

Белорусский государственный университет

УДК 517.977

КУЗЬМЕНКОВ Дмитрий Сергеевич

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ В СТЕРЖНЕ
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2011

Работа выполнена в УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины».

Научный руководитель – Габасов Рафаил Федорович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры методов оптимального
управления факультета прикладной математики и
информатики
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: Марченко Владимир Матвеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики
УО «Белорусский государственный
технологический университет»;

Карпук Василий Васильевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики № 2
энергетического факультета
Белорусского национального технического
университета.

Оппонирующая организация – Учреждение образования «Гродненский
государственный университет имени
Янки Купалы».

Защита состоится **20 мая** 2011 года в **12.00** часов на заседании совета по
защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном
университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (юридический
факультет), ауд. 407, тел. ученого секретаря (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке
Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «7» *апреля* 2011 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
доктор физико-математических наук,
профессор

Лазакович Н.В.

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена проблеме оптимального управления в реальном времени тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности. Процессы, поведение которых описывается уравнениями параболического типа, встречаются во многих приложениях и являются объектом исследований многочисленных публикаций XX века, они интенсивно изучаются и в настоящее время.

Фундамент современной теории оптимального управления составляют принцип максимума Понтрягина и динамическое программирование Беллмана, которые были разработаны для систем с сосредоточенными параметрами. Эти результаты впоследствии были обобщены на системы с распределенными параметрами (А.В. Аргучинцев, А.Г. Бутковский, О.В. Васильев, Ф.П. Васильев, А.И. Егоров, Ж.Л. Лионс, К.А. Лурье, В.И. Плотников, Т.К. Сиразетдинов, В.А. Срочко и др.). Основное внимание уделялось вопросам качественной теории оптимального управления. Значительно меньше работ посвящено конструктивным методам решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами (СРП). Вопросы оптимального наблюдения и оптимального управления в условиях неопределенности для СРП в литературе почти не исследовались.

Проблема синтеза оптимальных систем до сих пор остается одной из трудных задач даже для обыкновенных систем, как в рамках принципа максимума, так и в рамках динамического программирования. Исключение составляет лишь линейно-квадратичная задача Летова-Калмана, которая не содержит геометрических ограничений на управляющие воздействия. В последние годы в теории управления широко используется методология MPC (Model Predictive Control), базирующаяся на принципе управления в реальном времени. Современная вычислительная техника и новые методы оптимизации позволяют реализовать этот фундаментальный принцип на практике.

В диссертации исследуется линейная задача оптимального управления тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности. Для нахождения программного и позиционного решений исследуемой задачи разработаны методы построения программного и позиционного решения задач оптимального управления и наблюдения теплового процесса в стержне. Предложенные в диссертации методы управления и наблюдения в реальном времени основаны на динамической реализации двойственного метода решения интервальной задачи ЛП и процедуре квазидекомпозиции фундаментальной матрицы решений математических моделей исследуемых систем.

Эффективность предложенных методов подтверждается вычислительными экспериментами.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Представленная работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины». Тема диссертации утверждена советом математического факультета УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» (протокол № 4 от 26 декабря 2005 г.) и соответствует приоритетному направлению "6.1. Математические модели и их применения к анализу систем и процессов в природе и обществе" перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2006 – 2010 годы.

Исследования проводились в рамках следующих научных программ и тем:

- ГПФИ "Математические модели" (2006-2010) по теме "Оптимальное управление большими системами" (№ госрегистрации 20061282);
- ГБ 07-02 "Математическое и компьютерное моделирование динамических систем и процессов" (2007-2011) (утверждена научно-техническим советом УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины» 26 февраля 2008 г., протокол №2).

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является разработка алгоритмов построения программных и позиционных решений задач оптимального управления тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности. Объектами исследования диссертации являются параболические системы. Предметами исследования диссертации являются программные и позиционные решения исследуемых задач оптимального управления. Процессы, поведение которых описывается уравнениями параболического типа, встречаются во многих приложениях.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи: обобщить методы построения программных решений задач оптимального управления обыкновенными системами на задачи оптимального управления параболическими системами; обобщить методы построения программных решений задач оптимального наблюдения обыкновенных систем на задачи оптимального наблюдения параболических систем; основываясь на методе построения оптимальных программ, описать алгоритм реализации позиционных решений вышеуказанных задач в режиме реального времени; разработать алгоритмы построения оптимальных гарантирующих программ и реализаций оптимальных обратных связей по выходу для задач оптимального управления тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты:

- процедура квазидекомпозиции фундаментальной матрицы для позиционного решения задач оптимального управления тепловым процессом в стержне, позволяющая на итерациях прямого и двойственного методов существенно уменьшить размерность интегрируемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений;
- процедура квазидекомпозиции фундаментальной матрицы для позиционного решения задач оптимального наблюдения теплового процесса в стержне, возникающих при оптимальном управлении тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности;
- построение оптимальных программ и реализаций в реальном времени оптимальных обратных связей для задач оптимального управления тепловым процессом в стержне, основываясь на динамической реализации двойственного метода решения интервальной задачи ЛП и процедуре квазидекомпозиции фундаментальной матрицы решений математических моделей исследуемых систем;
- построение гарантирующих программных и позиционных решений задач оптимального управления тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности, основываясь на динамической реализации двойственного метода решения интервальной задачи ЛП и процедуре квазидекомпозиции фундаментальной матрицы решений математических моделей исследуемых систем.

Личный вклад соискателя

Все результаты, изложенные в диссертации, получены соискателем. Роль научного руководителя состояла в постановке рассматриваемых в диссертации задач и анализе полученных результатов. В двух совместных опубликованных работах ([2, 4]) основные идеи и методы принадлежат соавторам (научному руководителю д-ру физ.-мат. наук Габасову Р.Ф. и д-ру физ.-мат. наук Кирилловой Ф.М.), а реализованы соискателем. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты исследований, включенные в диссертацию, докладывались и обсуждались на:

- X Республиканской научной конференции студентов и аспирантов "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях" (Беларусь, Гомель, 12-14 марта 2007 г.) [7];
- XI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях" (Беларусь, Гомель, 17-19 марта 2008 г.) [8];

– XII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях" (Беларусь, Гомель, 16-18 марта 2009 г.) [9];

– Юбилейной научно-практической конференции, посвященной 40-летию Гомельского гос. университета им. Ф. Скорины (Беларусь, Гомель, 11 июня 2009 г.) [10];

– Международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология", посвященная 100-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина (Россия, Москва, 17-22 июня 2008 г.) [12].

Опубликованность результатов диссертации

Результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, из которых: 4 статьи в научных изданиях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом – 2,45 авторского листа), 1 статья в научном рецензируемом журнале «Проблемы физики, математики и техники», 1 статья в сборнике научных статей, 5 статей в сборниках материалов научных конференций, 1 тезисы. Общий объем опубликованных материалов составляет 4.62 авторских листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка и приложения. Полный объем диссертации составляет 117 страниц, из них 10 страниц занимают 19 рисунков, 1 страницу – 4 таблицы, 3 страницы – одно приложение, 9 страниц – библиографический список, состоящий из 124 наименований, включая собственные публикации автора.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Во **введении** отражается место диссертационной работы среди исследований в области оптимального управления, обосновывается тема диссертации и актуальность исследования поставленных задач.

В **первой главе** приводится аналитический обзор литературы по проблемам, связанным с тематикой диссертации, определяются нерешенные вопросы, указываются задачи диссертационной работы.

Во **второй главе** исследуется задача оптимального управления тепловым процессом в стержне:

$$J(u) = \int_{t_*}^{t^*} c(t)|u(t)|dt \rightarrow \min, x_t = a^2 x_{ss}, (s, t) \in \Omega;$$
$$x_s(0, t) = 0, x_s(l, t) = \mu[u(t) - x(l, t)], t \in T; x(s, t_*) = x_0(s), s \in S;$$

$$g_* \leq \int_0^l [x(s, t^*) - y(s)] \phi(s) ds \leq g^*; \quad (1)$$

$$u(t) \in U = \{u \in R : |u(t)| \leq u^*\}, t \in T,$$

где $t_*, t^* > t_*, l > 0, a^2, \mu > 0, u^* > 0$, – заданные константы; $\Omega = S \times T$, $S = [0, l]$, $T = [t_*, t^*]$; $T_h = \{t_*, t_* + h_t, \dots, t^* - h_t\}$, $h_t = (t^* - t_*)/N$, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, m, N – натуральные числа; $c(t) > 0, t \in T$, $x_0(s), y(s) \in R$, $\phi(s) \in R^m, s \in S$, – непрерывные функции; $g_*, g^* \in R^m$ – заданные векторы, $x = x(s, t) \in R$ – температура в точке $s \in S$ в момент времени $t \in T$, $u = u(t) \in R$ – температура внешней среды в момент времени $t \in T$.

Функцию $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$ назовем *дискретной* (с периодом квантования h_t), если $u(t) \equiv u(\tau), t \in [\tau, \tau + h_t], \tau \in T_h$.

Задача оптимального управления (1) рассматривается в классе дискретных управляющих воздействий $u(t) \in R, t \in T$.

Аппроксимируя уравнение объекта управления методом прямых¹, задача (1) сводится к задаче оптимального управления специальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности:

$$J(u) = \int_{t_*}^{t^*} c(t) |u(t)| dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_t(s_1, t) = \bar{a}^2 [x(s_2, t) - x(s_1, t)] \\ x_t(s_i, t) = \bar{a}^2 [x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)], i = \overline{2, n-1}; \\ x_t(s_n, t) = \bar{a}^2 [x(s_{n-1}, t) - (1 + h_s \mu)x(s_n, t)] + h_s \bar{a}^2 \mu u(t); \\ x(s_i, t_*) = x_0(s_i), i = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (3)$$

$$g_* \leq \sum_{i=1}^n [x(s_i, t^*) - y(s_i)] \phi(s_i) \leq g^*; \quad (4)$$

$$u(t) \in U, t \in T, \quad (5)$$

где $h_s = l/(n-1)$, n – натуральное число; $\bar{a}^2 = a^2/h_s^2$; $s_i = ih_s$, $\phi(s_i) \in R^m$, $i = \overline{1, n}$; $\phi(s_i) = h_s \phi(s_i)$, $i = \overline{2, n-1}$, $\phi(s_1) = h_s \phi(s_1)/2$, $\phi(s_n) = h_s \phi(s_n)/2$.

Задача оптимального программного управления состоит в построении такого дискретного управляющего воздействия $u(t) \in U, t \in T$, что выполняются ограничения (4), и функционал $J(u)$ принимает минимальное значение.

¹ Крылов, В.И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 311 с.

Во второй главе вводятся определения программы, оптимальной программы (программного решения), субоптимальной программы, оптимальной обратной связи (позиционного решения) задачи (2)–(5), реализации оптимальной обратной связи.

Устройство, способное вычислять значения $u^*(\tau)$, $\tau \in T_h$, реализации оптимальной обратной связи в режиме реального времени, называется *оптимальным регулятором*.

Пусть $(f_{1j} \ f_{2j} \ \dots \ f_{nj})$, $j = \overline{1, n}$, – столбцы фундаментальной матрицы системы (3). Они удовлетворяют системе из n обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{f}_{1j} &= \bar{a}^2(f_{2j} - f_{1j}), \quad \dot{f}_{ij} = \bar{a}^2(f_{i-1j} - 2f_{ij} + f_{i+1j}), \quad i = \overline{2, n-1}; \\ \dot{f}_{nj} &= \bar{a}^2(f_{n-1j} - (1 + h_s v(t))f_{nj}), \quad f_{ij}(t_*) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad f_{nj}(t_*) = 1, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $f_{ij} = f(s_i, t; s_j, \theta)$, $t, \theta \in T_h$, $i, j = \overline{1, n}$.

Используя формулу Коши, показывается, что задача (2)–(5) эквивалентна интервальной задаче линейного программирования:

$$J(u) = \sum_{t \in T_h} c_h(t) |u(t)| \rightarrow \min, \quad \tilde{g}_* \leq \sum_{t \in T_h} d_h(t) u(t) \leq \tilde{g}^*, \quad u(t) \in U, \quad t \in T_h, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{*k} &= g_{*k} - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*) x_0(s_j) - y(s_i) \right) \varphi_k(s_i), \\ \tilde{g}_k^* &= g_k^* - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*) x_0(s_j) - y(s_i) \right) \varphi_k(s_i), \\ c_h(t) &= \int_t^{t+h_t} c(\tau) d\tau, \\ d_{hk}(t) &= \sum_{i=1}^n f_h(s_i, t^*; s_n, t) \varphi_k(s_i), \quad t \in T_h, \quad k = \overline{1, m}, \\ f_h(s_i, t; s_n, \tau) &= h_s \bar{a}^2 \mu \int_{\tau}^{\tau+h_t} f(s_i, t; s_n, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

В третьем разделе второй главы предлагается использовать вместо бесконечномерных состояний системы (3) конечномерные состояния задачи, учитывающие не только состояния системы, но и ограничения задачи. Вводятся понятия оптимальной обратной связи по состоянию задачи, реализации оптимальной обратной связи по состоянию задачи.

Для нахождения решения задачи (6) (соответственно и программных решений задачи (2)–(5)) описываются прямой и двойственный методы. Предложенные методы основаны на квазидекомпозиции $\tilde{F}(t)$, $t \in T$, фундаментальной матрицы $F(t)$, $t \in T$, решений системы (3). Квазидекомпозиция учитывает структуру системы дифференциальных уравнений (3).

Согласно (7) для нахождения $d_h(t)$, $t \in T$, нужен только последний столбец фундаментальной матрицы $f(t) = (f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_n(t))$, $t \in T$, элементы которого удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= \bar{a}^2(f_2 - f_1), \quad \dot{f}_i = \bar{a}^2(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}), \quad i = \overline{2, n-1}; \\ \dot{f}_n &= \bar{a}^2(f_{n-1} - (1 + h_s \mu)f_n), \quad f_i(t_*) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad f_n(t_*) = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Функция $f(t)$, $t \in T$, записывается в виде $f(t) = (\alpha_0(t) \in R, f^1(t) \in R^m, \alpha_1(t) \in R, f^2(t) \in R^m, \dots, \alpha_{r-1}(t) \in R, f^r(t) \in R^m, \alpha_r(t) \in R)$, $t \in T$, где $\alpha_q(t) = f_{q(m+1)+1}(t)$, $q = \overline{0, r}$; $f^q(t) = (f_i^q(t), i = \overline{1, m}) = (f_{p+i}(t), i = \overline{1, m})$, $q = \overline{1, r}$; $t \in T$; выбираются числа m , $p = (q-1)(m+1) + 1$, $r = (n-1)/(m+1)$. Из структуры матрицы коэффициентов уравнений (8) следует, что если известны значения функций $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}$, $t \in T$, то можно интегрирование системы порядка n заменить на параллельное интегрирование r систем порядка m :

$$\begin{aligned} \dot{f}_1^q &= \bar{a}^2(\alpha_{q-1}(t) - 2f_1^q + f_2^q), \quad \dot{f}_i^q = \bar{a}^2(f_{i-1}^q - 2f_i^q + f_{i+1}^q), \quad i = \overline{2, m-1}; \\ \dot{f}_m^q &= \bar{a}^2(f_{m-1}^q - 2f_m^q + \alpha_q(t)), \quad f_i^q(t_*) = f_{p+i}(t_*), \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in T, \quad q = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Функции $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}$, $t \in T$, аппроксимируются конечно-параметрическими функциями $\tilde{\alpha}_q(t)$, $q = \overline{0, r}$, $t \in T$. Через $\tilde{f}_i^q(t)$, $i = \overline{1, m}$; $q = \overline{1, r}$; $t \in T$, обозначаются решения систем (9), в которых функции $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}$; $t \in T$, заменены на $\tilde{\alpha}_q(t)$, $q = \overline{0, r}$; $t \in T$.

Квазидекомпозиция функции $f(t)$, $t \in T$, имеет вид:

$$\tilde{f}(t) = (\tilde{\alpha}_0(t), \tilde{f}^1(t), \tilde{\alpha}_1(t), \tilde{f}^2(t), \dots, \tilde{\alpha}_{r-1}(t), \tilde{f}^r(t), \tilde{\alpha}_r(t)), \quad t \in T.$$

Теорема 2.4. Для любого $\varepsilon > 0$ можно построить такие аппроксимации функций $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}$; $t \in T$, что выполняются неравенства:

$$|\alpha_q(t) - \tilde{\alpha}_q(t)| \leq \varepsilon, \quad q = \overline{0, r}; \quad |f_i^q(t) - \tilde{f}_i^q(t)| \leq \varepsilon, \quad q = \overline{1, r}; \quad i = \overline{1, m}; \quad t \in T.$$

Матрица $\tilde{F}(t)$, получающаяся из $F(t)$ заменой столбца $f(t)$ на столбец $\tilde{f}(t)$, называется *квазидекомпозицией фундаментальной матрицы* в момент времени $t \in T$.

На итерациях прямого и двойственного методов вместо фундаментальной матрицы используется ее квазидекомпозиция. Она позволяет: 1) быстро вычислять значения функции $d_h(t)$, $t \in T$, что существенно при оптимальном управлении в реальном времени для больших значений n ; 2) получить необходимую точность вычисления решения.

Вышеописанным способом можно осуществлять квазидекомпозицию всей матрицы, а не только ее последнего столбца. В этом случае функции $f_{q(m+1)+1,j}$, $q = \overline{0,r}$, $j = \overline{1,n}$, аппроксимируются конечно-параметрическими функциями, т.е. аппроксимируются стыковые элементы всех n строк.

Опираясь на квазидекомпозицию фундаментальной матрицы и двойственный метод, описывается алгоритм работы оптимального регулятора, который в режиме реального времени вычисляет значения оптимальной обратной связи по состоянию. Приводится численный пример, иллюстрирующий результаты, изложенные во второй главе диссертации.

В **третьей главе** исследуется задача оптимального наблюдения теплового процесса в стержне

$$\begin{aligned} x_t &= a^2 x_{ss}, (s, t) \in \Omega; \\ x_s(0, t) &= 0, x_s(l, t) = -\mu x(l, t), t \in T; \\ x(s, t_*) &= x_0(s), s \in S, \end{aligned} \quad (10)$$

которая возникает при оптимальном управлении тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности (см. главу 4).

Пусть неизвестное начальное состояние $x_0(s)$, $s \in S$, представимо в виде:

$$x_0(s) = x_0(s | w) = x_1(s) + \gamma'(s)w, s \in S,$$

где $x_1(s) \in R$, $\gamma(s) \in R^{n_w}$, $s \in S$, – непрерывные функции; $w \in W = \{w \in R^{n_w}, d_* \leq w \leq d^*\}$ – ограниченное множество возможных значений неизвестного параметра w ; d_* , $d^* \in R^{n_w}$ – заданные векторы соответствующих размерностей.

Множество W называется *априорным распределением неизвестного параметра* w . Априорное распределение W характеризует начальную неопределенность системы (10). Ему соответствует семейство $X_0 = X_0(\cdot) = \{x_0(\cdot | w), w \in W : x_0(\cdot | w) = (x_0(s | w), s \in S)\}$, которое называется *априорным распределением начального состояния*.

Для уменьшения начальной неопределенности системы (10) в дискретные моменты времени ведется наблюдение за изменением температуры в стержне при помощи измерительного устройства, математическая модель которого представима в виде

$$y(t) = \int_0^l c(s, t)x(s, t)ds + \xi(t), \quad t \in T_h, \quad (11)$$

где $T_h = \{t_*, t_* + h_t, \dots, t^*\}$, $h_t = (t^* - t_*)/N$, N – натуральное число; $c(s, t) \in R$, $s \in S$, $t \in T_h$, – известная непрерывная функция; $\xi(t) \in R$, $t \in T_h$, – ошибки измерения, удовлетворяющие неравенствам:

$$\xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*, \quad t \in T_h.$$

Пусть в процессе наблюдения записаны сигналы измерительного устройства

$$y(\cdot) = (y(t_*), y(t_* + h_t), \dots, y(t^*)) = (y(t), t \in T_h). \quad (12)$$

Множество $\hat{W} = \hat{W}(y(\cdot))$, соответствующее сигналу измерения $y(\cdot)$, называется *апостериорным распределением параметра* w , если оно состоит из тех и только тех векторов $w \in W$, которые вместе с некоторыми ошибками $\xi(t)$, $t \in T_h$, способны породить сигналы (12).

Множеству $\hat{W}$ соответствует апостериорное распределение $\hat{X}_0 = \hat{X}_0(y(\cdot)) = \hat{X}_0(y(\cdot), s) = \{x_1(s) + \gamma(s)\hat{W}, s \in S\}$ начального состояния.

В общем случае структура множества $\hat{W}$ довольно сложная и его трудно использовать при решении задач гарантированного оптимального управления¹. Но при решении задач гарантированного оптимального управления достаточно знать только линейные оценки множества $\hat{W}$ вида

$$\hat{\alpha} = p'w^* = \max_{w \in \hat{W}} p'w, \quad (13)$$

где p – заданный m -вектор, $\|p\| = 1$.

Экстремальная задача (13) называется (*линейной*) *задачей оптимального апостериорного наблюдения*, вектор $w^* = w^*(y(\cdot))$ – *экстремальным апостериорным параметром*, а число $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(y(\cdot))$ – *экстремальной оценкой апостериорного распределения* $\hat{W}$. Построение экстремального апостериорного параметра

¹ Габасов, Р. Алгоритм оптимизации в режиме реального времени не полностью определенной системы управления. I. Неопределенное начальное состояние / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Автомат. и телемех. – 1993. – № 4. – С. 34–43.

и соответствующей ему оценки называется *апостериорным решением задачи оптимального наблюдения*.

Пусть $\tau \in T_h$ – текущий момент времени, $y_\tau(\cdot) = (y(t), t \in T_h(\tau))$, $T_h(\tau) = \{t_*, t_* + h_t, \dots, \tau\}$ – совокупность измерений, проведенных к моменту времени τ , $Y(\tau)$ – множество всех возможных сигналов $y_\tau(\cdot)$. Множество $\hat{W}(\tau) = \hat{W}(s, \tau, y_\tau(\cdot))$ называется *текущим распределением параметра* для позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$. Ему соответствует текущее распределение $\hat{X}_0(\tau) = \hat{X}_0(\tau, y_\tau(\cdot)) = \hat{X}_0(s, \tau, y_\tau(\cdot)) = \{x_1(s) + \gamma(s)\hat{W}(\tau), s \in S\}$ начального состояния.

Семейство задач

$$\hat{\alpha}(\tau, y_\tau(\cdot)) = p'w^0(\tau, y_\tau(\cdot)) = \max_{w \in \hat{W}(\tau)} p'w, \quad (14)$$

зависящих от выходных сигналов $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau)$ измерительного устройства и моментов $\tau \in T_h$, называется *задачей оптимального позиционного наблюдения*.

Функционал $w^0(\tau, y_\tau(\cdot))$, $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau)$, $\tau \in T_h$, называется *позиционным решением* задачи оптимального наблюдения (*решением задачи оптимального позиционного наблюдения*).

Далее вводится понятие реализации позиционного решения. Устройство, способное строить значения $\hat{\alpha}^*(\tau)$, $\tau \in T_h$, реализации позиционного решения в режиме реального времени, называется *оптимальным эстиматором*.

Как и во второй главе, аппроксимируя систему (10) методом прямых, получается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Аппроксимируя измерительное устройство (11) с помощью одной из квадратурных формул (например, формулы трапеций), и с учетом вида множества $\hat{X}_0(\tau)$, получается

$$y(t) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) (x_1(s_j) + \gamma(s_j)w) + \xi(t), t \in T_h, \quad (15)$$

где $c(s_1, t) = c(s_i, t)/2$, $c(s_n, t) = c(s_n, t)/2$, $t \in T_h$.

Задачу (13) можно записать в виде интервальной задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} p'w &\rightarrow \max; \\ \xi_*(t) &\leq d'(t)w \leq \xi^*(t), t \in T_h; \\ d_* &\leq w \leq d^*, \end{aligned}$$

где

$$\xi_*(t) = \xi_* - y(t) + h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) x_1(s_j),$$

$$\begin{aligned}\xi^*(t) &= \xi^* - y(t) + h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) x_1(s_j), \\ d(t) &= -h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) \gamma(s_j), \quad t \in T_h,\end{aligned}\tag{16}$$

$f(s_i, t; s_j, \tau) = f_{ij}(t, \tau)$, $t, \tau \in T$, $i, j = \overline{1, n}$, – элементы фундаментальной матрицы решений системы (10).

Существенную роль в предлагаемых прямом и двойственном методах построения апостериорного решения задачи оптимального наблюдения (13) играет процедура квазидекомпозиции фундаментальной матрицы решений системы (10).

Теорема 3.3. Фундаментальная матрица решений $F(t)$, $t \in T$, системы (10) является симметричной.

Из вида измерительного устройства (15) следует, что если $c(s_i, t) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, $t \in T_h$, то необходимо знать i -ую строку фундаментальной матрицы. Т. к. фундаментальная матрица $F(t)$, $t \in T$, является симметричной, то ее строку можно вычислить за одно интегрирование системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений.

Квазидекомпозиция i -ой строки фундаментальной матрицы осуществляется аналогично главе 2. Через $\tilde{f}_i(t)$ обозначается квазидекомпозиция i -ой строки фундаментальной матрицы в момент $t \in T$.

Матрица $\tilde{F}(t)$, получающаяся из $F(t)$ заменой строк $f_i(t)$ на строки $\tilde{f}_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, называется *квазидекомпозицией фундаментальной матрицы* в момент времени $t \in T$.

Таким образом, процедура квазидекомпозиции фундаментальной матрицы $F(t)$, $t \in T$, сводящаяся к квазидекомпозиции ее строк, позволяет параллельное интегрирование n систем порядка n заменить на параллельное интегрирование $n \cdot r$ систем порядка m .

На итерациях прямого и двойственного методов вместо фундаментальной матрицы используется ее квазидекомпозиция.

Основываясь на квазидекомпозиции фундаментальной матрицы и двойственном методе, описывается алгоритм построения позиционного решения задачи (14) в режиме реального времени. Приводится численный пример, иллюстрирующий результаты, изложенные в третьей главе диссертации.

В **четвертой главе** исследуется задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на одном конце в условиях неопределенности. Рассматривается случай, когда неопределенность содержится в начальных условиях:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_*}^{t^*} q(t)|u(t)|dt \rightarrow \min; \\
& x_t = a^2 x_{ss}, (s, t) \in \Omega; \\
& x_s(0, t) = 0, x_s(l, t) = \mu[u(t) - x(l, t)], t \in T; \\
& x(s, t_*) = x_0(s) = x_1(s) + \gamma'(s)w, s \in S; \\
& g_* \leq \int_0^l [x(s, t^*) - \eta(s)]\phi(s)ds \leq g^*; \\
& u(t) \in U = \{u \in R : |u(t)| \leq u^*\}, t \in T; \\
& w \in W = \{w \in R^{n_w}, d_* \leq w \leq d^*\}; \\
& y(t) = \int_0^l c(s, t)x(s, t)ds + \xi(t), t \in T_h; \\
& \xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*, t \in T_h,
\end{aligned} \tag{17}$$

где $x_1(s) \in R$, $\eta(s) \in R$, $\gamma(s) \in R^{n_w}$, $s \in S$, $q(t) > 0$, $t \in T$, – непрерывные функции; W – ограниченное множество возможных значений неизвестного параметра w ; d_* , $d^* \in R^{n_w}$ – заданные векторы; $y(t) \in R$, $t \in T_h$, – измерительное устройство; $c(s, t) \in R$, $s \in S$, $t \in T_h$, – известная непрерывная функция; $\xi(t) \in R$, $t \in T_h$, – ошибки измерения, ξ_* , ξ^* – заданные числа. Остальные параметры задачи имеют такой же смысл, как и в задаче (1).

Задача (17) рассматривается в классе дискретных управляющих воздействий $u(t) \in R$, $t \in T$.

Так же как и во второй главе, аппроксимируя уравнение объекта управления методом прямых, получается система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вводятся понятия оптимальной гарантирующей априорной и текущей программ, оптимальной гарантирующей обратной связи задачи (17), реализации оптимальной гарантирующей обратной связи, оптимального регулятора по распределению.

В этой главе используется современный принцип оптимального управления – *оптимальное управление в реальном времени*, в котором оптимальная гарантирующая обратная связь не строится, а текущие значения ее реализации вычисляются в процессе управления за время, не превосходящее h_t , т.е. в режиме реального времени.

Для исследуемой задачи обосновывается принцип разделимости, в соответствии с которым она разбивается на $2m$ задач оптимального наблюдения

$$\begin{aligned}
& \chi_k^*(\tau) = \max_w p'_k w, \\
& \xi_*(t) \leq d'(t)w \leq \xi^*(t), t \in T_h, w \in W;
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\chi_{*k}(\tau) = \min_w p'_k w; \quad (19)$$

$$\xi_*(t) \leq d'(t)w \leq \xi^*(t), \quad t \in T_h, w \in W,$$

и одну детерминированную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{\tau}^{t^*} q(t)|u(t)|dt \rightarrow \min; x_t = a^2 x_{ss}; \\ x_s(0, t) &= 0, x_s(l, t) = \mu[u(t) - x(l, t)]; x(s, t_*) = x_1(s), s \in S; \\ g_*(\tau) &\leq \int_0^l [x(s, t^*) - \eta(s)]\phi(s)ds \leq g^*(\tau); u(t) \in U, t \in T^\tau = [\tau, t^*], \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$p_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*) \gamma'(s_j) \phi_k(s_i);$$

$d(t), \xi_*(t), \xi^*(t), t \in T_h$, определяются по формулам (16); $f(s_i, t; s_j, \tau) = f_{ij}(t, \tau)$, $t, \tau \in T, i, j = \overline{1, n}$, – элементы фундаментальной матрицы решений, которая вводится аналогично главе 2;

$$\begin{aligned} g_k^*(\tau) &= g_k^* - \chi_k^*(\tau) - \sum_{i=1}^n \sum_{t=t_*}^{\tau-h_t} f_h(s_i, t^*; s_n, t) u(t), \quad k = \overline{1, m}, \\ g_{*k}(\tau) &= g_{*k} - \chi_{*k}(\tau) - \sum_{i=1}^n \sum_{t=t_*}^{\tau-h_t} f_h(s_i, t^*; s_n, t) u(t), \quad k = \overline{1, m}, \\ f_h(s_i, t; s_n, \tau) &= h_s \bar{a}^2 \mu \int_{\tau}^{\tau+h_t} f(s_i, t; s_n, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Задачи (18), (19) называются *сопровождающими задачами оптимального наблюдения*, а задача (20) – *сопровождающей (детерминированной) задачей оптимального управления* для задачи оптимального управления в условиях неопределенности (17).

Для программного решения задач (18), (19) применяются методы, описанные в третьей главе, а для программного решения задачи (20) – методы, описанные во второй главе. Используемые методы, как и в предыдущих главах, базируются на квазидекомпозиции фундаментальной матрицы $F(t), t \in T$.

Далее в четвертой главе описывается алгоритм работы оптимального регулятора по распределению. Приводится численный пример, иллюстрирующий результаты, изложенные в четвертой главе диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации предлагаются методы построения оптимальных программ и реализаций оптимальных обратных связей для задач оптимального управления тепловым процессом в стержне.

Рассмотрены следующие задачи:

1. Задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на одном конце [1, 2, 6, 7, 8, 12]. Предложен метод ее приближенного решения путем сведения к задаче оптимального управления большой обыкновенной динамической системой. С помощью предложенной в диссертации процедуры квазидекомпозиции фундаментальной матрицы решений исследуемой параболической системы описана динамическая реализация двойственного адаптивного метода ЛП для построения программных решений задач оптимального управления тепловым процессом в стержне. Основываясь на изложенном методе, описан алгоритм работы оптимального регулятора, формирующего значения реализаций оптимальных обратных связей в режиме реального времени [1, 2, 5].

2. Задача оптимального наблюдения теплового процесса в стержне [3, 9, 10]. Для этой задачи предложены метод построения апостериорного решения, метод оптимального наблюдения в реальном времени, основанный на динамической реализации двойственного метода ЛП и процедуре квазидекомпозиции, что позволяет быстро строить оценки текущего состояния теплового процесса [3].

3. Задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на одном конце в условиях неопределенности [4, 11]. В исследуемой задаче неопределенность содержится в начальных условиях. Данная задача была сведена к задачам оптимального наблюдения линейной системой [3] и оптимального управления детерминированной системой по вычисленным оценкам [4]. Полученные задачи были решены с помощью методов, описанных во второй и третьей главах. При решении детерминированных задач оптимального управления использованы оптимальные гарантирующие обратные связи по выходу, реализующиеся согласно принципу управления в реальном времени.

При решении задач оптимального управления тепловым процессом в стержне вместо бесконечномерных состояний системы предложено использовать конечномерные состояния задачи, учитывающие не только состояния системы, но и ограничения задачи.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Эффективность предложенных в диссертации методов подтверждена вычислительными экспериментами. Описанные методы можно рекомендовать использовать на практике не только при оптимальном управлении тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности, но и при оптимальном управлении другими параболическими системами в условиях неопределенности. Подобные системы часто встречаются в химической промышленности, металлургии и других отраслях.

Описанные в диссертации методы, основанные на динамической реализации двойственного метода ЛП и процедуре квазидекомпозиции, допускают распараллеливание, что обеспечивает при использовании дополнительных процессоров значительное увеличение скорости построения решения. Этот факт играет существенную роль при оптимальном управлении в реальном времени.

В дальнейшем предполагается обобщить разработанные алгоритмы на задачи оптимального управления и наблюдения более общими параболическими системами. В частности, предполагается исследовать задачи оптимального управления нагревом стержня с помощью подвижного источника тепла.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Кузьменков, Д.С. Распараллеливание вычислений при оптимальном управлении нагревом стержня / Д.С. Кузьменков // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2008. – № 5 (50), ч. 1. – С. 61–64.
2. Габасов, Р. Оптимальное управление тепловым процессом / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Д.С. Кузьменков // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 1. – С. 5–9.
3. Кузьменков, Д.С. Оптимальное наблюдение за системой параболического типа / Д.С. Кузьменков // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 1. – С. 63–70.
4. Габасов, Р. Оптимальное управление тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности / Р. Габасов, Д.С. Кузьменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 34–39.
5. Кузьменков, Д.С. Метод оптимального управления нагревом стержня / Д.С. Кузьменков // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2010. – № 5 (62). – С. 105–108.

Статьи в сборниках научных статей

6. Кузьменков, Д.С. Оптимальное управление процессом нагрева стержня / Д.С. Кузьменков // Творчество молодых 2007: сб. науч. раб. студентов и аспирантов / Гомел. гос. ун-т. им. Ф. Скорины; под ред.: О.М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 35–37.

Материалы научных конференций

7. Кузьменков, Д.С. Сведение задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами к интервальной задаче линейного программирования / Д.С. Кузьменков // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы

Х Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 12-14 марта 2007 г. / Гомел. гос. ун-т. им. Ф. Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 170–171.

8. Кузьменков, Д.С. Оптимальное управление системой с распределенными параметрами / Д.С. Кузьменков // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XI Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 17-19 марта 2008 г.: в 2 ч / Гомел. гос. ун-т. им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2008. – Ч. 1. – С. 127–129.

9. Кузьменков, Д.С. Оптимальное наблюдение за системой с распределенными параметрами / Д.С. Кузьменков // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XII Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 16-18 марта 2009 г.: в 2 ч / Гомел. гос. ун-т. им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2009. – Ч. 1. – С. 164–165.

10. Кузьменков, Д.С. Сведение задачи оптимального наблюдения за нагревом стержня к интервальной задаче ЛП / Д.С. Кузьменков // Юбилейная научно-практическая конференция: материалы науч.-практ. конф., посвящ. 40-летию Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины, Гомель, 11 июня 2009 г.: в 4 ч. / Гомел. гос. ун-т. им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2009. – Ч. 4 – С. 130–132.

11. Кузьменков, Д.С. Сопровождающие задачи оптимального наблюдения и управления тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности / Д.С. Кузьменков // Управление развитием крупномасштабных систем: материалы четвертой международной конференции, Москва, 4-6 октября 2010 г.: в 2 т. / М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; редкол.: С.Н. Васильев [и др.]. – Москва, 2010. – Т. 1. – С. 328–330.

Тезисы докладов научных конференций

12. Кузьменков, Д.С. Оптимальное управление нагревом стержня / Д.С. Кузьменков // Дифференциальные уравнения и топология: тезисы докладов междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина, Москва, 17-22 июня 2008 г. / Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. – Москва, 2008. – С. 357–358.

РЭЗЮМЭ

Кузьмянкоў Дзмітрый Сяргеевіч

АПТЫМАЛЬНАЕ КІРАВАННЕ ЦЕПЛАВЫМ ПРАЦЭСАМ У СТРЫЖНІ ВА УМОВАХ НЯВЫЗНАЧАНАСЦІ

Ключавыя словы: аптымальнае кіраванне, аптымальнае назіранне, цеплавы працэс, праграмныя і пазіцыйныя рашэнні, прынцып кіравання ў рэальным часе, квазідэкампазіцыя фундаментальнай матрыцы.

Мэтай дысертацыйнай работы з’яўляецца распрацаванне алгарытмаў будавання праграмных і пазіцыйных рашэнняў задач аптымальнага кіравання цеплавым працэсам у стрыжні ва ўмовах нявызначанасці. У даследаваных парабалічных сістэмах нявызначанасць змяшчаецца ў пачатковых умовах, для змяншэння якой вядзецца назіранне з дапамогай дыскрэтнага вымяральнага прыбора. Метадамі даследвання з’яўляюцца: метады прамых, метады тэорыі аптымальнага кіравання і лінейнага праграмавання.

Асноўныя вынікі дысертацыйнай работы:

- распрацавана працэдура квазідэкампазіцыі фундаментальнай матрыцы для задач аптымальнага кіравання цеплавым працэсам у стрыжні;
- распрацавана працэдура квазідэкампазіцыі фундаментальнай матрыцы для задач аптымальнага назірання цеплавога працэсу ў стрыжні;
- апісаны алгарытмы будавання аптымальных праграм і рэалізацый аптымальных адваротных сувязей у рэальным часе для задач аптымальнага кіравання цеплавым працэсам у стрыжні;
- апісаны алгарытмы будавання гарантуючых праграмных і пазіцыйных рашэнняў задач аптымальнага кіравання цеплавым працэсам у стрыжні ва ўмовах нявызначанасці.

Эфектыўнасць прапанаваных у дысертацыі метадаў пацверджана вылічальнымі эксперыментамі.

Усе вынікі, атрыманыя ў дысертацыі, з’яўляюцца новымі. Распрацаваныя ў дысертацыі метады могуць ужывацца для сінтэзу сістэм кіравання хімічнымі, тэхналагічнымі і іншымі працэсамі, матэматычнымі мадэлі якіх апісваюцца парабалічнымі ўраўненнямі.

РЕЗЮМЕ

Кузьменков Дмитрий Сергеевич

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ В СТЕРЖНЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Ключевые слова: оптимальное управление, оптимальное наблюдение, тепловой процесс, программные и позиционные решения, принцип управления в реальном времени, квазидекомпозиция фундаментальной матрицы.

Целью диссертационной работы является разработка алгоритмов построения программных и позиционных решений задач оптимального управления тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности. В исследуемых параболических системах неопределенность содержится в начальных условиях, для уменьшения которой ведется наблюдение с помощью дискретного измерительного устройства. Методами исследования являются: метод прямых, методы теории оптимального управления и линейного программирования.

Основные результаты диссертационной работы:

- разработана процедура квазидекомпозиции фундаментальной матрицы для задач оптимального управления тепловым процессом в стержне;
- разработана процедура квазидекомпозиции фундаментальной матрицы для задач оптимального наблюдения теплового процесса в стержне;
- описаны алгоритмы построения оптимальных программ и реализаций оптимальных обратных связей в реальном времени для задач оптимального управления тепловым процессом в стержне;
- описаны алгоритмы построения гарантирующих программных и позиционных решений задач оптимального управления тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности.

Эффективность предложенных в диссертации методов подтверждена вычислительными экспериментами.

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Разработанные в диссертации методы могут применяться для синтеза систем управления химическими, технологическими и другими процессами, математические модели которых описываются параболическими уравнениями.

SUMMARY

Kuzmenkov Dmitry Sergeevich

OPTIMAL CONTROL OF A THERMAL PROCESS IN THE ROD UNDER UNCERTAINTIES

Keywords: optimal control, optimal observation, thermal process, open-loop and closed-loop solutions, real time control principle, quasidecomposition of the fundamental matrix.

The goal of the thesis is to develop algorithms of constructing open-loop and closed-loop solutions of optimal control problems of a thermal process in the rod under uncertainties. In investigated parabolic systems uncertainty contains in initial conditions. In order to decrease it the system is observed using a discrete measuring device. Methods of the investigation are a method of straight lines, methods of optimal control theory and linear programming.

Main results of thesis are the following:

- procedure of quasidecomposition of the fundamental matrix for optimal control problems of a thermal process in the rod was developed;
- procedure of quasidecomposition of the fundamental matrix for optimal observation problems for a thermal process in the rod was developed;
- algorithms of constructing optimal open-loop and optimal feedback real time realization for optimal control problems of a thermal process in the rod were described;
- algorithms of constructing open-loop and closed-loop solutions for optimal control problems of a thermal process in the rod under uncertainties were described;

The effectiveness of the methods proposed in the thesis is confirmed by computing experiments.

All the results obtained in the thesis, are new. The developed in the thesis methods can be applied to synthesis of control systems of chemical, technological and other processes which mathematical models are described by the parabolic equations.

Подписано в печать 05.04.2011. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 1,16. Уч.-изд. л. 1,25.
Тираж 70 экз. Заказ № 184.

Отпечатано с оригинала макета заказчика
в республиканском унитарном предприятии
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
ЛП №02330 / 0494178 от 03.04.2009.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.

