БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.983.23: 517.983.5

АТВИНОВСКИЙ
Александр Алексеевич

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИЙ МАРКОВА И СВЯЗАННЫХ С НИМИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.01— вещественный, комплексный и
функциональный анализ

Гомель, 2015

Работа выполнена в учреждении образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”.

Научный руководитель:	**Миротин Адольф Рувимович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа УО “Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины”.
Официальные оппоненты:	**Еровенко Валерий Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей математики и информатики Белорусского государственного университета;
	Василец Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа УО “Белорусский государственный педагогический университет имени М. Танка”.
Оппонирующая организация —	УО “Гродненский государственный университет имени Я. Купалы”.

Защита состоится 25 сентября 2015 года в 12:00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407, тел. ученого секретаря: (017) 209 57 09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан _________ 2015 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
доктор физико-математических наук,
профессор Н. В. Лазакович

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность функциональных исчислений для теории операторов обусловлена тем, что они позволяют использовать при исследовании операторов методы теории функций, облегчают и упрощают вычисления, связанные с операторами, используются при их классификации, дают возможность строить операторы с заданными свойствами. Кроме того, они являются действенным инструментом теории дифференциально-операторных уравнений и весьма важны для некоторых разделов теоретической физики.

Построением и развитием различных функциональных исчислений занимались Р. Аренс, С. Берг, С. Бохнер, Л. Вальбрук, И. М. Гельфанд, М. В. Горбачук, Дж. Данфорд, Е. Дынькин, В. А. Еровенко, А. Кальдерон, Т. Като, С. Г. Крейн, О. В. Лопушанский, А. Лаппо-Данилевский, Макинтош, В. П. Маслов, Я. Микусинский, А. Р. Миротин, Мурье, Дж. фон Нейман, В. В. Пеллер, Е. И. Пустыльник, Я. В. Радыно, Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Дж. Тейлор, Ч. Фояш, Р. Фейнман, Р. Филлипс, Э. Хилле, Ф. Хирш, М. Хаас, Р. Шиллинг, Г. Е. Шилов и многие другие.

В настоящее время имеется ряд функциональных исчислений для классов операторов в гильбертовых и банаховых пространствах, использующих различные пространства функций (символов), определенных на спектре этих операторов. Одними из важнейших являются функциональные исчисления фон Неймана-Мурье-Данфорда самосопряженных и унитарных операторов в гильбертовых пространствах, а также голоморфные функциональные исчисления Рисса-Данфорда и Данфорда-Тейлора в банаховых пространствах. Последнее исчисление строится для замкнутых операторов на основе класса функций, голоморфных в окрестности спектра оператора и в бесконечности. Однако в ряде случаев возникает необходимость рассмотрения таких функций от неограниченных операторов в банаховых пространствах, которые не голоморфны в окрестности спектра оператора либо в бесконечности. Среди исчислений подобного типа важное место занимает функциональное исчисление Ф. Хирша, использующее операторно-монотонные функции. В дальнейшем оно развивалось также Е. И. Пустыльником, С. Бергом, Бояджиевым, де Лаубенфелсом, М. В. Горбачуком, А. В. Князюком, А. Р. Миротиным и другими. Указанное исчисление нашло важные применения к теории потенциала (Ф. Хирш) и теории дифференциально-операторных уравнений (М. В. Горбачук, В. И. Горбачук, А. В. Князюк). Исчисление Хирша применимо лишь к операторам, спектр которых не пересекает данный луч. Однако нередко встречается ситуация, когда спектр не пересекает лишь промежуток конечной длины (например, спектры дифференциальных операторов часто имеют лакуны). В этом случае исчисление Хирша неприменимо, и возникает актуальная проблема построения соответствующих этой ситуации новых функциональных исчислений. Исчисление подобного типа строится в данной работе, что позволяет рассматривать новые классы операторов.

В результате выполненного исследования в диссертации введены новые классы функций (классы $Q[a, b]$ и $T[a, b]$), изучены их свойства, и на основе класса $Q[a, b]$ определено и развито новое функциональное исчисление ($Q[a, b] - Q_b$-исчисление) замкнутых операторов, резольвентное множество которых содержит конечный промежуток (a, b), включающее теоремы обращения, об отображении спектра, непрерывности, устойчивости и единственности, решены вопросы согласования построенного исчисления с известными, доказаны теоремы о сложной функции, правила умножения и ряд других. Даны приложения полученных результатов к решению операторных уравнений, которые ранее не исследовались.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Работа проводилась на кафедре математического анализа Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины в рамках следующих научно-исследовательских работ:

—"Исследование классов операторов, ассоциированных с полугруппами"(2011 - 2015 годы, номер госрегистрации 20111164). Тема диссертационной работы соответствует приоритетному направлению научных исследований Республики Беларусь на 2011-2015 годы "Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук";

— в 2014 году соискателем был получен грант Министерства образования Республики Беларусь для аспирантов на выполнение научно-исследовательской работы по теме "Функциональное Q_b-исчисление от замкнутых операторов на основе классов функций М.Г. Крейна"(шифр УДК 517.984, номер госрегистрации в БелИСА – 20140739);

— соискатель являлся обладателем стипендии Президента Республики Беларусь в 2014 году.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является построение функционального исчисления замкнутых операторов в банаховом пространстве, резольвентное множество которых содержит данный промежуток, использующего в качестве символов классы функций Маркова и связанные с ними классы функций.

Для достижения этой цели были решены следующие задачи:

1) ввести конусы функций $Q[a,b]$ и $T[a,b]$, естественным образом связанные с классом $R[a,b]$ функций Маркова и классом $S[a,b]$, введенными М. Г. Крейном; доказать теоремы об интегральном представлении функций рассмотренных классов и описать их свойства, дающие возможность использовать их в качестве символов функциональных исчислений;

2) построить функциональное исчисление ($Q[a,b]$-исчисление) замкнутых операторов в банаховом пространстве, спектры которых не пересекаются с данным отрезком $[a,b]$, использующее класс символов $Q[a,b]$; доказать такие свойства этого исчисления, как теоремы обращения, теорема об отображении спектров, правило умножения, свойства непрерывности, единственности, устойчивости;

3) получить распространение $Q[a,b]$-исчисления на широкий класс операторов, включающий операторы с лакуной в спектре, содержащий все слабо негативные (Q_b-исчисление). Для построенного исчисления установить теоремы обращения, теорему об отображении спектров, свойства непрерывности, единственности, устойчивости, правило умножения, выяснить взаимоотношение этого исчисления с известным функциональным исчислением Ф. Хирша. Рассмотреть приложения построенной теории к проблеме обратимости операторов и решению операторных уравнений.

Объектом исследования являются замкнутые операторы в банаховом пространстве, спектр которых не пересекается с данным промежутком.

Предметом исследования являются функциональные исчисления замкнутых операторов в банаховом пространстве, спектр которых не пересекается с данным промежутком, использующие в качестве символов классы функций Маркова и связанные с ними классы функций.

Научная новизна

Введённые в диссертации классы функций $Q[a,b]$ и $T[a,b]$ являются новыми. Впервые на их основе были построены функциональное исчисление замкнутых неограниченных операторов в банаховых пространствах, спектр которых не пересекается с отрезком $[a,b]$ ($Q[a,b]$-исчисление), и исчисление замкнутых неограниченных операторов, спектр которых не пересекается с промежутком $[a,b)$ (Q_b-исчисление).

Положения, выносимые на защиту

1. Введение новых классов функций $Q[a,b]$ и $T[a,b]$, связанных с классом $R[a,b]$ функций Маркова и классом $S[a,b]$ М. Г. Крейна, доказательство теорем об интегральном представлении функций введенных классов и описание их свойства, дающих возможность использовать их в качестве символов функциональных исчислений. Ранее классы $Q[a,b]$ и $T[a,b]$ не рассматривались.

2. Построение функционального исчисления ($Q[a,b]$-исчисления) замкнутых операторов в банаховом пространстве, спектр которых не пересекается с отрезком $[a,b]$, использующее класс символов $Q[a,b]$; доказательство теорем обращения, об отображении спектров, правила умножения, свойств непрерывности, единственности, устойчивости для этого исчисления. Ранее подобное исчисление не рассматривалось.

3. Распространение $Q[a,b]$-исчисления на широкий класс операторов, спектр которых не пересекается с данным промежутком, содержащий все слабо негативные (Q_b-исчисление); доказательство для построенного исчисления теорем обращения, об отображении спектров, свойства непрерывности, единственности, устойчивости, правила умножения. Ранее в этом направлении было известно исчисление Ф. Хирша, оперирующее более узким классом операторов (но более широким классом символов), чем Q_b-исчисление.

Личный вклад соискателя учёной степени

Основные результаты, приведенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Роль научного руководителя А. Р. Миротина состояла в выборе направления исследований, постановке рассмотренных в диссертации задач, анализе полученных результатов. В совместных работах основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а их реализация — соискателю. Остальные работы соискателя опубликованы без соавторов.

Апробация диссертации и информация об использовании её результатов

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Республиканская научная конференция студентов и аспирантов Республики Беларусь НИРС-2011, 18 октября 2011 г., Минск;

- XV Республиканская научная конференция студентов и аспирантов Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях (март 2012 г., ГГУ им. Ф. Скорины);

- XI Белорусская математическая конференция (ноябрь 2012 г., БГУ) [13];

- XVI Республиканская научная конференция студентов и аспирантов Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях (март 2013 г., Г Г У им. Ф. Скорины);

- Республиканская научно-методическая конференция молодых учёных (май 2013 г., БрГУ им. А. С. Пушкина);

- Крымская международная математическая конференция (сентябрь 2013 г., г. Судак);

- XVII Республиканская научная конференция студентов и аспирантов Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях (март 2014 г., Г Г У им. Ф. Скорины);

- Четвёртая международная научная конференция: "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-IV"(27 апреля— 1 мая 2014 года Южный федеральный университет при участии НОУ "Учебный центр "Знание Ростов-на-Дону).

Результаты диссертации вошли в состав трёх заключительных отчетов по НИР. Они также докладывались на научных семинарах в Белорусском государственном университете, Гродненском государственном университете им. Я. Купалы и Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины.

Опубликование результатов диссертации

Результаты диссертации опубликованы в 15 научных работах. Из них 6 статей в научных журналах в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объёмом 2,91 авторских листа), 5 статей в сборниках научных трудов и материалов конференций, 4 тезисов докладов (общим объёмом 0,68 авторских листа).

Структура и объём диссертации

Диссертационная работа состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка. Полный объем работы составляет 107 страниц, в том числе 5 рисунков на 3 страницах. Библиографический список состоит из 71 наименования, включая 15 публикаций соискателя.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Глава 1 диссертационной работы является реферативной. В ней приведен аналитический обзор литературы по теме исследования, дана постановка задачи и описана общая концепция работы. В подразделе "Предварительные сведения"приведены основные понятия и утверждения из ряда математических областей, используемых в диссертационном исследовании.

Определение 1. *Говорят, что функция g относится к классу $R[a,b]$ ($a < b$), если она голоморфна в верхней полуплоскости,* $\mathrm{Im}(g(z)) \geq 0$ *при* $\mathrm{Im}(z) > 0$, *голоморфна и положительна на* $(-\infty, a)$ *и голоморфна и отрицательна на* (b, ∞).

Функции класса $R[a,b]$ называются *функциями Маркова.* Они имеют в точности вид:

$$g(z) = \int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z}, \tag{1}$$

где τ — единственная ограниченная положительная регулярная борелевская мера на $\mathbb{R}$, сосредоточенная на $[a,b]$ ("представляющая мера") [1].

Определение 2. *Пусть $a < b$. Говорят, что функция $s(z)$ принадлежит классу $S[a,b]$, если она голоморфна в верхней полуплоскости,* $\mathrm{Im}(s(z)) \geq 0$ *при* $\mathrm{Im}(z) > 0$, *и голоморфна и положительна на интервалах* $(-\infty, a)$ *и* (b, ∞).

Функции класса $S[a,b]$ допускают следующее интегральное представление:[1]

$$s(z) = (b-z)\int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z} = (b-z)g(z), \tag{2}$$

где τ—ограниченная положительная мера, $g(z) \in R[a,b]$, а $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$.

В **главе 2** введены и изучены классы символов $Q[a,b]$, $\widetilde{Q}[a,b]$ и $T[a,b]$, связанные с классом функций Маркова. Построены основанные на этих классах функциональные исчисления от замкнутых операторов в банаховом пространстве, спектр которых не пересекает отрезок $[a,b]$. В частности, в разделе 2.1 вводится класс символов $Q[a,b]$.

Определение 3. [1] *Пусть $a < b$. Положим*

$$Q[a,b] = \{\varphi | \varphi(z) = 1/g(z),\ g \in R[a,b]\}.$$

Интегральное представление функций класса $Q[a,b]$ даёт следующая

[1]Крейн, М. Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи/ М. Г. , Крейн, А. А. Нудельман — М.: Наука, 1973. — 551 с.

Теорема 1. [7] *Для того чтобы функция φ принадлежала классу $Q[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде*

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z - h(z), \tag{3}$$

где $h \in R[a,b] \cup \{0\}$, интегралы, представляющие, $h(a)$ и $h(b)$ по формуле (1), сходятся, а числа α и β удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \alpha + \beta a - h(a) & \geq & 0 \\ \alpha + \beta b - h(b) & \leq & 0 \\ \beta & < & 0. \end{cases}$$

Кроме того, такое представление единственно.

Данная теорема служит основой для определения $Q[a,b]$-исчисления.

В следующем разделе определяется вспомогательное $R[a,b]$-исчисление. Далее $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ — спектр и резольвентное множество оператора A в комплексном банаховом пространстве X соответственно.

Определение 4. *Обозначим через $V_{[a,b]}(X)$ класс замкнутых плотно определённых операторов A в пространстве X, для которых $[a,b] \subset \rho(A)$.*

Всюду ниже в определениях и результатах главы 2 $A \in V_{[a,b]}(X)$.

Определение 5. *Для функции $g \in R[a,b]$ с интегральным представлением (1) положим*

$$g(A) = \int\limits_a^b R(t,A)d\tau(t), \tag{4}$$

где $R(t,A) = (tI - A)^{-1}$ — резольвента оператора A.

Возникающее исчисление названо $R[a,b]$-*исчислением.* Показано, что оно является частью голоморфного функционального исчисления.

В разделе 2.3 определяется $Q[a,b]$-*исчисление.*

Определение 6. *Для функции $\varphi \in Q[a,b]$ вида (3) положим*

$$\varphi(A) := \alpha I + \beta A - h(A) \tag{5}$$

$(D(\varphi(A)) = D(A))$, где $h(A)$ понимается в смысле определения 5.

Доказана теорема обращения для $R[a,b]$-исчисления.

Теорема 2. [7] *Для любой функции $g \in R[a,b]$ оператор $g(A)$ имеет левый обратный, задаваемый формулой*

$$g(A)^{-1} = \varphi(A), \tag{6}$$

где $\varphi = 1/g$, и правая часть понимается в смысле $Q[a,b]$-исчисления.

Справедливая следующая теорема обращения в $Q[a,b]$-исчислении.

Следствие 1. [7] *Пусть* $\varphi \in Q[a,b]$, $g(z) = 1/\varphi(z)$. *Тогда оператор* $\varphi(A)$ *ограниченно обратим, и его обратный можно вычислить по формуле*

$$\varphi(A)^{-1} = g(A),$$

где правая часть понимается в смысле $R[a,b]$*-исчисления.*

В разделе 2.4 выяснена связь $Q[a,b]$-исчисления с функциональным исчислением Хирша. [2]

В пятом разделе $Q[a,b]$-исчисление расширено следующим образом.

Определение 7. *Обозначим через* $\widetilde{Q}[a,b]$ *линейную оболочку конуса* $Q[a,b]$. *Таким образом, пространство* $\widetilde{Q}[a,b]$ *состоит из функций, определенных на* $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ *и представимых в виде*

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z + \gamma h(z), \tag{7}$$

где $h \in R[a,b]$, *а* α, β, γ *— произвольные комплексные числа.*

Определение 8. *Для функции* $\varphi \in \widetilde{Q}[a,b]$ *вида (7) положим*

$$\varphi(A) := \alpha I + \beta A + \gamma h(A)$$

$(D(\varphi(A)) = D(A))$, *где* $h(A)$ *понимается в смысле определения 5.*

Данное функциональное исчисление названо $\widetilde{Q}[a,b]$-*исчислением.* Свойство устойчивости этого исчисления выражает

Теорема 3. [3] *Пусть последовательность* $A_n \in V_{[a,b]}(X)$ *такова, что* $D(A_n) \supset D(A_0)$ $(n = 0, 1, \dots)$. *Рассмотрим функцию* $\varphi \in \widetilde{Q}[a,b]$ *вида (7), где* h *имеет представляющую меру* τ. *Если* $A_n x \to A_0 x$ $(n \to \infty)$ *при* $x \in D(A_0)$, *и существует такая* $f \in L^1([a,b],\tau)$, *что* $\|R(t,A_n)\| \le f(t)$ *при всех* $t \in [a,b], n = 0,1,2,\dots$, *то* $\varphi(A_n)x \to \varphi(A_0)$ $(n \to \infty)$ *при* $x \in D(A_0)$.

Свойства непрерывности и единственности $\widetilde{Q}[a,b]$-исчисления выражает

Теорема 4. [3] *Имеется единственное отображение* Ψ_A *из* $\widetilde{Q}[a,b]$ *в множество замкнутых операторов в* X, *определенных на* $D(A)$, *обладающее следующими свойствами:*

1. Ψ_A *линейно;*

2. Ψ_A *непрерывно в следующем смысле: если* $\varphi_n \to \varphi$ *равномерно на компактных подмножествах* $\mathbb{C} \setminus [a,b]$, *то* $\Psi_A(\varphi_n)x \to \Psi_A(\varphi)x$ $(x \in D(A);\ n \to \infty)$;

[2] Martinez, C. C. The theory of fractional powers of operators / C. C. Martinez, A. M. Sanz // – Elsiver, Amsterdam-London-New York — 2001 – 365 p.

3. $\Psi_A(1) = I$;

4. $\Psi_A(z) = A$;

5. $\Psi_A((\lambda - z)^{-1}) = R(\lambda, A)$, *где* $\lambda \in [a, b]$.

Это отображение имеет вид $\Psi_A(\varphi) = \varphi(A)$.

Доказана теорема об отображении спектра в $Q[a, b]$-исчислении.

Теорема 5. [3] *Пусть* $\varphi \in Q[a, b]$. *Тогда*

$$\sigma(\varphi(A)) = \varphi(\sigma(A)).$$

Класс $Q[a, b]$ не замкнут относительно произведений. Тем не менее, можно дать следующее

Определение 9. *Для функций* $\varphi_1, \varphi_2 \in Q[a, b]$ *положим*

$$(\varphi_1\varphi_2)(A) = (g_1 g_2)(A)^{-1},$$

где $g_1 = 1/\varphi_1, g_2 = 1/\varphi_2$, $g_1, g_2 \in R[a, b]$.

Теорема 6. [3] *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in Q[a, b]$. *Тогда*

$$(\varphi_1\varphi_2)(A) = \varphi_1(A)\varphi_2(A).$$

Теорема о сложной функции в $Q[a, b]$-исчислении имеет следующий вид.

Теорема 7. [3] *Если функция* f *голоморфна в* $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ *и в бесконечности, отображает верхнюю полуплоскость и каждое из множеств* $(-\infty, a)$, (b, ∞) *в себя, то* $\varphi \circ f \in Q[a, b]$ *при* $\varphi \in Q[a, b]$, *причем*

$$(\varphi \circ f)(A) = \varphi(f(A)),$$

где $f(A)$ *понимается в смысле голоморфного функционального исчисления.*

В разделах 2.7 и 2.8 вводятся и изучаются вспомогательные функциональные исчисления с символами классов $S[a, b]$ и $T[a, b]$.

Определение 10. *Для функции* $s(z) \in S[a, b]$ *вида (2) положим*

$$s(A)x := (bI - A)g(A)x \ (x \in X),$$

где оператор $g(A)$ *понимается в смысле определения 5.*

Показано, что $S[a, b]$-исчисление является частью голоморфного.

Определение 11. *Определим класс* $T[a, b]$, $a < b$ *следующим образом:*

$$T[a, b] = \left\{ \psi(z) | \psi(z) = \frac{1}{s(z)}, s(z) \in S[a, b] \right\}.$$

Функции данного класса можно представить в следующем виде:

$$\psi(z) = \frac{1}{b-z}\varphi(z),\ \varphi(z) \in Q[a,b]. \tag{8}$$

Определение 12. *Для функции $\psi(z) \in T[a,b]$ вида (8) положим*

$$\psi(A)x = \varphi(A)R(b,A)x\ (x \in X),$$

где $\varphi(A)$ понимается в смысле определения 6.

Данное функциональное исчисление названо $T[a,b]$-*исчислением.*

Следствием установленных в разделах 2.7 и 2.8 свойств $T[a,b]$- и $S[a,b]$-исчислений и их связи с $Q[a,b]$-исчислением является вторая теорема об обратном операторе в $Q[a,b]$-исчислении, содержащая в себе также свойство симметрии класса $Q[a,b]$.

Теорема 8. [3] *Функция $\varphi(z)$, определенная на $\mathbb{C}\setminus[a,b]$, принадлежит $Q[a,b]$ тогда и только тогда, когда существует такая функция $\varphi^*(z) \in Q[a,b]$, что $\varphi(z)\varphi^*(z) = (a-z)(b-z)$. При этом*

$$\varphi(A)^{-1} = \varphi^*(A)R(a,A)R(b,A).$$

Следствие 2. [3] *Функция $g(z)$ принадлежит $R[a,b]$ тогда и только тогда, когда существует такая функция $g^*(z) \in R[a,b]$, что $g(z)g^*(z) = (a-z)^{-1}(b-z)^{-1}$. При этом для всех $x \in D(A^2)$ справедливо равенство*

$$g(A)^{-1}x = g^*(A)(aI-A)(bI-A)x.$$

В качестве приложений в конце второй главы доказаны теоремы, позволяющие разрешать некоторые классы операторных уравнений, и рассмотрены примеры применения этих теорем. Приведём две такие теоремы.

Из тождества

$$R(\lambda_1,A) + R(\lambda_2,A) = 2R(\lambda_1,A)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}I - A\right)R(\lambda_2,A)$$

следует, что сумма значений резольвенты оператора A может не иметь левого обратного, но если $A \in V_{[a,b]}(X)$, $\lambda_1,\lambda_2 \in [a,b]$, то левый обратный существует. Следующая теорема является обобщением этого замечания.

Теорема 9. [5] *Пусть $c_j > 0, \lambda_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1,\ldots,n)$, $n > 1$, $a = \min_j \lambda_j, b = \max_j \lambda_j$ и $A \in V_{[a,b]}(X)$. Если*

$$S = \sum_{j=1}^{n} c_j R(\lambda_j, A),$$

то левый обратный к оператору S существует и имеет вид

$$S^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j}{(\sum_{j=1}^{n} c_j)^2} I - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} c_j} A - \sum_{k=1}^{n-1} a_k R(t_k, A),$$

где t_k — все нули функции $f(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j/(\lambda_j - z)$, $a_k = 1/f'(t_k)$.

В силу теоремы 2 уравнение $g(A)x = y$ имеет для любого $y \in D(A)$ единственное решение $x = \varphi(A)y$, где $\varphi = 1/g \in Q[a, b]$, а для $y \notin D(A)$ оно неразрешимо.

В следующей теореме рассматривается уравнение $\ln((dI - A)R(c, A))x = y$.

Теорема 10. [7] *Пусть $0 \le a \le c < d \le b$. Уравнение*

$$\int_{c}^{d} R(t, A) x dt = y$$

для любого $y \in D(A)$ имеет единственное решение

$$x = \frac{d + c}{2(d - c)} y - \frac{1}{d - c} A y - \int_{c}^{d} \frac{R(\lambda, A) y}{\ln^2 \frac{d - \lambda}{\lambda - c} + \pi^2} d\lambda.$$

В **главе 3** расширен класс операторов, к которым применимы $R[a, b]$- и $Q[a, b]$-исчисления, за счет некоторого сужения классов символов. А именно, рассмотрен случай, когда один из концов отрезка $[a, b]$ принадлежит спектру оператора, в то время как символ непрерывен в этой точке. В отличие от ситуации главы 2, построенное в главе 3 R_b-исчисление не является частью голоморфного, так как символ класса R_b не обязан быть голоморфным в окрестности спектра оператора A.

Определение 13. *Скажем, что замкнутый плотно определенный оператор A в пространстве X принадлежит классу $V_b(X)$, если $[0, b) \subset \rho(A)$, и для некоторого числа $M > 0$ выполняется неравенство*

$$\|R(t, A)\| \le \frac{M}{b - t}, t \in [0, b).$$

Для распространения $R[a, b]$-исчисления на класс $V_b(X)$, класс символов $R[a, b]$ несколько сужается.

Определение 14. *Скажем, что функция g принадлежит классу R_b, $b > 0$, если она принадлежит классу $R[0, b]$ и непрерывна в точке $z = b$.*

Определение 15. *Пусть g есть функция класса R_b с интегральным представлением (1), $A \in V_b(X)$. Определим оператор $g(A)$ формулой (4), в которой положено $a = 0$.*

Возникшее функциональное исчисление названо *R_b-исчислением.* Общий случай промежутка $[a, b)$, где $a \neq 0$, сводится к R_b-исчислению с помощью линейной замены переменных.

С целью введения Q_b-исчисления дается

Определение 16. *Пусть $b > 0$. Положим*

$$Q_b = \{\varphi | \varphi = 1/g, \ g \in R_b\}.$$

Для того чтобы функция φ принадлежала классу Q_b, необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде (3) с $a = 0$, где $h \in R_b \cup \{0\}$.

Определение 17. *Для $A \in V_b(X)$, $\varphi \in Q_b$ оператор $\varphi(A)$, $D(\varphi(A)) := D(A)$ определяется формулой (5), в которой $h(A)$ понимается в смысле определения 15.*

Возникающее функциональное исчисление названо *Q_b-исчислением.*

Как и для R_b-исчисления, случай промежутка $[a, b)$, где $a \neq 0$, сводится к Q_b-исчислению линейной заменой переменных.

Класс R_b не замкнут относительно произведений. В разделе 3.5 R_b-исчисление расширено таким образом, что правило умножения справедливо.

Определение 18. *Обозначим через $\mathcal{R}_b$ мультипликативную полугруппу, порожденную классом R_b, т. е. состоящую из всевозможных функций вида $G = g_1 \dots g_n$, где $g_1, \dots, g_n \in R_b; n \in \mathbb{N}$.*

Определение 19. *Для функции $G = g_1 \dots g_n \in \mathcal{R}_b$ и оператора $A \in V_b(X)$ положим*

$$G(A) := g_1(A) \dots g_n(A).$$

В полученном расширении R_b-исчисления имеют место правило умножения, теорема обращения и теорема об отображении спектров.

Теорема 11. [6] *1) Для любых $G, H \in \mathcal{R}_b$ и $A \in V_b X)$ справедливо равенство*

$$(GH)(A) = G(A)H(A).$$

2) Пусть $G = g_1 \dots g_n \in \mathcal{R}_b$ и $A \in V_b X)$. Тогда оператор $G(A)$ имеет левый обратный

$$G(A)^{-1} = \varphi_1(A) \dots \varphi_n(A),$$

где $\varphi_i = 1/g_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

3) Пусть $G \in \mathcal{R}_b$, $A \in V_b(X)$. Тогда

$$\sigma(G(A)) = G(\sigma^e(A)),$$

где $\sigma^e(A)$ — расширенный спектр оператора A.

Получена также следующая теорема обращения.

Теорема 12. [6], [14] *Для функции $g \in R_b$ и оператора $A \in V_b(X)$ справедливо равенство*

$$g(A)^{-1}x = g^*(A)(A^2 - bA)x, \ x \in D(A^2).$$

В разделе 3.6 установлены свойства непрерывности и единственности в R_b-исчислении. Там же доказано следующее свойство устойчивости.

Теорема 13. [6] *Пусть $0 < b_1 \le b_2 \le \dots, b_n \uparrow b_0$, а последовательность операторов $A_n \in V_{b_n}(X)$ такова, что $D(A_n) \supset D(A_0)$ $(n = 0, 1, \dots)$. Рассмотрим функцию $g \in R_{b_1}$ вида (1), где положено $a = 0, b = b_1$, с представляющей мерой τ. Если $A_n x \to A_0 x$ $(n \to \infty)$ при $x \in D(A_0)$, причем существуют такие $f_n \in L^1(\tau)$, что $\|R(t, A_n)\| \le f_n(t)$ $(n = 0, 1, \dots; t \in [0, b_1))$, и $f_n(t) \to f_0(t)$ при $t \in [0, b_1)$, $\int_0^{b_1} f_n d\tau \to \int_0^{b_1} f_0 d\tau$ $(n \to \infty)$, то $g(A_n) \to g(A_0)$ $(n \to \infty)$ сильно.*

Построенное R_b-исчисление позволило в разделе 3.7 развить исчисление на основе класса Q_b. При этом свойства непрерывности, устойчивости и единственности доказаны для следующего более широкого класса символов.

Определение 20. *Обозначим через $\widetilde{Q}_b$ линейную оболочку конуса Q_b, т. е. множество функций на $\mathbb{C} \setminus [0, b)$, представимых в виде*

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z + \gamma h(z), \tag{9}$$

где $h \in R_b$, а α, β, γ — произвольные комплексные числа.

Определение 21. *Для функции $\varphi \in \widetilde{Q}_b$ вида (9) и оператора $A \in V_b(X)$ положим ($D(\varphi(A)) = D(A)$ при $\beta \ne 0$)*

$$\varphi(A) := \alpha I + \beta A + \gamma h(A),$$

где $h(A)$ понимается в смысле определения 15.

Это функциональное исчисление названо *$\widetilde{Q}_b$-исчислением.* В разделе установлены свойство непрерывности и теорема единственности рассматриваемого исчисления, аналогичные теореме 4.

Имеет место также свойство устойчивости $\widetilde{Q}_b$-исчисления.

Теорема 14. [6] *Пусть последовательность операторов $A_n \in V_b(X)$ такова, что $D(A_n) \supset D(A_0)$ $n = 0, 1, \dots)$. Рассмотрим функцию $\varphi \in \widetilde{Q}_b$*

вида (9), где h имеет представляющую меру τ. Если $A_n x \to A_0 x$ ($n \to \infty$) при $x \in D(A_0)$, причем существует такая $f \in L^1(\tau)$, что $\|R(t, A_n)\| \le f(t)$ ($n = 0, 1, \ldots; t \in [0, b)$), то $\varphi(A_n)x \to \varphi(A_0)x$ ($n \to \infty$) при $x \in D(A_0)$.

В разделе 3.8 Q_b-исчисление расширено таким образом, что становится справедливым правило умножения.

Определение 22. *Обозначим через $\mathfrak{Q}_b$ мультипликативную полугруппу, порожденную классом Q_b, т. е. состоящую из всевозможных функций вида $\Phi = \varphi_1 \ldots \varphi_n$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Q_b; n \in \mathbb{N}$.*

Определение 23. *Для функции $\Phi = \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \mathfrak{Q}_b$ и оператора $A \in V_b(X)$ положим*

$$\Phi(A) := \varphi_1(A) \ldots \varphi_n(A).$$

Основные свойства $\mathfrak{Q}_b$-исчисления выражает следующая

Теорема 15. [6] *1) Пусть $\Phi = \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \mathfrak{Q}_b$, $A \in V_b(X)$. Тогда оператор $\Phi(A)$ ограниченно обратим, и его обратный можно найти по формуле*

$$\Phi(A)^{-1} = g_1(A) \ldots g_n(A),$$

где $g_i = 1/\varphi_i$ ($i = 1, \ldots, n$).

2) Для любых $\Phi, \Psi \in \mathfrak{Q}_b$ и $A \in V_b(X)$ справедливо равенство

$$(\Phi\Psi)(A) = \Phi(A)\Psi(A).$$

3) Пусть $\Phi \in \mathfrak{Q}_b$, $A \in V_b(X)$. Тогда

$$\sigma(\Phi(A)) = \Phi(\sigma(A)).$$

В разделе 3.9 установлена связь введенного в нем S_b-исчисления с Q_b-исчислением.

В разделе 3.10 выяснена связь Q_b-исчисления с исчислением Хирша не только для негативных, как в главе 2, но и для слабо негативных операторов. Для этого там рассмотрена "симметричная относительно точки $b/2$" версия Q_b-исчисления, в которой точки b и 0 меняются ролями. Возникающее Q^0-*исчисление* определяется аналогично своей b-версии.

Определение 24. *Скажем, что замкнутый плотно определенный оператор A в пространстве X принадлежит классу $V^0(X)$, если $(0, b] \subset \rho(A)$ и для некоторого числа $M > 0$ выполняется неравенство*

$$\|R(t, A)\| \le \frac{M}{t}, t \in (0, b].$$

Для распространения $R[0,b]$-и $Q[0,b]$-исчислений на класс операторов $V^0(X)$ введены следующие подконусы конусов $R[0,b]$ и $Q[0,b]$ соответственно.

Определение 25. *Будем говорить, что функция g принадлежит классу R^0 (Q^0), если она принадлежит классу $R[0,b]$ (соответственно $Q[0,b]$) и непрерывна в точке* 0.

Определение оператора $g(A)$ $(\varphi(A))$ для функции $g \in R^0$ (соответственно $\varphi \in Q^0$) и оператора $A \in V^0(X)$ формально то же, что и в R_b (Q_b)-исчислении. Все результаты, установленные для R_b- и Q_b-исчислений, справедливы с очевидными изменениями и для R^0- и Q^0-исчислений.

Теорема 16. [6] *Пусть $\varphi \in Q[0,b]$. Функция $-\varphi$ является отрицательной операторно монотонной тогда и только тогда, когда $\varphi \in Q^0$. При этом условии для любого слабо негативного оператора A в X значения $(-\varphi)(A)x$ в смысле Хирша и $-\varphi(A)x$, где $\varphi(A)x$ понимается в смысле Q^0-исчисления, совпадают при всех $x \in D(A)$.*

Таким образом, Q^0-исчисление оперирует с несколько более узким классом символов, но более широким классом операторов, чем исчисление Хирша.

В разделе 3.10 показано также, как Q^0-исчисление обобщается на случай промежутка $(a,b]$.

Как и в главе 2, в главе 3 даны приложения построенного исчисления к решению операторных уравнений. В частности, в разделе 3.11 доказана

Теорема 17. [4] *Пусть $b > 0$, $A \in V_b(X)$. Уравнение*

$$\int_0^b (b-t)R(t,A)x\,dt = y$$

для любого $y \in D(A)$ имеет единственное решение

$$x = \frac{2}{3b}y - \frac{2}{b^2}Ay - \int_0^b \frac{(b-t)R(t,A)y\,dt}{\left(-b+(b-t)\ln\frac{b-t}{t}\right)^2 + (\pi(b-t))^2}.$$

Приведен пример, показывающий, что в случае обыкновенных дифференциальных операторов уравнение, рассмотренное в теореме 17, превращается в уравнение в свертках на полуоси.

Резюмируя, можно сказать, что построенные исчисления оказались весьма содержательными, обладают хорошими аппаратными свойствами и позволяют решать уравнения с замкнутыми операторами в банаховых пространствах, которые ранее не рассматривались.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Введены новые классы функций $Q[a, b]$ и $T[a, b]$, состоящие из функций вида $1/g$, где g пробегает класс $R[a, b]$ функций Маркова (соответственно класс $S[a, b]$ М.Г. Крейна), найдены интегральные представления функций введенных классов, а также исследованы их свойства, в частности, свойство симметрии классов $Q[a, b]$ и $R[a, b]$, выражающееся в наличии в этих классах инволюции [1, 3, 12].

2. Построено новое функциональное исчисление ($Q[a, b]$-исчисление) замкнутых операторов в банаховом пространстве, спектры которых не пересекаются с отрезком $[a, b]$, использующее класс символов $Q[a, b]$; доказаны теоремы обращения, об отображении спектров, о сложной функции, правила умножения, свойства непрерывности, единственности, устойчивости для этого исчисления. Выяснены связи этого исчисления с исчислением Хирша. В ходе исследования были введены вспомогательные исчисления с классами символов $S[a, b]$ и $T[a, b]$, необходимые для доказательства теоремы обращения в $Q[a, b]$-исчислении. Полученные результаты применены к вопросам обратимости операторов и решению операторных уравнений [2, 3, 7, 8, 11, 13].

3. Построено распространение $Q[a, b]$-исчисления на широкий класс операторов, спектры которых не пересекаются с данным полуоткрытым промежутком, содержащий все слабо негативные (Q_b-исчисление); для этого исчисления доказаны теоремы обращения, об отображении спектров, свойства непрерывности, единственности, устойчивости, правила умножения. Свойства Q_b-исчисления выводятся из свойств другого определенного и исследованного в диссертации исчисления, названного R_b-исчислением. Показано, что Q_b-исчисление оперирует с более широким классом операторов (но несколько более узким классом символов), чем исчисление Хирша. Результаты также применены к вопросам обратимости операторов и решению операторных уравнений [4–6, 9, 10, 14, 15].

Построенные исчисления дополняют и развивают известные и согласованы с ними. Принципиально новым в работе является введение классов символов $Q[a, b]$ и $T[a, b]$ и построение на их основе развернутых функциональных исчислений для введенных в работе новых классов неограниченных операторов в банаховых пространствах.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории функций и теории операторов в банаховых пространствах, для вычисления спектров, нахождения обратных операторов, а также в вопросах разрешимости операторных уравнений. Они могут применяться в учебном процессе при чтении спецкурсов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Атвиновский, А.А. Об интегральном представлении одного класса аналитических функций / А.А. Атвиновский // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. естественные науки. — 2011. — № 4(67). – С. 3–7.

2. Атвиновский, А.А. Применение $Q[a, b]$-исчисления к решению некоторых операторных уравнений / А.А. Атвиновский // Известия Гомельского Государственного университета им. Ф. Скорины. естественные науки. — 2012. — № 6(75). — С. 140–144.

3. Атвиновский, А.А. Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Известия вузов. Математика. — 2013. — № 10. — С. 3–15.

4. Атвиновский, А.А. Обращение одного класса операторов в банаховом пространстве и некоторые его применения / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Проблемы физики, математики и техники. — 2013. — № 3(16). — С. 55–60.

5. Миротин, А.Р. Обращение линейной комбинации значений резольвенты замкнутого оператора / А.Р. Миротин, А.А. Атвиновский // Проблемы физики, математики и техники. — 2014. — № 3(20). — С. 77–79.

6. Атвиновский, А.А. Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. II / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Известия вузов. Математика. — 2015. — № 5. — С. 3–16.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

7. Атвиновский, А.А. Об однозначной разрешимости одного класса операторных уравнений / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Труды 5-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений Минск: в двух томах. Т. 1. Математический анализ. — Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2012. — С. 28–32.

8. Атвиновский, А.А. О решении одного класса операторных уравнений / А.А. Атвиновский // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 26–28 марта 2012 г.: в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2012. — Ч. 1. — С. 168.

9. Атвиновский, А.А. Об обратимости операторов, возникающих в R_b-

исчислении / А.А. Атвиновский // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 25–27 марта 2013 г.: в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2013. — Ч. 1. — С. 53–54.

10. Атвиновский, А.А. Применение Q_b-исчисления к решению уравнений с замкнутыми операторами / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Научно-методическая конференция молодых ученых: сборник материалов XV Республиканской научно-методической конференции молодых учёных, Брест , 17 мая 2013 г.: в 2 ч. / БрГУ им. А.С. Пушкина; под общ. ред. В.В. Здановича. — Брест, 2013. — Ч. 1. — С. 9–10.

11. Атвиновский, А.А. О связи функциональных исчислений с символами класса $S[a, b]$ / А.А. Атвиновский // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 24–26 марта 2014 г.: в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2014. — Ч. 1. — С. 5–6.

Тезисы докладов

12. Атвиновский, А.А. Об интегральном представлении одного класса аналитических функций / А.А. Атвиновский // НИРС — 2011: сборник тезисов докладов Республиканской научной конференции студентов и аспирантов Республики Беларусь, Минск, 18 октября 2011 г. / редкол.: С.В. Абламейко [и др.]. — Минск: Изд. центр БГУ., 2011. — С. 85.

13. Атвиновский, А.А. Об одном функциональном исчислении от замкнутых операторов / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. кон., Минск, 4–9 ноября 2012 г. / Институт математики НАН Беларуси. — Минск, 2012. — Ч. 1. — С. 33–34.

14. Миротин, А.Р. Об обращении одного класса операторов в банаховом пространстве / А.Р. Миротин, А.А. Атвиновский // КМНК-2013: тез. докл. Крымской Международной математической конференции, Судак, Украина, 22 сентября – 4 октября 2013 г./ ТНУ. — Симферопль, 2013.— Т. 1. — С. 36–37.

15. Атвиновский, А.А. О Q_b-исчислении операторов в банаховом пространстве / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — IV: тез. докл. Международной научной конференции, Ростов-на-Дону, 27 апреля – 1 мая 2014 г./ ЮФУ — Ростов-на-Дону, 2014. — С. 8.

РЭЗЮМЭ

Атвіноўскі Аляксандр Аляксеевіч

Функцыянальныя злічэнні на аснове функцый Маркава і звязаных з імі класаў функцый

Ключавыя словы: функцыянальнае злічэнне, замкнутый аператар, банахава прастора, функцыя Маркава, клас Крэйна, злічэнне Хірша, аператарнае ўраўненне.

У дысертацыйнай працы пабудавана разгорнутае функцыянальнае злічэнне ($Q[a, b]$- злічэнне) замкнутых аператараў у банахавай прасторы, спектры якіх не перасякаюцца з адрэзкам $[a, b]$, якое выкарыстоўвае клас сімвалаў $Q[a, b]$, які раней не разглядаўся. Даказаны тэарэмы зваротнасці, аб адлюстраванні спектраў, аб складанай функцыі, правілы множання, уласцівасці бесперапыннасці, адзінасці, устойлівасці для гэтага злічэння. Высветлены сувязі гэтага злічэння са злічэннем Хірша. У працэсе даследавання былі ўведзены дапаможныя злічэнні з класамі сімвалаў $S[a, b]$ і $T[a, b]$, неабходныя для доказу тэарэмы зваротнасці $Q[a, b]$-злічэнні, даказана згоднасць пабудаваных злічэнняў з галаморфным злічэннем. Атрыманыя вынікі прыменены да пытанняў зваротнасці аператараў і рашэння аператарных ураўненняў.

Пабудавана распаўсюджанасцьQ[a,b]-злічэння на шырокі клас аператараў, спектры якіх не перасякаюцца з дадзеным прамежкам, які (клас) утрымлівае усе слаба негатыўныя (Q_b-злічэнне); для гэтага злічэння даказаны тэарэмы зваротнасціаб адлюстраванні спектраў,уласцівасці бесперапыннасці,адзінасці, правілы множання. УласцівасціQb-злічэння выводзяцца з уласцівасцей іншага вызначанага і даследаванага ў дысертацыі злічэння, названага R_b-злічэннем. Паказана, што Q_b-злічэнне прымяніма да больш шырокага класа аператараў (але больш вузкага класа сімвалаў), чым злічэнне Хірша. Вынікі таксама прыменены да пытанняў зваротнасці аператараў і рашэння аператарных ураўненняў.

РЕЗЮМЕ

Атвиновский Александр Алексеевич

Функциональные исчисления на основе функций Маркова и связанных с ними классов функций

Ключевые слова: функциональное исчисление, замкнутый оператор, банахово пространство, функция Маркова, класс Крейна, исчисление Хирша, операторное уравнение.

Целью диссертационной работы является построение функционального исчисления замкнутых операторов в банаховом пространстве, резольвентное множество которых содержит данный промежуток, использующего в качестве символов классы функций Маркова и связанные с ними классы функций.

В работе использованы методы теории функций, теории операторов, а также теории интегральных преобразований.

В диссертационной работе построено развёрнутое функциональное исчисление ($Q[a,b]$-исчисление) замкнутых операторов в банаховом пространстве, спектры которых не пересекаются с отрезком $[a,b]$, использующее класс символов $Q[a,b]$, который ранее не рассматривался. Доказаны теоремы обращения, об отображении спектров, о сложной функции, правила умножения, свойства непрерывности, единственности, устойчивости для этого исчисления. Выяснены связи этого исчисления с исчислением Хирша. В процессе исследования были введены вспомогательные исчисления с классами символов $S[a,b]$ и $T[a,b]$, необходимые для доказательства теоремы обращения в $Q[a,b]$-исчислении, доказана согласованность построенных исчислений с голоморфным исчислением. Полученные результаты применены к вопросам обратимости операторов и решению операторных уравнений.

Построено распространение $Q[a,b]$-исчисления на широкий класс операторов, спектры которых не пересекаются с данным промежутком, содержащий все слабо негативные (Q_b-исчисление); для этого исчисления доказаны теоремы обращения, об отображении спектров, свойства непрерывности, единственности, устойчивости, правила умножения. Свойства Q_b-исчисления выводятся из свойств другого определенного и исследованного в диссертации исчисления, названного R_b-исчислением. Показано, что Q_b-исчисление применимо к более широкому классу операторов (но более узкому классу символов), чем исчисление Хирша. Результаты также применены к вопросам обратимости операторов и решению операторных уравнений.

SUMMARY

Atvinowski Alexandr

Functional calculuses
based on Markov functions and related functional classes

Keywords: functional calculus, closed unbounded operators, Banach space, Markov function, Krane class, Hirsch functional calculus, operator equations, fractional powers of operators.

The aim of the thesis is to build a functional calculus of closed operators in a Banach space, whose resolvent set contain a given interval. Classes of Markov functions and related classes of functions are used as symbols of this functional calculus.

We used the methods of function theory, operator theory and the theory of integral transforms.

In the thesis the functional calculus ($Q[a, b]$ - calculus) of closed operators in a Banach space whose spectra do not overlap with the segment $[a, b]$, using the class $Q[a, b]$ of symbols is built. This functional calculus had not previously considered. Theorems about the inverse operator, the spectral mapping theorem, a composition theorem, multiplication rules, properties of continuity, of uniqueness, and on the stability of this calculus were proved. The connection of this calculus to the calculus of Hirsch was explained. In the study the auxiliary functional classes of symbols $S[a, b]$ and $T[a, b]$ were introduced, which are necessary to prove the theorem about the inverse operator in $Q[a, b]$ - calculus. The consistency was proved of these calculuses with holomorphic calculus. The results are applied to the problems of reversibility of operators and to solution of operator equations.

The generalization of $Q[a, b]$-calculus to a wide class of operators whose spectra do not overlap with the interval containing all weakly negative operators (Q_b calculus) was built. For this calculus theorems about the inverse operator, the spectral mapping theorem, a composition theorem, multiplication rules, properties of continuity, of uniqueness, and the theorem on the stability of this calculus were proved. The properties of Q_b-calculus derived from the properties of some other calculus defined and investigated in the dissertation, called R_b calculus. It is shown that Q_b calculus is applicable to a wider class of operators (but more narrow class of symbols) that the calculus of Hirsch. The results also applied to problems of reversibility of operators and solution of operator equations.

Подписано в печать __.__.2015. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 1,4. Уч.-изд. л. 1,5.
Тираж 70 экз. Заказ №___.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
в республиканском унитарном предприятии
„Издательский центр Белорусского государственного университета” .
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск