнены следующие условия:*

(I) *Если G не имеет нормальных силовских подгрупп и $O^p(G) \neq G$, то $G^{\mathfrak{U}} \leq P$, Q — такая циклическая группа, что $[Q^q, G^{\mathfrak{U}}] = 1$ и p делит $q-1$. Более того, в этом случае $G^{\mathfrak{U}}Q$ является максимальной подгруппой в G и Q индуцирует на $G^{\mathfrak{U}}$ неприводимую группу автоморфизмов.*

(II) *Если P является нормальной подгруппой в G, то справедливы следующие утверждения:*

(i) *каждая 2-максимальная подгруппа из Q индуцирует на P абелеву группу автоморфизмов экспоненты, делящей $p-1$. Каждая максимальная подгруппа из Q индуцирует на P группу автоморфизмов, которая является либо неприводимой, либо абелевой экспоненты, делящей $p-1$;*

(ii) *если P является минимальной нормальной подгруппой в G и q не делит $p-1$, то Q является циклической группой и $Z(G)$ является подгруппой в Q, причем $|Q : Z(G)| \in \{q, q^2\}$. Более того, если G не является минимальной несверхразрешимой группой, то q^2 делит $p^{q-1}-1$;*

(iii) *если $\Phi(P) \neq 1$, то $G^{\mathfrak{U}} = P$ и $P/\Phi(P)$ — нециклический главный фактор в G. Более того, если G является минимальной несверхразрешимой группой, то $|\Phi(P)| = p$. Если G не является минимальной несверхразрешимой группой, то $\Phi(P)Q$ — SDH-группа и, следовательно, $\Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в G;*

(iv) *если P не является минимальной нормальной подгруппой в G и $\Phi(P) = 1$, то $P = P_1 \times P_2$, где P_1 и P_2 — минимальные нормальные подгруппы в G и по крайней мере одна из этих подгрупп не является циклической.*

3.1.7 Теорема [7]. *Пусть G — группа и $|\pi(G)| = 3$. Пусть p, q, r —*

[10]Doerk, K. Minimal nicht uberauflosbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. — 1966. — Vol. 91. — P. 198-205.

различные простые делители $|G|$, P, Q и R — силовские p-подгруппа, q-подгруппа и r-подгруппа из G соответственно. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа из G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, когда либо G сверхразрешима, либо G является ϕ-дисперсивной, скажем, $G = P \rtimes (Q \rtimes R)$, и выполнены следующие условия:

(i) *Каждая 2-максимальная подгруппа из QR индуцирует на P абелеву группу автоморфизмов экспоненты, делящей $p-1$. Каждая максимальная подгруппа из QR индуцирует на P группу автоморфизмов, которая является либо неприводимой, либо абелевой экспоненты, делящей $p-1$.*

(ii) *Если P является минимальной нормальной подгруппой в G и $P \neq G^{\mathfrak{U}}$, то либо $G^{\mathfrak{U}} = Q$, либо $G^{\mathfrak{U}} = PQ$, причем каждая собственная подгруппа из G, содержащая PQ, сверхразрешима и R индуцирует на Q неприводимую группу автоморфизмов. Более того, в том и только в том случае $G^{\mathfrak{U}} = Q$, когда PR сверхразрешима.*

(iii) *Если $\Phi(P) \neq 1$, то $G^{\mathfrak{U}} = P$, $P/\Phi(P)$ — нециклический главный фактор в G, Q и R являются циклическими группами, причем r делит $q-1$ и qr делит $p-1$. Более того, если G является минимальной несверхразрешимой группой, то $|\Phi(P)| = p$. Если G не является минимальной несверхразрешимой группой, то $\Phi(P)QR$ — SDH-группа и, следовательно, $\Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в G.*

(iv) *Если P не является минимальной нормальной подгруппой в G и $\Phi(P) = 1$, то $P = P_1 \times P_2$, где P_1 и P_2 — минимальные нормальные подгруппы в G и по крайней мере одна из этих подгрупп не является циклической. Более того, в этом случае Q и R являются циклическими группами, r делит $q-1$ и qr делит $p-1$.*

3.1.8 Теорема [7]. *Пусть G — группа и $|\pi(G)| = 4$. Пусть $p > q > r > t$ — различные простые делители $|G|$, P, Q, R и T — силовские p-подгруппа, q-подгруппа, r-подгруппа и t-подгруппа из G соответственно. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа из G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, когда либо G сверхразрешима, либо выполнены следующие условия:*

(i) *G является дисперсивной по Оре группой.*

(ii) *P является минимальной нормальной подгруппой в G.*

(iii) *Каждая 2-максимальная подгруппа из QRT индуцирует на P абелеву группу автоморфизмов экспоненты, делящей $p-1$. Каждая максимальная подгруппа из QRT индуцирует на P группу автоморфизмов, которая является либо неприводимой, либо абелевой экспоненты, делящей $p-1$.*

(iv) *Если $P \neq G^{\mathfrak{U}}$, то либо $G^{\mathfrak{U}} = Q$, либо $G^{\mathfrak{U}} = PQ$, Q является минимальной нормальной подгруппой в G и каждая собственная подгруппа из*

G, содержащая PQ, сверхразрешима.

(v) *R и T являются циклическими группами. Более того, если QRT сверхразрешима, то Q является циклической группой.*

А.Ф. Васильевым, Т.И. Васильевой и В.Н. Тютяновым[14] было введено следующее обобщение субнормальности. Подгруппа H группы G называется *K-$\mathbb{P}$-субнормальной* в G, если найдется такая цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число, $i = 1, \ldots, n$.

В разделе 3.2 изучаются группы с K-$\mathbb{P}$-субнормальными вторыми максимальными подгруппами.

Напомним, что подгруппа H группы G называется *строго n-максимальной* в G[15], если H является n-максимальной подгруппой в G, но не является n-максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе из G.

Основным результатом раздела 3.2 является следующая теорема.

3.2.2 Теорема [4, 5]. *Для группы G следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Группа G либо сверхразрешима, либо является SDH-группой.*

(2) *Каждая 2-максимальная подгруппа группы G является K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G.*

(3) *Каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G является K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G.*

(4) *Если T — такая 2-максимальная подгруппа группы G, что T не является перестановочной с некоторой 2-максимальной подгруппой из G, то T является K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G.*

3.2.3 Следствие (Б. Хупперт[1]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G нормальна в G, то группа G сверхразрешима.*

3.2.4 Следствие (Р.К. Агравал[12]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой силовской подгруппой из G, то группа G сверхразрешима.*

3.2.5 Следствие (М. Асаад[15]). *Если каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, то группа G сверхразрешима.*

[14] Васильев, А.Ф. О K-$\mathbb{P}$-субнормальных погруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Матем. заметки. — 2014. — Т. 95, № 4. — С. 517-528.

[15] Asaad, M. Finite groups some whose n-maximal subgroups are normal / M. Asaad // Acta Math. Hung. — 1989. — Vol. 54, № 1-2. — P. 9-27.

[1] Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. — 1954. — Vol. 60. — P. 409-434.

[12] Agrawal, R.K. The influence on a finite group of its permutable subgroups / R.K. Agrawal // Canad. Math. Bull. — 1974. — Vol. 17, № 2. — P. 159-165.

3.2.6 Следствие (В.С. Монахов, В.Н. Княгина[16]). *В том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, когда G либо сверхразрешима, либо является SDH-группой.*

Пусть K и H — подгруппы группы G, причем K является подгруппой в H. Напомним, что пара (K, H) называется *максимальной парой в* G, если K является максимальной подгруппой в H. Заметим, что если (K, H) — максимальная пара группы G, то существует такая максимальная цепь $M_t < < M_{t-1} < \cdots < H = M_i < \cdots < M_1 < M_0 = G$, что $K = M_t$ является последним членом этой цепи.

В работе В. Го и А.Н. Скибы[17] были введены следующие понятия. Пусть K и H — подгруппы группы G, причем K является подгруппой в H. Подгруппа A группы G *покрывает* пару (K, H), если $AH = AK$; подгруппа A *изолирует* пару (K, H), если $A \cap H = A \cap K$.

Глава 4 диссертации «Характеризации групп с заданными системами максимальных пар» посвящена исследованию групп, выделенные системы подгрупп которых обладают свойством обобщенного покрытия-изолирования по отношению к заданным системам максимальных пар.

Отметим, что теория покрытия и изолирования максимальных пар имеет прямую связь с теорией CAP-подгрупп. Напомним, что подгруппа A группы G называется *CAP-подгруппой* в G[18], если A либо покрывает, либо изолирует каждую пару (K, H), где H/K — главный фактор из G. Подгруппа A называется *частичной CAP-подгруппой* группы G[19], если A либо покрывает, либо изолирует каждую пару (K, H), где H/K — фактор некоторого фиксированного главного ряда из G. Очевидно, что всякая CAP-подгруппа группы G либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что $L \leq K < H \leq T$, где T/L — главный фактор из G. С другой стороны, всякая частичная CAP-подгруппа группы G либо покрывает, либо изолирует каждую максимальную пару (K, H) из G такую, что $G_{i-1} \leq K < < H \leq G_i$ для некоторого i, где $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$ — некоторый фиксированный главный ряд из G.

В разделе 4.1 рассматривается следующее обобщение понятия CAP-подгруппы.

[16]Monakhov, V.S. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. — 2013. — Vol. 62, № 2. — P. 307-322.

[17]Guo, W. Finite groups with systems of Σ-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // Science in China, Serias A: Math. — 2011. — Vol. 54, № 9. — P. 1909-1926.

[18]Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. — 901 p.

[19]Ballester-Bolinches, A. Local embeddings of some families of subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro, A.N. Skiba // Acta Math. Sinica, English Series. — 2009. — Vol. 25, № 6. — P. 869-882.

4.1.1 Определение [2]. *Пусть p — простое число и A — подгруппа группы G. Подгруппа A называется слабой CAP_p-подгруппой в G, если в G существует такой композиционный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$, что A либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что $G_{i-1} \leq K < H \leq G_i$ для некоторого i, где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и H не является p-разрешимой группой. Подгруппа A называется слабой CAP-подгруппой в G, если она является слабой CAP_p-подгруппой в G для всякого простого делителя p порядка группы G.*

Основным результатом раздела 4.1 является теорема 4.1.5, которая дает критерии p-разрешимости групп, выделенные системы подгрупп которых являются слабыми CAP_p-подгруппами.

4.1.5 Теорема [2]. *Пусть G — группа, p — простое число. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Группа G является p-разрешимой.*

(2) *Каждая максимальная подгруппа из G является слабой CAP_p-подгруппой в G.*

(3) *Каждая 2-максимальная подгруппа из G является слабой CAP_p-подгруппой в G.*

(4) *Каждая силовская p-подгруппа из G является слабой CAP_p-подгруппой в G.*

Пусть A — подгруппа группы G и $\Sigma = \{G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n\}$ — некоторый ряд подгрупп из G. Подгруппа A называется Σ-*вложенной в* G[17], если A либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H), что $G_{i-1} \leq K < H \leq G_i$ для некоторого i. Если Σ — некоторый композиционный ряд группы G, то, очевидно, каждая Σ-вложенная подгруппа из G является слабой CAP-подгруппой в G. Таким образом, справедлив следующий результат.

4.1.9 Следствие [1]. *Пусть G — группа. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Группа G разрешима.*

(2) *Каждая максимальная подгруппа из G является Σ-вложенной в G для некоторого композиционного ряда Σ из G.*

(3) *Каждая 2-максимальная подгруппа из G является Σ-вложенной в G для некоторого композиционного ряда Σ из G.*

(4) *Каждая силовская подгруппа из G является Σ-вложенной в G для некоторого композиционного ряда Σ из G.*

Из теоремы 4.1.5 вытекают также следующие известные результаты.

[17] Guo, W. Finite groups with systems of Σ-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // Science in China, Serias A: Math. — 2011. — Vol. 54, № 9. — P. 1909-1926.

4.1.10 Следствие (Ш. Го, К.П. Шам[20]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа из G является CAP-подгруппой в G.*

4.1.11 Следствие (Ю. Фан, Ш. Го, К.П. Шам[21]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа из G является частичной CAP-подгруппой в G.*

4.1.12 Следствие (Я. Вонг[22]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M из G найдется такая нормальная подгруппа N из G, что $G = NM$ и $M \cap N \leq M_G$.*

4.1.13 Следствие (Ш. Го, К.П. Шам[20]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G является CAP-подгруппой в G, то G разрешима.*

4.1.14 Следствие (Ю. Фан, Ш. Го, К.П. Шам[21]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G является частичной CAP-подгруппой в G, то группа G разрешима.*

4.1.17 Следствие (Ю. Фан, Ш. Го, К.П. Шам[21]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа из G является частичной CAP-подгруппой в G.*

В разделе 4.2 рассматривается следующее обобщение покрытия и изолирования пар.

4.2.1 Определение [2]. *Пусть A, K и H — подгруппы группы G и $K \leq H$. Подгруппа A условно покрывает или изолирует пару (K, H), если найдется такой элемент $h \in H$, что A покрывает или изолирует пару (K^h, H).*

Основными результатами раздела 4.2 являются критерии p-сверхразрешимости групп, выделенные системы подгрупп которых условно покрывают или изолируют заданные максимальные пары, а также условие, при котором выделенная нормальная подгруппа таких групп принадлежит обобщенному гиперцентру.

4.2.4 Теорема [2]. *Пусть G — группа и p — простое число. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Группа G является p-сверхразрешимой.*

(2) *Каждая подгруппа из G условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что p делит $|H : K|$.*

(3) *Группа G является p-разрешимой и всякая субнормальная подгруппа из G покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H)*

[20] Guo, X.Y. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // J. of Pure and Appl. Algebra. — 2003. — Vol. 181, № 2-3. — P. 297-308.

[21] Fan, Y. Remarks on two generalizations of normality of subgroups / Y. Fan, X.Y. Guo, K.P. Shum // Chinese J. of Contemporary Mathematics. — 2006. — Vol. 27, № 2. — P. 1-8.

[22] Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. — 1996. — Vol. 180. — P. 954-965.

из G, что p делит $|H : K|$.

(4) *Группа G является p-разрешимой и всякая примитивная подгруппа из G условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что p делит $|H : K|$.*

4.2.7 Теорема [2]. *Пусть $X \leq E$ — разрешимые нормальные подгруппы группы G. Предположим, что каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из X условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару (M, G), где $MX = G$. Если $X = E$ или $X = F(E)$, то $E \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$.*

4.2.9 Следствие (Л.М. Эскуэрро[23]). *Пусть E — такая разрешимая нормальная подгруппа группы G, что G/E сверхразрешима. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из E является CAP-подгруппой в G, то G сверхразрешима.*

4.2.11 Следствие (Л.М. Эскуэрро[23]). *Пусть E — такая разрешимая нормальная подгруппа группы G, что G/E сверхразрешима. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из $F(E)$ является CAP-подгруппой в G, то G сверхразрешима.*

[23]Ezquerro, L.M. A contribution to the theory of finite supersolvable groups / L.M. Ezquerro // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1993. — Vol. 89. — P. 161-170.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе проведено систематическое исследование влияния свойств максимальных цепей подгрупп и, в частности, n-максимальных подгрупп на строение группы.

Получено полное решение задачи Л.А. Шеметкова о расширении результатов работы А. Манна[7] до $\mathfrak{U}$-субнормальных в смысле Кегеля подгрупп (теоремы 2.5.1, 2.5.2 и 2.5.3 [3]). В основе доказательства теорем 2.5.1, 2.5.2 и 2.5.3 лежит общее строение разрешимых групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными в смысле Кегеля n-максимальными подгруппами, где $\mathfrak{F}$ — некоторая насыщенная формация (теоремы 2.4.2, 2.4.8 и 2.4.9 [6]). При исследовании таких групп оказалось, что весьма существенным является условие Σ_t-замкнутости формации $\mathfrak{F}$. Теорема 2.2.11 [6] позволяет ответить на вопрос о Σ_t-замкнутости некоторых важных формаций конечных групп. Доказательство теоремы 2.2.11 основывается на обобщении известного результата X. Виландта о разрешимости групп, содержащих три разрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами, которое дает теорема 2.2.3 [6]. Исследование общего строения групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными в смысле Кегеля n-максимальными подгруппами существенно использует экстремальный случай, когда $n = 2$. Теорема 2.3.3 [6] дает описание таких групп в случае, когда $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, причем каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима и содержит неединичную нормальную силовскую подгруппу.

Получены приложения теорем 2.5.1, 2.5.2 и 2.5.3 для описания групп, все вторые или все третьи максимальные подгруппы которых являются обобщенно субнормальными. Теоремы 3.1.6 [7, 8], 3.1.7 и 3.1.8 [7] позволяют описать группы с $\mathfrak{U}$-субнормальными в смысле Кегеля третьими максимальными подгруппами. Для описания таких групп, ввиду теоремы 2.5.1, достаточно было рассмотреть лишь случаи, когда порядок группы имеет 2, 3 или 4 простых делителя. В теореме 3.2.2 [4, 5] получено описание групп, вторые максимальные подгруппы которых являются K-$\mathbb{P}$-субнормальными. Следствиями теоремы 3.2.2 являются известные результаты Б. Хупперта, М. Асаада, Р.К. Агравала и В.С. Монахова и В.Н. Княгиной.

Найдены характеризации групп с условиями на максимальные цепи подгрупп, а именно, получены новые характеризации групп, выделенные системы подгрупп которых обладают свойством обобщенного покрытия-изолирования по отношению к заданным системам максимальных пар. По-

[7] Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 395-409.

лучены критерии p-разрешимости групп, некоторые системы подгрупп которых являются слабыми CAP_p-подгруппами (теорема 4.1.5 [2]). В качестве следствия теоремы 4.1.5 получены критерии разрешимости групп с заданными системами Σ-вложенных подгрупп для некоторого композиционного ряда Σ (следствие 4.1.9 [1]). Кроме того, как следствия теоремы 4.1.5 получены известные результаты о (частичных) CAP-подгруппах.

Получены новые характеризации p-сверхразрешимых групп, некоторые подгруппы которых условно покрывают или изолируют заданные максимальные пары (теорема 4.2.4 [2]).

Получено описание $\mathfrak{U}\Phi$-гиперцентра группы с заданными максимальными цепями подгрупп, а именно, получено условие, при котором нормальная подгруппа, всякая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы которой условно покрывает или изолирует выделенные максимальные пары группы, принадлежит $\mathfrak{U}\Phi$-гиперцентру группы (теорема 4.2.7 [2]).

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории составных конечных групп, проводимых в Гомельском, Брестском, Витебском, Полоцком и Белорусском государственных университетах.

Исследования, проведенные в диссертации, позволяют получить новые характеризации групп с заданными максимальными цепями подгрупп, а также подойти к решению задачи Л.А. Шеметкова об описании групп, в каждой максимальной цепи длины n которых существует собственная обобщенно субнормальная подгруппа. Отметим также, что полученные в диссертации результаты позволяют обобщить и развить результаты таких известных отечественных и зарубежных математиков, как А. Манн (Израиль), Р.К. Агравал, А.Е. Спенсер (США), Х. Виландт, К. Дёрк, О.-Ю. Крамер, Б. Хупперт (Германия), А. Баллестер-Болинше, Л.М. Эскуэрро (Испания), В. Го, Ш. Го, К.П. Шам (Китай), В.С. Монахов, В.Н. Семенчук, А.Н. Скиба (Беларусь) и др. Этот факт, а также то, что основные результаты диссертации опубликованы в англоязычных [4, 5, 6, 8] и в российских переводных журналах [2, 3], свидетельствует о возможности их использования не только в научных центрах Беларуси, но и за ее пределами.

О практической значимости результатов диссертации свидетельствует их использование в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ и диссертаций. Результаты исследований также могут найти применение в криптографии.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в научных журналах

1. Го, В. О Σ-вложенных и m-добавляемых подгруппах конечных групп / В. Го, В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Доклады НАН Беларуси. — 2011. — Т. 55, № 4. — С. 27-30.

2. Ковалева, В.А. Критерии p-разрешимости и p-сверхразхрешимости конечных групп / В.А. Ковалева, Юй-Фэн Лю, В. Го, А.Н. Скиба // Математические заметки. — 2013. — Т. 94, № 3. — С. 455-472.

3. Ковалева, В.А. Конечные разрешимые группы, у которых все n-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны / В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. — 2013. — Т. 54, № 1. — Р. 86-97.

4. Kovaleva, V.A. Finite groups with all 2-maximal subgroups K-$\mathbb{P}$-subnormal / V.A. Kovaleva // Mathematical Sciences Research Journal. — 2013. — Vol. 17, № 6. — P. 150-155.

5. Kovaleva, V.A. Finite groups with generalized $\mathbb{P}$-subnormal second maximal subgroups / V.A. Kovaleva // Asian-European Journal of Mathematics. — 2014. — Vol. 7, № 3. — P. 1450047-1-1450047-8.

6. Kovaleva, V.A. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. — 2014. — Vol. 17. — P. 273-290.

7. Ковалева, В.А. Finite groups with all n-maximal $(n = 2, 3)$ subgroups K-$\mathfrak{U}$-subnormal / В.А. Ковалева, С. Йи // Проблемы физики, математики и техники. — 2014. — Т. 2, № 19. — С. 59-64.

8. Kovaleva, V.A. Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups $\mathfrak{U}$-subnormal / V.A. Kovaleva, X. Yi // Acta Matematica Hungarica. — 2015. — DOI: 10.1007/s10474-015-0498-5.

Препринты

9. Ковалева, В.А. Теория обобщенного условия покрытия и изолирования в конечных группах / В.А. Ковалева, А.Н. Скиба. — Гомель, 2011. — 36 с. — (Препринт / Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины; № 1).

Статьи в сборниках научных работ

10. Ковалева, В.А. Конечные группы, у которых все n-максимальные подгруппы K-U-субнормальны / В.А. Ковалева // Творчество молодых-2012: сборник научных работ студентов и аспирантов УО «ГГУ им. Ф. Скорины»: в 2 ч. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. — Ч. 1. — С. 148-152.

11. Ковалева, В.А. Конечные группы с системами $\mathfrak{U}$-субнормальных вторых максимальных подгрупп / В.А. Ковалева // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 26-28 марта 2012 г.: в 2 ч. / редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. — Ч. 2. — С. 33.

12. Ковалева, В.А. Конечные группы с системами K-$\mathfrak{U}$-субнормальных 2- и 3-максимальных подгрупп / В.А. Ковалева // Алгебра и линейная оптимизация: тезисы Международной конференции, посвященной 100-летию С.Н. Черникова, Екатеринбург 14-19 мая, 2012 г. — Екатеринбург: УМЦ-УПИ, 2012. — С. 91.

13. Kovaleva, V.A. Finite groups with $\mathfrak{U}$-subnormal 3-maximal subgroups / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // Book of Abstracts of the International Mathematical Conference on occasion the 70th years anniversary of Professor Vladimir Kirichenko, Mykolayiv, June 13-19, 2012. — Mykolayiv: Mykolayiv V.O. Sukhomlynsky National University, 2012. — P. 58.

14. Kovaleva, V.A. Finite groups with $\mathfrak{U}$-subnormal 3-maximal subgroups / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // Book of abstracts of the International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.N. Chernikov, Kyiv, August 20-26, 2012. — Kyiv: Dragomanov National Pedagogical University, 2012. — P. 68.

15. Ковалева, В.А. Конечные группы с K-$\mathfrak{U}$-субнормальными n-максимальными подгруппами / В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // XI Белорусская математическая конференция: тезисы докладов Международной научной конференции, Минск, 4-9 ноября 2012 г. — Ч. 5. — Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2012. — С. 30-31.

16. Ковалева, В.А. Конечные группы, у которых все вторые максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны / В.А. Ковалева // Современные проблемы математики: тезисы Международной (44-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 27 января - 2 февраля 2013 г. — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2013. — С. 35.

17. Kovaleva, V.A. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal for some saturated formation $\mathfrak{F}$ / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // Алгебра и комбинаторика: тезисы Международной конференции, посвященной 60-летию члена-корреспондента РАН А.А. Махнеева, Екатеринбург, 3-7 июня 2013 г. — Екатеринбург: УМЦ-УПИ, 2013. — С. 164-165.

18. Kovaleva, V.A. One class of Σ_t-closed formations of finite groups /

V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine: Abstracts of Reports, L'viv, July 8-13, 2013. — L'viv, 2013. — P. 96.

19. Ковалева, В.А. О конечных группах, все n-максимальные подгруппы которых $\mathfrak{F}$-субнормальны / В.А. Ковалева // Мальцевские чтения: тезисы Международной конференции, Новосибирск, 11-15 ноября 2013 г. — Новосибирск, 2013. — С. 86.

20. Ковалева, В.А. Характеризации конечных групп с n-максимальными $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами / В.А. Ковалева // Современные проблемы математики: тезисы Международной (45-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 2-8 февраля 2014 г. — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2014. — С. 26-27.

21. Ковалева, В.А. Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых K-$\mathbb{P}$-субнормальны / В.А. Ковалева // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 24-26 марта 2014 г.: в 2 ч. / редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2014. — Ч. 1. — С. 77-78.

РЭЗЮМЭ

Кавалёва Вікторыя Аляксандраўна

Канечныя групы з заданымі максімальнымі ланцугамі падгруп

Ключавыя словы: канечная група, максімальны ланцуг, n-максімальная падгрупа, максімальная пара, $\mathfrak{F}$-субнармальная ў сэнсе Кегеля падгрупа, K-$\mathbb{P}$-субнармальная падгрупа, слабая CAP_p-падгрупа, Σ-укладзеная падгрупа, умоўнае пакрыццё-ізаляванне пар падгруп.

У дысертацыйнай рабоце праведзена сістэматычнае даследаванне ўплыву ўласцівасцяў максімальных ланцугоў падгруп і, у прыватнасці, n-максімальных падгруп на будову канечнай групы.

Атрымана агульнае апісанне канечных груп, усе n-максімальные падгрупы якіх з'яўляюцца $\mathfrak{F}$-субнармальнымі ў сэнсе Кегеля для заданай насычанай фармацыі $\mathfrak{F}$. Атрымана поўнае апісанне канечных груп з $\mathfrak{U}$-субнармальнымі ў сэнсе Кегеля трэцімі максімальнымі падгрупамі, а таксама поўнае апісанне канечных груп з K-$\mathbb{P}$-субнармальнымі другімі максімальнымі падгрупамі.

Знойдзены характарызацыі канечных груп з умовамі на максімальныя ланцугі падгруп. Атрыманы новыя крытэрыі p-вырашальнасці канечных груп, выдзеленыя сістэмы падгруп якіх з'яўляюцца слабымі CAP_p-падгрупамі. Атрыманы крытэрыі вырашальнасці канечных груп с заданымі сістэмамі Σ-укладзеных падгруп для некаторага кампазіцыйнага шэрагу Σ. Атрыманы новыя характарызацыі канечных p-звышвырашальных груп, некаторыя падгрупы якіх умоўна пакрываюць або ізалююць заданыя максімальныя пары. Атрымана апісанне $\mathfrak{U}\Phi$-гіперцэнтра канечных груп з заданымі максімальнымі ланцугамі падгруп.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў далейшых даследаваннях па сучаснай тэорыі канечных груп, пры чытанні спецкурсаў ва ўніверсітэтах, а таксама знайсці прымяненне ў крыптаграфіі.

РЕЗЮМЕ

Ковалёва Виктория Александровна

Конечные группы с заданными цепями максимальных подгрупп

Ключевые слова: конечная группа, максимальная цепь, n-максимальная подгруппа, максимальная пара, $\mathfrak{F}$-субнормальная в смысле Кегеля подгруппа, K-$\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа, слабая CAP_p-подгруппа, Σ-вложенная подгруппа, условное покрытие-изолирование пар подгрупп.

В диссертационной работе проведено систематическое исследование влияния свойств максимальных цепей подгрупп и, в частности, n-максимальных подгрупп на строение конечной группы.

Получено общее описание конечных групп, все n-максимальные подгруппы которых являются $\mathfrak{F}$-субнормальными в смысле Кегеля для заданной насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Получено полное описание конечных групп с $\mathfrak{U}$-субнормальными в смысле Кегеля третьими максимальными подгруппами, а также полное описание конечных групп с K-$\mathbb{P}$-субнормальными вторыми максимальными подгруппами.

Найдены характеризации конечных групп с условиями на максимальные цепи подгрупп. Получены новые критерии p-разрешимости конечных групп, выделенные системы подгрупп которых являются слабыми CAP_p-подгруппами. Получены критерии разрешимости конечных групп с заданными системами Σ-вложенных подгрупп для некоторого композиционного ряда Σ. Получены новые характеризации конечных p-сверхразрешимых групп, некоторые подгруппы которых условно покрывают или изолируют заданные максимальные пары. Получено описание $\mathfrak{U}\Phi$-гиперцентра конечных групп с заданными максимальными цепями подгрупп.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях по современной теории конечных групп, при чтении спецкурсов в университетах, а также найти применение в криптографии.

SUMMARY

Kovaleva Viktoria Aleksandrovna

Finite groups with given maximal chains of subgroups

Key words: finite group, maximal chain, n-maximal subgroup, maximal pair, K-$\mathfrak{F}$-subnormal in the sence of Kegel subgroup, K-$\mathbb{P}$-subnormal subgroup, weakly CAP_p-subgroup, Σ-embedded subgroup, conditionally cover-avoidance the pairs of subgroups.

In the dissertation a systematic study of influence of the properties of maximal chains of subgroups and n-maximal subgroups on the structure of the group was carried out.

A general description of finite groups with all n-maximal subgroups are $\mathfrak{F}$-subnormal in the sense of Kegel for some saturated formation $\mathfrak{F}$ is obtained. The complete description of finite groups with all third maximal subgroups are $\mathfrak{U}$-subnormal in the sense of Kegel and the complete description of finite groups with second maximal subgroups are K-$\mathbb{P}$-subnormal are obtained.

The characterizations of finite groups with conditions on maximal chains of subgroups are found. New criteria of p-solubility of finite groups with some systems of subgroups are weakly CAP_p-subgroups are obtained. The criteria of solubility of finite groups with given systems of subgroups are Σ-embedded for some composition series Σ are obtained. New characterizations of finite p-supersoluble groups in which some subgroups conditionally cover or avoid some maximal pairs are given. A description of $\mathfrak{U}\Phi$-hypercentre of finite groups with given maximal chains of subgroups is obtained.

All main results of the dissertation are new. They are theoretical and can be used in reseaches concerning the modern theory of finite groups, in lecturing on specialized courses at universities. They also can be used in cryptography.

Научное издание

КОВАЛЁВА Виктория Александровна

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ЦЕПЯМИ ПОДГРУПП

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 09.04.2015. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,6.
Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 60 экз. Заказ № 217.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий №1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) №02330/450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель