УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

СИНИЦА
Дарья Александровна

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2018

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный руководитель: **Скиба Александр Николаевич**,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Официальные оппоненты: **Воробьев Николай Тимофеевич**,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова»;

Белоконь Людмила Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент.

Оппонирующая организация — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко.

Защита состоится 6 апреля 2018 года в 15.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: +375 232 57 37 91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 6 марта 2018 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д. А. Ходанович

ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы являются конечными.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Группа G называется: *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого i; *σ-разложимой* (Л.А. Шеметков[1]) или *σ-нильпотентной*, если $G = G_1 \times \ldots \times G_t$, где $G_1, \ldots, G_t$ — σ-примарные группы.

Отталкиваясь от заданного разбиения σ множества $\mathbb{P}$, можно выделять и изучать свойства групп G, зависящие от выбора σ.

Такой подход оказался весьма эффективным при решении ряда открытых вопросов теории формации групп и, в частности, при исследовании формационными методами факторизаций разрешимых и частично разрешимых групп (см. главу IV монографии Л. А. Шеметкова[1]).

Новые и, в определенной степени, неожиданные применения теории σ-свойств были найдены в последние годы при исследовании различных классов обобщенно субнормальных, квазинормальных (в смысле Оре[2]) и обобщенно квазинормальных подгрупп.

Подгруппа A группы G называется *S-квазинормальной* или *S-перестановочной* в G (О. Кегель[3]), если A перестановочна с любой силовской подгруппой P группы G, т.е. $AP = PA$.

Было установлено, что S-перестановочные подгруппы наследуют многие свойства квазинормальных подгрупп и, в частности, любая S-перестановочная подгруппа A группы G субнормальна в G (О. Кегель[3]) и секция A/A_G нильпотентна (В. Е. Дескинс[4]). Таким образом, как и в случае квазинормальных подгрупп, для S-перестановочной подгруппы A секция A^G/A_G нильпотентна. Более того, в отличие от квазинормальных подгрупп, S-перестановочные подгруппы образуют подрешетку решетки всех подгрупп (О. Кегель[3]), что обусловило широкую применимость таких подгрупп при исследовании различных вопросов теории групп в работах многих авторов (Р. К. Агравал, К. А. Аль-Шаро, М. Асаад, А. Баллестер-Болинше, Дж. К. Бейдлиман, Р. А. Брайс, Б. Брюстер, В. Го, С. Йи, Дж. Косси, Б. Ли, В. Лин, М. Ф. Рагланд, Д. Д. Робинсон, Д. Ханг, Х. Хейнекен, Р. Эстебан-Ромеро и др.). Среди недавних работ в этом направлении отметим публика-

[1] Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. — М.: Наука, 1978. — 272 с.

[2] Ore, O. Contributions to the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. — 1939. — Vol. 5, №. 2. — P. 431–460.

[3] Kegel, O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. H. Kegel // Math. Z. — 1962. — Vol. 78. — P. 205–221.

[4] Deskins, W. E. On quasinormal subgroups of finite groups / W. E. Deskins // Math. Z. — 1963. Vol. 82. — P. 125–132.

ции П. Шмида[5], Л. М. Эскуэро и Х. Солер-Эскрива[6], А. Н. Скибы[7], В. Го и А. Н. Скибы[8], Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы[9], И. М. Айзекса[10], Я. Г. Берковича и И. М. Айзекса[11].

Полезность S-перестановочных подгрупп обусловлена прежде всего тем, что в группе G имеется силовская p-подгруппа для любого простого числа p, делящего её порядок. При заданном $\pi \subseteq \mathbb{P}$, в общем случае группа G может не иметь холловой π-подгруппы. Если же группа G обладает холловой σ_i-подгруппой при всех $i \in I$, то G называется *σ-полной*[12,13]. Понятно, что всякая разрешимая группа σ-полна для любого разбиения σ множества $\mathbb{P}$. Более того, σ-полной является и всякая σ-разрешимая группа[12], т.е. группа, у которой каждый главный фактор является σ-примарным.

Подгруппа A группы G называется *σ-перестановочной* в G[12], если G является σ-полной и A перестановочна со всеми холловыми σ_i-подгруппами V группы G, т.е. $AV = VA$ для всех i.

Оказалось, что для любой σ-перестановочной подгруппы A группы G секция H^G/H_G является *σ-нильпотентной*[12].

Заметим, что отмеченные выше результаты Дескинса и Кегеля являются специальными случаями этого результата в случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$.

Более того, из этого результата также следует, что каждая σ-перестановочная подгруппа является σ-субнормальной в смысле следующего определения.

Определение. Подгруппа A группы G называется *σ-субнормальной в* G[12], если она является $\mathfrak{N}_\sigma$*–субнормальной в* G в смысле Кегеля[3], т.е. существует такая цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G,$$

[5]Schmid, P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups / P. Schmid // J. Algebra. — 1998. — Vol. 207. — P. 285–293.

[6]Ezquerro, L. M. Some permutability properties related to $\mathfrak{F}$-hypercentrally embedded subgroups of finite groups / L. M. Ezquerro, X. Soler-Escriva // J. Algebra. — 2003. — Vol. 264. — P. 279–295.

[7]Skiba, A. N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. — 2007. — Vol. 315. — P. 192–209

[8]Skiba, A. N. Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups / W. Guo, A. N. Skiba // J. Algebra. — 2009. — Vol. 321. — P. 2843–2860.

[9]Shemetkov, L. A. On the $\mathcal{X}\Phi$-hypercentre of finite groups / L. A. Shemetkov, A. N. Skiba // J. Algebra. — 2009. — Vol. 322, № 6. — P. 2106–2117.

[10]Isaacs, I. M. Semipermutable π-subgroups / I. M. Isaacs // Arch. Math. — 2014. — Vol. 102. — P. 1–6.

[11]Bercovich, Y. G. p-Supersolvability and actions on p-groups stabilizing certain subgroups / Y. G. Bercovich, I. M. Isaacs // J. Algebra. — 2014. — Vol. 414. — P. 82–94.

[12]Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. — 2015. — Vol. 436. — P. 1–16.

[13]Skiba, A. N. A generalization of a Hall theorem / A. N. Skiba // J. Algebra and its Application. — 2016. — Vol. 15, № 4. — P. 21–36.

[3]Kegel, O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. H. Kegel // Math. Z. — 1962. — Vol. 78. — P. 205–221.

что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо секция $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ σ-нильпотентна для всех $i = 1, \ldots, n$.

Результаты главы IV книги Л. А. Шеметкова[1] и результаты работ А. Н. Скибы[12,13] послужили мотивацией необходимости выявления и изучения многих других σ-свойств групп[14–27].

Группа G называется CLT-группой или группой, удовлетворяющей обратной теореме Лагранжа, если для любого натурального делителя n её порядка в группе G имеется подгруппа порядка n.

Важность изучения CLT-групп обусловлена прежде всего тем, что каждая разрешимая группа может быть изоморфно вложена в некоторую CLT-группу. Это обстоятельство указывает также на то, что класс CLT-групп весьма широк, что послужило основной мотивацией для выделения и изуче-

[1]Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. — М.: Наука, 1978. — 272 с.

[12]Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. — 2015. — Vol. 436. — P. 1–16.

[13]Skiba, A. N. A generalization of a Hall theorem / A. N. Skiba // J. Algebra and its Appl. — 2016. — Vol. 15, № 4. — P. 21–36.

[14]Guo, W. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. — 2015. — Vol. 18. — P. 191–200.

[15]Beidleman, J. C. On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups / J. C. Beidleman, A. N. Skiba //J. Group Theory. — 2017. — Vol. 20, № 5. — P. 955–969.

[16]Al-Sharo, K. A. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / K. A. Al-Sharo, A. N. Skiba // Comm. Algebra. — 2017. — Vol. 45, № 10. — P. 4158–4165.

[17]Guo, W. On Π-quasinormal subgroups of finite groups / W. Guo, A. N. Skiba // Monatsh. Math. — 2016. — DOI: 10.1007/s00605-016-1007-9.

[18] Guo, W. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups σ-permutably embedded / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. — 2017. — Vol. 20 — P. 169–183.

[19]Guo, W. On the lattice of $\Pi_\mathfrak{I}$-subnormal subgroups of a finite group / W. Guo, A. N. Skiba // Bull. Austral. Math. Soc. — 2017. — Vol. 96, № 2. — P. 233-244.

[20]Hu, B. On finite groups with generalized σ-subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // Comm. Algebra. — 2017. — DOI: 10.1080/00927872.2017.1404091.

[21]Huang, J. Finite groups with given systems of σ-semipermutable subgroups / J. Huang, B. Hu, A. N. Skiba // J. Algebra and its Appl. — 2017. — Vol. 96, № 2. — P. 1850031-1–1850031-13.

[22]Hu, B. On generalized S-quasinormal and generalized subnormal subgroups of finite groups / B. Hu, J. Huang, A. N. Skiba // Comm. Algebra — 2017. — DOI: 10.1080/00927872.2017.1357076.

[23]Huang, J. Groups with only σ-semipermutable and σ-abnormal subgroups / J. Huang, B. Hu, A. N. Skiba // Acta Math. Hung. — 2017. — Vol. 153, № 1. — P. 236–248.

[24]Skiba, A. N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A. N. Skiba // J. Algebra. — 2018. — Vol. 495, № 1. — P. 114-129.

[25]Skiba, A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A. N. Skiba // Comm. Math. Stat. — 2016. — Vol. 4, № 3. — P. 281–309.

[26]Hu, B. On weakly σ-quasinormal subgroups of finite groups / B. Hu, J. Huang, A. N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. — 2018. — Vol 92, № 1-2. — P. 201–216.

[27]Го, В. Замечания о ранге конечной разрешимой группы / В. Го, Л. Чжан, А. Н. Скиба //Сибир. матем. ж. — 2017. — Т. 58, № 5. — С. 1181–1190.

ния различных специальных подклассов этого класса[2,28–33].

Напомним, что подгруппа A группы G называется H_S-*вложенной* (соответственно H_{sn}-*вложенной*), если A является холловой подгруппой в некоторой S-перестановочной (соответственно некоторой субнормальной) подгруппе группы G.

Развивая результаты работ[2,28–33], в недавних публикациях[34–38] А. Баллестер-Болинше, С. Х. Киао, В. С. Монахов, В. Н. Князина, Ш. Ли, Д. Лиу, Д. Хи, Г. Нонг и Л. Чжоу описали группы с заданными системами H_S-вложенных и H_{sn}-вложенных подгрупп. В частности, было найдено точное строение групп G, у которых для каждого натурального делителя n их порядка имеется H_{sn}-вложенная подгруппа[36]. Заметим, что результаты работ[34–38] имеют дело лишь с разбиением $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ множества $\mathbb{P}$.

В общем случае, мы говорим, что подгруппа A группы G является H_σ-*субнормально вложенной* (соответственно H_σ-*перестановочно вложенной*) в G, если A является σ-холловой подгруппой в некоторой σ-субнормальной (соответственно некоторой σ-перестановочной) подгруппе группы G. При этом подгруппа A группы G называется σ-*холловой* в G, если $\sigma_i \cap \pi(A) = \emptyset$ для всех i таких, что $\sigma_i \cap \pi(|G : A|) \neq \emptyset$.

Во второй главе диссертации, усиливая все основные результаты работ[34–37], изучаются группы с заданными системами H_σ-субнормально вложенных и H_σ-перестановочно вложенных подгрупп. В частности, в диссертации описано строение групп G, у которых для каждого натурального делителя n их порядка имеется либо H_σ-субнормально вложенная, либо H_σ-перестановочно вложенная подгруппа A.

---

[2] Ore, O. Contributions to the theory of groups of finite order / O. Ore //Duke Math. J. — 1939. — Vol. 5, №. 2. — P. 431–460.

[28] Holmes, C. V. A characterization of finite nilpotent groups / C. V. Holmes // Amer. Math. Monthly. — 1966. — Vol. 73. — P. 1113–1114.

[29] Zappa, G. Remark on a recent paper of O. Ore / G. Zappa // Duke Math. J. — 1940. — Vol. 6. — P. 511–512.

[30] Barry, F. Some supersolvability conditions for finite groups / F. Barry, D. MacHale, A. N. She // Math. Proc. of the Royal Irish Academy. — 2006. — Vol. 106A. — P. 163–177.

[31] Gagen, T. M. A note on groups with the inverse Lagrange property / T. M. Gagen // Group Theory: Lect. Notes Math (Proc. Miniconf., Austral. Nat. Univ., Canberra, 1975). — 1977. — Vol. 573. — P. 51–52.

[32] Ballester-Bolinches, A. On some classes of supersoluble groups / A. Ballester-Bolinches, J. C. Beidlemann, R. Esteban-Romero // J. Algebra. — 2007. — Vol. 312. — P. 445–454.

[33] Humphreys, J. F. On goups satifying the converse Lagrang's theorem / J. F. Humphreys // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1974. — Vol. 75. — P. 25–32.

[34] Ballester-Bolinches, A. On a problem posed by S. Li and J. Liu / A. Ballester-Bolinches, S. H. Qiao // Arch. Math. — 2014. — Vol. 102. — P. 109–111.

[35] Li, S. On Hall normally embedded subgroups of finite groups / S. Li, J. He, G. Nong, L. Zhou // Comm. Algebra. — 2009. — Vol. 37. — P. 3360–3367.

[36] Li, S. On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / S. Li, J. Liu // J. Algebra. — 2013. — Vol. 388. — P. 1–9.

[37] Li, S. $CLT-$groups with Hall S-quasinormally embedded subgroups / S. Li, J. Lio // Ukrain. Math. Journal. — 2014. — Vol. 66 — P. 1281–1287.

[38] Monakhov, V. S. On Hall embedded subgroups of finite groups/ V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // J. Group Theory. — 2015. — Vol. 18. — P. 565–568.

Множество $\mathcal{H}$ подгрупп группы G называется *полным холловым σ-множеством* G[12], если каждый член $\neq 1$ множества $\mathcal{H}$ — холлова σ_i-подгруппа группы G для некоторого i и $\mathcal{H}$ содержит точно одну холлову σ_i-подгруппу группы G для каждого i. Подгруппа A группы G называется *$\mathcal{H}$-перестановочной*, если $AH = HA$ для всех $H \in \mathcal{H}$.

В специальном случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, группы с заданными системами $\mathcal{H}$-перестановочных подгрупп изучались в работах многих авторов и, в частности, в недавних работах[39–43]. В третьей главе диссертации строится теория $\mathcal{H}$-перестановочных подгрупп в общем случае (для произвольного разбиения σ множества $\mathbb{P}$), которая покрывает ряд результатов других авторов и, в частности, результаты работ[14,39,44,45].

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» с 2014 по 2017 гг. в соответствии со следующей научной темой:

— «Разработка и применение функторных и локальных методов исследования конечных групп к решению общей проблемы классификации групп по свойствам их подгрупп», номер гос. регистрации — 20161015. Тема входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является описание конечных групп с заданными системами холловых подгрупп.

---

[12] Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. — 2015. — Vol. 436. — P. 1–16.

[39] Asaad, M. On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, A. A. Heliel // Arch. Math. — 2003. — Vol. 80, № 2. — P. 113–118.

[40] Asaad, M. On weakly $\mathcal{H}$-subgroups of finite groups / M. Asaad, A. A. Heliel, M. M. Al-Shomrani // Comm. Algebra. — 2012. — Vol. 40, № 9. — P. 3540–3550.

[41] Ballester-Bolinches, A. $\mathcal{Z}$-permutable subgroups of finite groups/ A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, A. A. Heliel, M. O. Almestadi // Monatsh. Math. — 2016. — Vol. 179, № 4. — P. 523–534.

[42] Heliel, A. A. On weakly $\mathcal{Z}$-permutable subgroups of finite groups / A. A. Heliel, M. M. Al-Shomrani, T. M. Al-Gafri // J. Algebra Appl. — 2015. — Vol. 2015. — Vol. 14, № 5. — P. 1550062-1–1550062-15.

[43] Li, Y. $\mathfrak{Z}$-permutable subgroups and p-nilpotency of finite groups / Y. Li, X. Li // J. Pure and Applied Algebra. — 2005. — Vol. 202. — P. 72–81.

[14] Guo, W. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. — 2015. — Vol. 18. — P. 191–200.

[44] Agrawal, R. K. Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups / R. K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 47, № 1. — P. 77–83.

[45] Huppert, B. Zur Sylowstruktur Auflosbarer Gruppen, II / B. Huppert // Arch. Math. — 1964. — Vol. 15. — P. 251–257.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

— получить полное описание конечных групп с H_σ-субнормально вложенными подгруппами;

— получить полное описание конечных групп с H_σ-перестановочно вложенными подгруппами;

— исследовать общее строение конечных П-нильпотентных групп;

— разработать новый подход к исследованию PST-групп.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются конечные группы с заданными системами холловых подгрупп. Предметом исследования является влияние свойств систем холловых подгрупп на строение группы.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы доказательства абстрактной теории конечных групп, а также методы теории классов групп, в частности, методы теории формаций.

Научная новизна

В диссертационной работе получено полное описание конечных групп, обладающих системами H_θ-вложенных подгрупп для случаев, когда θ означает «П-перестановочность», «П-субнормальность», «нормальность», а также разработана новая методика исследования строения групп с холловыми подгруппами заданного типа.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в исследованиях по теории составных конечных групп, в частности, в дальнейших исследованиях структуры групп с заданными системами холловых подгрупп, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ и диссертаций. Результаты исследований также могут найти применение в криптографии.

Положения, выносимые на защиту

1. Описание конечных групп с H_σ-субнормально вложенными подгруппами, теорема 2.1.12 [4, 6].

2. Описание конечных групп с H_σ-перестановочно вложенными подгруппами, теоремы 2.2.9 [4, 6] и 2.2.12 [2].

3. Описание общего строения конечных П-нильпотентных групп, теоремы 2.3.6 и 2.3.7 [5].

4. Новый подход к исследованию PST-групп, теоремы 3.1.9 [1] и 3.2.8 [1].

Все результаты диссертации являются новыми и впервые получены автором.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Александра Николаевича Скибы. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В работах [1, 4, 6], опубликованных совместно с научным руководителем, идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализованы соискателем и китайскими математиками, которые обеспечели качественный перевод статей на английский язык. Работа [5] выполнена и опубликована совместно с Рыжик В. Н. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертационной работы неоднократно обсуждались и докладывались автором на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, а также на следующих конференциях:

— XLIV студенческой научно-практической конференции «Дни студенческой науки» (Гомель, 28-29 апреля 2015 г.);

— XIX Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 21-23 марта 2016 г.);

— Международной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения», посвященной 70-летию В. М. Левчука, (Красноярск, 24-27 июля 2016 г.);

— Международной XI школе-конференции «Теория групп», посвященной 70-летию А. Ю. Ольшанского, (Красноярск, 27 июля — 2 августа 2016 г.);

— Международной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (Минск, 5-10 сентября 2016 г.);

— XX Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 20-22 марта 2017 г.);

— Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (Нальчик, 17-21 мая 2017 г.).

Отдельные положения диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» и используются при чтении спецкурсов по теории групп и их классов для студентов математических специальностей, при написании курсовых и дипломных работ (акты внедрения от 14.06.2017).

Опубликованность результатов диссертации

По теме диссертационного исследования опубликовано 14 работ. Из них 6 статей в научных журналах из списка ВАК Беларуси, 1 препринт, 7 материалов и тезисов докладов конференций. Общий объем опубликованных материалов составляет 6,53 авторских листов, в том числе: статьи в научных журналах — 4,63 авторских листов, препринт — 1,3 авторского листа, материалы и тезисы докладов конференций — 0,6 авторского листа.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, трех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 105 наименований использованных источников и 14 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 89 страниц, из них 8 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Александру Николаевичу Скибе за постоянное внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Глава 1 содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации. В этой главе также сформулирован ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных результатов диссертации.

Основное содержание диссертации представлено в главах 2 и 3.

В главе 2 описывается строение групп с заданными системами H_σ-субнормально вложенных и H_σ-перестановочно вложенных подгрупп. В разделе 2.1 рассматриваются группы с H_σ-субнормально вложенными подгруппами.

Напомним, что $\sigma(n) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}; \sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-проектором в G, если $H \in \mathfrak{F}$ и для каждой подгруппы E группы G такой, что $H \leq E$ и $E/N \in \mathfrak{F}$, следует, что $E = NH$. Подгруппа H группы G называется *σ-картеровой подгруппой* в G, если H является $\mathfrak{N}_\sigma$-проектором группы G, где $\mathfrak{N}_\sigma$ — класс всех σ-нильпотентных групп.

Говорят, что группа G имеет *силовскую башню*, если G имеет нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{t-1} < G_t = G$, где $|G_i/G_{i-1}|$ — порядок некоторой силовской подгруппы группы G для каждого $i \in \{1, \dots, t\}$.

Пусть H/K — главный фактор группы G. Тогда мы говорим, что H/K является *σ-центральным* (в G), если полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарной группой. В противном случае, фактор H/K называется *σ-эксцентральным*.

Символ $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ обозначает *σ-нильпотентный* корадикал группы G, т.е. пересечение всех нормальных подгрупп N из G, у которых фактор G/N σ-нильпотентен.

Группа G называется *$H\sigma E$-группой*, если G является группой вида $G = D \rtimes M$, где $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ — такая σ-холлова подгруппа группы G с $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$, что D имеет силовскую башню и каждый главный фактор группы G ниже D является σ-эксцентральным, M является σ-картеровой подгруппой в G и M действует неприводимо на каждой M-инвариантной силовской подгруппе P группы D (т.е. $P \cdot \triangleleft P \rtimes M$).

Подгруппа A группы G называется *H_σ-субнормально вложенной* в G, если A является σ-холловой подгруппой некоторой σ-субнормальной подгруппы группы G.

Основным результатом раздела 2.1 является следующая теорема, которая используется при доказательстве последующих результатов главы.

2.1.12 Теорема [4, 6]. *Любые два из следующих условий эквивалентны:*

(i) *Каждая подгруппа группы G является H_σ-субнормально вложенной в G.*

(ii) *Каждая σ-субнормальная подгруппа H группы G является группой вида $H = D \rtimes M$, где $D = H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и M — σ-картерова подгруппа группы H.*

(iii) *Каждая σ-субнормальная подгруппа группы G является $H\sigma E$-группой.*

В разделе 2.2 исследуются группы с H_σ-перестановочно вложенными подгруппами.

Подгруппа A группы G называется *H_σ-перестановочно вложенной* (соответственно H_σ-нормально вложенной) в G, если A является σ-холловой подгруппой некоторой σ-перестановочной (соответственно нормальной) подгруппы группы G.

В разделе 2.2 доказана следующая теорема.

2.2.9 Теорема [4, 6]. *Пусть $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ — полное холлово σ-множество группы G и $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$. Тогда любые два из следующих условий эквивалентны:*

(i) *G имеет H_σ-перестановочно вложенную подгруппу порядка $|A|$ для каждой подгруппы A группы G.*

(ii) *D — циклическая группа порядка свободного от квадратов и $|\sigma_i \cap$*

$\pi(G)| = 1$ для каждого $\sigma_i \in \sigma(D)$.

(iii) *Для каждого множества $\{A_1, \ldots, A_t\}$, где A_i — подгруппа (соответственно нормальная подгруппа) группы H_i для всех $i = 1, \ldots, t$, G имеет H_σ-перестановочно вложенную (соответственно H_σ-нормально вложенную) подгруппу порядка $|A_1| \cdots |A_t|$.*

В частном случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, из теоремы 2.2.9 вытекают следующие результаты.

2.2.11 Следствие (А. Балисстер-Болинше, С. Х. Киао[34]). *Группа G имеет H_n-вложенную подгруппу порядка $|H|$ для каждой подгруппы H группы G тогда и только тогда, когда нильпотентный корадикал $G^{\mathfrak{N}}$ группы G циклический порядка свободного от квадратов.*

2.2.15 Следствие (Ш. Ли, Д. Хи, Г. Нонг, Л. Чжоу[35]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Для каждого делителя d порядка группы G существует H_n-вложенная подгруппа группы G порядка d.*

(2) *$G = G^{\mathfrak{N}}N$ и $G^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$, где N — нильпотентная подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{N}}$ — циклическая группа порядка свободного от квадратов.*

(3) *Нильпотентный корадикал $G^{\mathfrak{N}}$ группы G является циклической группой порядка свободного от квадратов.*

2.2.16 Следствие (Ш. Ли, Д. Лиу[36]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Для каждого делителя p^f порядка $|G|$ группы G, являющегося степенью простого числа p, в группе G существует H_{sn}-вложенная подгруппа индекса p^f.*

(2) *Для каждого делителя p^f порядка $|G|$ группы G, являющегося степенью простого числа p, в группе G существует H_n-вложенная подгруппа индекса p^f.*

(3) *Для каждого делителя d порядка группы G существует H_n-вложенная подгруппа G порядка d.*

(4) *Нильпотентный корадикал группы G является циклической группой порядка свободного от квадратов.*

2.2.17 Следствие (Ш. Ли, Д. Лиу[37]). *Если H_S-вложенная подгруппа группы G индекса p^n существует для каждой степени p^n простой делителя p порядка группы G, то G сверхразрешима.*

[34] Ballester-Bolinches, A. On a problem posed by S. Li and J. Liu / A. Ballester-Bolinches, S. H. Qiao // Arch. Math. — 2014. — Vol. 102. — P. 109–111.

[35] Li, S. On Hall normally embedded subgroups of finite groups / S. Li, J. He, G. Nong, L. Zhou // Comm. Algebra. — 2009. — Vol. 37. — P. 3360–3367.

[36] Li, S. On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / S. Li, J. Liu // J. Algebra. — 2013. — Vol. 388. — P. 1–9.

[37] Li, S. *CLT*–groups with Hall *S*-quasinormally embedded subgroups / S. Li, J. Lio // Ukrain. Math. Journal. — 2014. — Vol. 66 — P. 1281–1287.

2.2.18 Следствие (Ш. Ли, Д. Лиу[37]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Для каждого делителя p^n порядка $|G|$ группы G, являющегося степенью простого числа p, в группе G существует H_S-вложенная подгруппа индекса p^n.*

(2) *Для каждого делителя d порядка группы G существует H_S-вложенная подгруппа G порядка d.*

(3) *$G = G^{\mathfrak{N}}N$ и $G^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$, где $G^{\mathfrak{N}}$ — циклическая группа порядка свободного от квадратов.*

(4) *$G^{\mathfrak{N}}$ является циклической группой порядка свободного от квадратов.*

В разделе 2.2 доказана также следующая теорема, которая показывает, что группы с H_σ-перестановочно вложенными подгруппами являются $H\sigma E$-группами.

2.2.12 Теорема [2]. *Любые два из следующих условий эквиваленты:*

(i) *Каждая подгруппа группы G является H_σ-перестановочно вложенной в G.*

(ii) *$G = G^{\mathfrak{N}_\sigma} \rtimes M$ — $H\sigma E$-группа, где $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ — циклическая группа порядка свободного от квадратов.*

(iii) *$G = D \rtimes M$, где D — σ-холлова циклическая подгруппа группы G порядка свободного от квадратов с $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ и M σ-нильпотентна.*

Из теоремы 2.2.12 в частном случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, вытекает следующий результат.

2.2.13 Следствие. *Каждая подгруппа группы G является H_S-вложенной подгруппой в G тогда и только тогда, когда $G = D \rtimes M$, где $D = G^{\mathfrak{N}}$ — циклическая холлова подгруппа группы G порядка свободного от квадратов и M — картерова подгруппа группы G.*

Важным частным случаем теоремы 2.2.12 является следующее утверждение.

2.2.14 Теорема [3]. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *Всякая подгруппа группы G является H_S-вложенной подгруппой в G.*

(2) *Нильпотентный корадикал $G^{\mathfrak{N}}$ группы G является холловой циклической подгруппой в G порядка свободного от квадратов.*

(3) *$G = D \rtimes M$, где D — холлова циклическая подгруппа группы G порядка свободного от квадратов, M нильпотентна в G, а также M и D являются холловыми подгруппами в G.*

[37]Li, S. *CLT*−groups with Hall S-quasinormally embedded subgroups / S. Li, J. Lio // Ukrain. Math. Journal. — 2014. — Vol. 66 — P. 1281–1287.

В разделе 2.3 диссертации исследованы группы с H_σ-нормально вложенными подгруппами.

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Тогда натуральное число n называется Π-*числом*, если $\sigma(n) \subseteq \Pi$. Группа G называется Π-*группой*, если $|G|$ является Π-числом. Подгруппа A группы G называется *холловой* Π-*подгруппой* в G, если A —Π-группа и $|G : A|$ — Π'-число. Группа G называется Π-*нильпотентной*, если $G = A \times B$, где A — σ-нильпотентная холлова Π-подгруппа группы G и B — нильпотентная группа.

Подгруппа A группы G называется Π-*субнормальной* в G, если в G существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G,$$

где либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо секция $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \Pi$, для всех $i = 1, \ldots, n$.

Множество $\mathcal{H}$ подгрупп группы G называется *полным холловым* Π-*множеством* группы G, если каждый член $\neq 1$ из $\mathcal{H}$ — холлова σ_i-подгруппа в G для некоторого $\sigma_i \in \Pi$ и $\mathcal{H}$ содержит точно одну холлову σ_i-подгруппу из G для каждого $\sigma_i \in \Pi \cap \sigma(G)$. Мы говорим, что: (i) группа G является Π-примарной, если G — σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \in \Pi$; (ii) главный фактор H/K группы G является Π-центральным в G, если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является Π-примарной группой.

Все результаты данного раздела базируются на следующих свойствах Π–нильпотентных групп, доказанных в данном разделе.

2.3.6 Теорема. *Любые два из следующих условий эквивалентны:*

(i) *Группа G Π–нильпотентна.*

(ii) *Каждый главный фактор группы G является Π-центральным в G.*

(iii) *Каждая максимальная подгруппа группы G является Π-субнормальной в G.*

(iv) *Группа G имеет полное холлово Π-множество $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_t\}$ такое, что каждый член множества $\mathcal{H}$ является Π-субнормальным в G и каждый член этого множества, являющийся Π'-группой, нильпотентен.*

(v) *Каждая подгруппа группы G является Π-субнормальной в G.*

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

2.3.7 Теорема [5]. *Любые два из следующих условий эквиваленты:*

(i) *Каждая подгруппа из G является H_σ-нормально вложенной в G.*

(ii) *$G = G^{\mathfrak{N}_\sigma} \rtimes M$ является $H\sigma E$-группой, где $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ — циклическая группа порядка свободного от квадратов и M — дедекиндова группа.*

(iii) *$G = D \rtimes M$, где D — σ-холлова циклическая подгруппа G порядка свободного от квадратов с $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ и M — дедекиндова группа.*

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, из теоремы 2.3.7 вытекает следующий результат.

2.3.8 Следствие (Ш. Ли, Д. Лиу[36]). *Каждая подгруппа группы G является H_n-вложенной подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $G = D \rtimes M$, где $D = G^{\mathfrak{N}}$ — циклическая холлова подгруппа группы G порядка свободного от квадратов и M — дедекиндова группа.*

В главе 3 изучается строение группы G при условии, что некоторые подгруппы в G являются $\mathcal{H}$-перестановочными. В частности, здесь найдены новые критерии гиперцикличности нормальных подгрупп.

Группа G называется *PST-группой*, если S-перестановочность является транзитивным отношением в G, т.е. каждая S-перестановочная подгруппа S-перестановочной подгруппы группы G является S-перестановочной в G. В разделе 3.1 описано строение разрешимых групп, в которых все субнормальные подгруппы $\mathcal{H}$-перестановочны.

3.1.9 Теорема [1]. *Предположим, что G разрешима и она имеет такое полное холлово σ-множество $\mathcal{H}$, что каждый член H множества $\mathcal{H}$ является PST-группой. Тогда каждая субнормальная подгруппа группы G $\mathcal{H}$-перестановочна тогда и только тогда, когда $G = D \rtimes M$ — сверхразрешимая группа, где $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ — абелева холлова подгруппа группы G и D имеет нечетный порядок, в случае, когда $D \neq 1$, и каждый элемент группы M индуцирует степенной автоморфизм в группе D.*

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, мы получаем из теоремы 3.1.9 следующий хорошо известный результат.

3.1.10 Следствие (Р. К. Агравал[44]). *Разрешимая группа G является PST-группой тогда и только тогда, когда $G = D \rtimes M$ — сверхразрешимая группа, где $D = G^{\mathfrak{N}}$ — абелева холлова подгруппа группы G нечетного порядка, в которой все подгруппы нормальны в G.*

Поскольку каждая нильпотентная группа является разрешимой PST-группой, мы получаем из теоремы 3.1.9 и следствия 3.1.10 следующую новую характеризацию разрешимых PST-групп.

3.1.11 Следствие. *Разрешимая группа G является PST-группой тогда и только тогда, когда она имеет такое полное множество $\mathcal{S}$ силовских подгрупп группы G, что каждый член множества $\mathcal{S}$ перестановочен со всеми субнормальными подгруппами группы G.*

Напомним, что нормальная подгруппа E группы G называется *гиперциклически вложенной* в G[46], если каждый главный фактор группы G ниже E

---

[36]Li, S. On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / S. Li, J. Liu // J. Algebra. — 2013. — Vol. 388. — P. 1–9.

[44]Agrawal, R. K. Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups / R. K. Agrawal //Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 47, № 1. — P. 77–83.

[46]Schmidt, R. Subgroup lattices of groups / R. Schmidt. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1994. — 572 p.

цикличен. В разделе 3.2 был доказан следующий результат.

3.2.8 Теорема [1]. *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что G обладает таким полным холловым σ-множеством $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_t\}$, что $H_i \cap E$ нильпотентна для $i \in \{1, \ldots, t\}$ и каждый элемент $H \in \mathcal{H}$ с нециклической родгруппой $H \cap E$ сверхразрешим. Если максимальные подгруппы группы $H_i \cap E$ $\mathcal{H}$-перестановочны для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$ таких, что $H_i \cap E$ не циклична, тогда E гиперциклически вложена в G.*

Следствиями теоремы 3.2.8 являются следующие известные результаты.

3.2.9 Следствие (Б. Хупперт[45] и М. Асаад, А. А. Хелиэль[39]). *Если G имеет такое полное множество $\mathcal{S}$ силовских подгрупп, что каждая подгруппа в $\mathcal{S}$ перестановочна с всеми максимальными подгруппами любого члена множества $\mathcal{S}$, тогда G сверхразрешима.*

3.2.11 Следствие (М. Асаад, А. А. Хелиэль[39]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и E — нормальная подгруппа группы G с $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что G имеет такое полное множество $\mathcal{S}$ силовских подгрупп, что максимальные подгруппы группы $P_i \cap E$ перестановочны со всеми членами множества $\mathcal{S}$ для всех $i = 1, \ldots, t$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

3.2.12 Следствие (В. Го, А. Н. Скиба[14]). *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что G обладает таким полным холловым σ-множеством $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_t\}$, что каждая подгруппа $H \in \mathcal{H}$ нильпотентна. Если максимальные подгруппы группы $H_i \cap E$ $\mathcal{H}$-перестановочны для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$, тогда E гиперциклически вложена в G.*

---

[45] Huppert, B. Zur Sylowstruktur Auflosbarer Gruppen, II / B. Huppert // Arch. Math. — 1964. — Vol. 15. — P. 251–257.

[39] Asaad, M. On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, A. A. Heliel // Arch. Math. — 2003. — Vol. 80, № 2. — P. 113–118.

[14] Guo, W. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. — 2015. — Vol. 18. — P. 191–200.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе проведено систематическое исследование σ-свойств конечных групп.

Изучены группы, обладающие системами H_θ-вложенных подгрупп для случаев, когда θ означает «П-перестановочность», «П-субнормальность», «нормальность». В теореме 2.1.12 [4, 6] получено описание конечных групп с H_σ-субнормально вложенными подгруппами. Теоремы 2.2.9 [4, 6] и 2.2.12 [2, 4] позволили полностью описать группы с H_σ-перестановочно вложенными подгруппами. В частности, доказано, что в таких группах σ-нильпотентный корадикал группы является циклической группой порядка свободного от квадратов (теорема 2.2.9 [4, 6]). Следствиями теорем 2.1.12, 2.2.9 [4, 6] и 2.2.12 [2] являются известные результаты А. Баллестер-Болинше и С.Х. Киао[34], Ш. Ли, Д. Хи, Г. Нонг и Л. Чжоу[35], Ш. Ли и Д. Лиу[36,37].

В диссертации также исследованы группы с H_σ-нормально вложенными подгруппами (теорема 2.3.7 [5]). Проведенные исследования позволили получить новые характеризации П-нильпотентных групп. Теорема 2.3.6 позволяет ответить на вопрос о П-нильпотентности групп, каждая максимальная подгруппа которой является П-субнормальной.

Изучена структура группы при условии, что некоторые подгруппы в группе являются $\mathcal{H}$-перестановочными. Усилен классический результат Агравaля[44] о группах с транзитивным отношением S-квазинормальности. Описано строение разрешимых групп, в которых все субнормальные подгруппы $\mathcal{H}$-перестановочны. Получено описание разрешимых групп, в которой каждый член полного холлового σ-множества $\mathcal{H}$ является PST-группой и каждая субнормальная подгруппа группы является $\mathcal{H}$-перестановочной (теорема 3.1.9 [1]). В качестве следствия теоремы 3.1.9 получено описание разрешимых групп, которые являются PST-группами, при условии, что каждый член полного множества силовских подгрупп перестановочен со всеми субнормальными подгруппами. Получен новый критерий гиперцикличности нормальной подгруппы группы (теорема 3.2.8 [1]). Следствиями теоремы

[34]Ballester-Bolinches, A. On a problem posed by S. Li and J. Liu / A. Ballester-Bolinches, S. H. Qiao // Arch. Math. — 2014. — Vol. 102. — P. 109–111.

[35]Li, S. On Hall normally embedded subgroups of finite groups / S. Li, J. He, G. Nong, L. Zhou // Comm. Algebra. — 2009. — Vol. 37. — P. 3360–3367.

[36]Li, S. On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / S. Li, J. Liu // J. Algebra. — 2013. — Vol. 388. — P. 1–9.

[37]Li, S. $CLT-$groups with Hall S-quasinormally embedded subgroups / S. Li, J. Lio // Ukrain. Math. Journal. — 2014. — Vol. 66 — P. 1281–1287.

[44]Agrawal, R. K. Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups / R. K. Agrawal //Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 47, № 1. — P. 77–83.

3.2.8 являются известные результаты В. Го и А. Н. Скибы[14], М. Асаада и А. А. Хелиэля[39], Б. Хупперта[45].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории составных конечных групп, проводимых в Гомельском, Брестском, Витебском, Полоцком и Белорусском государственных университетах.

Исследования, проведенные в диссертации, позволили получить новые характеризации групп с заданными системами холловых подгрупп, а также получить описание обобщенных CLT-групп. Отметим также, что полученные в диссертации результаты позволили обобщить и развить некоторые результаты таких известных отечественных и зарубежных математиков, как Р. К. Агравал, М. Асаад, А. Баллестер-Болинше, В. Го, С. Х. Киао, Ш. Ли, Д. Лиу, Г. Нонг, А. Н. Скиба, А. А. Хелиэль, Д. Хи, Б. Хупперт, Л. Чжоу. Этот факт, а также то, что основные результаты диссертации опубликованы в англоязычных журналах [1–4], свидетельствует о возможности их использования не только в научных центрах Беларуси, но и за ее пределами.

О практической значимости результатов диссертации свидетельствует их использование в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ и диссертаций (акты внедрения от 14.06.2017). Результаты исследований также могут найти применение в криптографии.

[14]Guo, W. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. — 2015. — Vol. 18. — P. 191–200.

[39]Asaad, M. On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, A. A. Heliel // Arch. Math. — 2003. — Vol. 80, № 2. — P. 113–118.

[45]Huppert, B. Zur Sylowstruktur Auflosbarer Gruppen, II / B. Huppert // Arch. Math. — 1964. — Vol. 15. — P. 251–257.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи

1 Guo, W. Finite Groups with $\mathcal{H}$-permutable subgroups / W. Guo, C. Cao, A. N. Skiba, D. A. Sinitsa // Communications in Mathematics and Statistics. — 2017. — Vol. 5, № 1. — P. 83–92.

2 Sinitsa, D. A. Finite group with H_σ-permutably embedded subgroups in G / D. A. Sinitsa // Advances in Group Theory and Applications. — 2017. — Vol. 4. — P. 29–40.

3 Sinitsa, D. A. A note on Hall S-permutably embedded subgroups of finite groups / D. A. Sinitsa // Algebra and Discrete Mathematics. — 2017. — Vol. 23, № 2. — P. 305–311.

4 Go, W. On H_σ-permutably embedded subgroups of finite groups / W. Guo, C. Zhang, A. N. Skiba, D. A. Sinitsa // Rendiconti del Seminario Matematico della Universitá di Padova. — 2017. — DOI.: 10.4171/RSMUP.

5 Синица, Д. А. Об одном обобщении конечных σ-нильпотентных групп / Д. А. Синица, В. Н. Рыжик // Проблемы физики, математики и техники. — 2016. — № 3(28). — С. 53–57.

6 Синица, Д. А. Конечные группы с H_σ-субнормально вложенными подгруппами / Д. А. Синица, А. Н. Скиба, В. Го, Ч. Чжан // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — № 4(33). — С. 84–87.

Препринты

7 Go, W. On H_σ-permutably embedded and H_σ-subnormaly embedded subgroups of finite groups [Electronic resource] / W. Guo, C. Zhang, A. N. Skiba, D. A. Sinitsa // arXiv, Cornell University Library. — 18 Jan 2017. — Mode of access: https://arxiv.org/abs/1701.05134.

Материалы конференций

8 Синица, Д. А. О конечных σ-разрешимых группах / Д. А. Синица // Дни студенческой науки : материалы XLIV студенческой научно-практической конференции, Гомель, 28-29 апреля 2015 г.: в 2 ч. / ред.коллегия: О. М. Демиденко [и др.] . — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. — Ч. 1. — С. 86.

9 Синица, Д. А. О холловых S-перестановочно вложенных подгруппах / Д. А. Синица // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XIX Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 21-23 марта 2016 г.: в 2 ч. / редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. — Ч. 1. — С. 58–59.

10 Синица, Д. А. О H_σ-субнормально вложенных подгруппах конечных групп / Д. А. Синица // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г. : в 5 ч. / ред.: С. Г. Красовский. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2016. — Ч. 5. — С. 47–48.

11 Синица, Д. А. Конечные группы с H_σ-перестановочно вложенными подгруппами / Д. А. Синица, А. Н. Скиба // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XX Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 20-22 марта 2017 г.: в 2 ч. / редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. — Ч. 1. — С. 54–55.

12 Синица, Д. А. Finite Groups with $\mathcal{H}$-permutable subgroups / Д. А. Синица // Актуальные проблемы прикладной математики и физики : материалы Междунар. науч. конф., Нальчик–Терскол, 17–21 мая 2017 г. — Нальчик, 2017. — С. 259–260.

Тезисы докладов

13 Sinitsa, D. A. On Hall S-permutably embedded subgroups of finite groups / D. A. Sinitsa // Алгебра и логика: теория и приложения: тезисы Международной конференции, посвященной 70-летию В. М. Левчука, Красноярск, 24-27 июля 2016 г. — Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2016. — С. 114–115.

14 Sinitsa, D. A. On H_σ-normally embedded subgroups of finite groups / D. A. Sinitsa // XI школа-конференция по теории групп: тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию А. Ю. Ольшанского, Красноярск, 27 июля — 2 августа 2016 г. — Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2016. — С. 81–82.

РЭЗЮМЭ

Сініца Дар'я Алzксандраўна

Канечныя групы з зададзенымі сістэмамі холавых падгруп

Ключавыя словы: канечная група, σ-нільпатэнтная група, σ-вырашальная група, PST-група, абагульненая CLT-група, σ-субнармальная падгрупа, σ-перастановачная падгрупа, H_σ-перастановачна укладзеная падгрупа, $\mathcal{H}$-перастановачная падгрупа.

Мэта працы: апісанне груп з зададзенымі сістэмамі холавых падгрупп.

Метады даследавання: метады абстрактнай тэорыі груп і метады тэорыі лікаў, метады класаў груп, у прыватнасці, метады тэорыі фармацый.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Даследаваны агульны будынак канечных П-нільпатэнтных груп. Атрымана поўнае апісанне канечных груп з H_σ-субнармальна укладзенымі падгрупамі і поўнае апісанне канчатковых груп з H_σ-перастановачна укладзенымі падгрупамі. Распрацаваны новы падыход да даследавання PST-груп. Атрыманы новы крытэрый гіперцыклічнасці нармальнай падгрупы групы.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі носяць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў сучаснай тэорыі канечных груп. Матэрыялы дысертацыі будуць таксама карысныя пры чытанні спецкурсаў па тэорыі груп для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцяў, пры падрыхтоўцы курсавых і дыпломных прац, магістарскіх і кандыдацкіх дысертацый.

Вобласць прымянення: сучасная тэорыя груп і тэорыя фармацый.

РЕЗЮМЕ

Синица Дарья Александровна

Конечные группы с заданными системами холловых подгрупп

Ключевые слова: конечная группа, σ-нильпотентная группа, σ-разрешимая группа, PST-группа, обобщенная CLT-группа, σ-субнормальная подгруппа, σ-перестановочная подгруппа, H_σ-перестановочно вложенная подгруппа, $\mathcal{H}$-перестановочная подгруппа.

Цель работы: описание групп с заданными системами холловых подгрупп.

Методы исследования: методы абстрактной теории групп и методы теории чисел, методы классов групп, в частности, методы теории формаций.

Полученные результаты и их новизна. Исследовано общее строение конечных П-нильпотентных групп. Получено полное описание конечных групп с H_σ-субнормально вложенными подгруппами и полное описание конечных групп с H_σ-перестановочно вложенными подгруппами. Разработан новый подход к исследованию PST-групп. Получен новый критерий гиперцикличности нормальной подгруппы группы.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в современной теории конечных групп. Материалы диссертации будут также полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, при подготовке курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

Область применения: современная теория групп и теория формаций.

SUMMARY

Sinitsa Darya Aleksandrovna

Finite groups with given systems of Hall subgroups

Keywords: finite group, σ-nilpotent group, σ-soluble group, PST-group, generalized CLT-group, σ-subnormal subgroup, σ-permutable subgroup, H_σ-subnormaly embedded subgroup, H_σ-permutably embedded subgroup, $\mathcal{H}$-permutable subgroup.

Research aim: the description of groups with given systems of Hall subgroups.

Research methods: methods of the abstract group theory and methods of the number theory, methods of the class theory, in particular, methods of the formation theory.

Obtained results and their novelty. The general structure of finite Π-nilpotent groups is established. The structure of finite groups with H_σ-subnormally embedded subgroups and the structure of finite groups with H_σ-permutably embedded subgroups are described. A new approach to the investigation of PST-groups is developed. New criterion of hypercyclicity of a normal subgroup of a finite group is obtained.

Recommendations for use. The obtained results are theoretical and they can be used in the modern theory of finite groups. The dissertation materials are also useful in reading special courses on the group theory for students of mathematical specialities, preparing of terms and diploma papers, master of philosophy and doctor of philosophy dissertations.

Application field: the modern group theory and the formation theory.

Научное издание

Синица Дарья Александровна

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 03.03.2018. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,4.
Уч.-изд. л. 1,53. Тираж 60 экз. Заказ 154.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель