МАТЕМАТИКА

УДК 512.548
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_4_57_60
EDN: OYZHSI

СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТОВ В *l*-АРНЫХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. III

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

POWERS IN *l*-ARY GROUPS OF SPECIAL FORM. III

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. В статье продолжается изучение степеней элементов в полиадических группах специального вида.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *n-арная группа*, *степень элемента*.

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* Степени элементов в *l*-арных группах специального вида. III / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 4 (57). – С. 60–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_4_57_60. – EDN: OYZHSI

Abstract. The study on the powers in polyadic groups of special form is carrid on.

Keywords: *polyadic operation*, *n-ary group*, *power*.

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* Powers in *l*-ary groups of special form. III / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 4 (57). – P. 60–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_4_57_60 (in Russian). – EDN: OYZHSI

Введение

Данная статья, посвящённая изучению степеней элементов в полиадических группах специального вида, является продолжением статей [1], [2] и составляет с ними единое целое. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [2]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], [2], все они остаются в силе и в новой статье.

5 Случай циклической подстановки

В формулировке следующей теоремы, в отличие от теоремы 3.2, обратные последовательности явно не присутствуют.

***Теорема* 5.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа* $(n \geq 3)$, σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* d, $l = td + 1$ *для некоторого натурального* t, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \ldots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3}, \tag{5.1}$$

$$j = 1, \ldots, k, \ r = 0, 1, \ldots, d-1,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(d-1)} \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ \ldots \ \alpha_{j1} \overline{a_{\sigma(j)}}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \ldots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k \ldots \overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k}_{-t\nu-1})). \tag{5.2}$$

Доказательство. По теореме 3.2, если $\nu < 0$, то

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{\overline{a_1} \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1} \ldots \overline{a_1} \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1}}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{\overline{a_k} \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1} \ldots \overline{a_k} \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1}}_{-t\nu-1})), \tag{5.3}$$

где последовательности α_j^{-1} определяются равенством (3.7). Заменив в этом равенстве каждую последовательность $\underbrace{a_{\sigma^r(j)} \ldots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3}$ соответствующей левой частью α_{jr} равенства (5.1), видим, что

$$\alpha_j^{-1} = \alpha_{j(d-1)} \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ \ldots \ \alpha_{j1} \overline{a_{\sigma(j)}},$$

то есть

$$\alpha_j^{-1} = \beta_j. \tag{5.4}$$

Если в (5.1) $r = 0$, то, считая подстановку σ^0 тождественной, имеем

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}, \ j = 1, \ldots, k. \tag{5.5}$$

Подставляя (5.4) и (5.5) в (5.3), получим (5.2). □

Если порядок подстановки σ делит $n - 1$, то теорема 5.1 позволяет сформулировать ещё одну теорему.

***Теорема* 5.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа* $(n \geq 3)$, σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* d, $n = pd + 1$ *для некоторого натурального* p, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3},$$

$$j = 1, \dots, k, r = 0, 1, \dots, d-1,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(d-1)} \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \dots \alpha_{j1} \overline{a_{\sigma(j)}}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \dots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-spv-1}), \dots$$

$$\dots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k \dots \overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k}_{-spv-1})).$$

Ввиду равенства $\mathrm{a}^{[-1]} = \overline{\mathrm{a}}$, из теорем 5.1 и 5.2 при $v = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [3, теоремы 2.1 и 2.2].

Так как цикл длины k из $\mathbf{S}_k$ имеет порядок k, то, полагая в теоремах 5.1 и 5.2 σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, получим ещё две теоремы.

***Теорема* 5.3.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, $l = tk + 1$ *для некоторого натурального* t, $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3}, j = 1, \dots, k, r = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(k-1)} \overline{a_{\sigma^{k-1}(j)}} \dots \alpha_{j1} \overline{a_{\sigma(j)}}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \dots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-tv-1}), \dots$$

$$\dots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k \dots \overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k}_{-tv-1})).$$

***Теорема* 5.4.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, $n = pk + 1$ *для некоторого натурального* p, $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3}, j = 1, \dots, k, r = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(k-1)} \overline{a_{\sigma^{k-1}(j)}} \dots \alpha_{j1} \overline{a_{\sigma(j)}}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \dots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-spv-1}), \dots$$

$$\dots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k \dots \overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k}_{-spv-1})).$$

Из теорем 5.3 и 5.4 при $v = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [3, теоремы 2.3 и 2.4].

Если в теореме 5.3 (в теореме 5.4) положить $k = n - 1$, то $t = s$ ($p = 1$) и получим следующую теорему.

***Теорема* 5.5.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), σ *– цикл длины* $n-1$ *из* $\mathbf{S}_{n-1}$, $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^{n-1}, \eta_{s,\sigma,n-1} >$,

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3},$$

$$j = 1, \dots, n-1, r = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(n-2)} \overline{a_{\sigma^{n-2}(j)}} \dots \alpha_{j1} \overline{a_{\sigma(j)}}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \dots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-vs-1}), \dots$$

$$\dots, \eta(\beta_{n-1} \underbrace{\overline{a_{n-1}}\alpha_{(n-1)0}\beta_{n-1} \dots \overline{a_{n-1}}\alpha_{(n-1)0}\beta_{n-1}}_{-vs-1})).$$

Из теоремы 5.5 при $v = -1$ вытекает результат о косых элементах из [3, следствие 2.1].

Если в теореме 5.3 положить $k = l - 1$, то $t = 1$. Поэтому из этой теоремы вытекает

***Теорема* 5.6.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), σ *– цикл длины* $l-1$ *из* $\mathbf{S}_{l-1}$, $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{l-1})$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1} >$,

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3},$$

$$j = 1, \dots, l-1, r = 0, 1, \dots, l-2,$$

$$\beta_j = \alpha_{j(l-2)} \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}} \dots \alpha_{j1} \overline{a_{\sigma(j)}}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \dots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-v-1}), \dots$$

$$\dots, \eta(\beta_{l-1} \underbrace{\overline{a_{l-1}}\alpha_{(l-1)0}\beta_{l-1} \dots \overline{a_{l-1}}\alpha_{(l-1)0}\beta_{l-1}}_{-v-1})).$$

Из теоремы 5.6 при $v = -1$ вытекает результат о косых элементах из [3, следствие 2.2].

Если в теореме 5.1 $\sigma = (i\,j)$ – транспозиция из $\mathbf{S}_k$, то $d = 2$, $r = 0, 1$,

$$\beta_j = \alpha_{j1} \overline{a_{\sigma(j)}} = \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_i} = \underbrace{a_i \dots a_i}_{n-3} \overline{a_i} = \alpha_{i0} \overline{a_i},$$

$$\beta_i = \alpha_{i1} \overline{a_{\sigma(i)}} = \underbrace{a_{\sigma(i)} \dots a_{\sigma(i)}}_{n-3} \overline{a_j} = \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3} \overline{a_j} = \alpha_{j0} \overline{a_j}.$$

Кроме того, так как $l - 1 = s(n-1) = 2t$, то по предложению 3.1 для $m \neq i$, $m \neq j$ имеем

$$b_m = \eta(\underbrace{a_m \quad \dots \quad a_m}_{(n-3)(-2vt-1)} \underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{-2vt-1}).$$

Поэтому из теоремы 5.1 вытекает

***Следствие* 5.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), $(i\,j)$ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_k$, $s(n-1) = 2t$ *для некоторого натурального* t, $v < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,(ij),k} >$. *Тогда* $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\alpha_{i0} \overline{a_i} \underbrace{\overline{a_j}\alpha_{j0}\alpha_{i0}\overline{a_i} \dots \overline{a_j}\alpha_{j0}\alpha_{i0}\overline{a_i}}_{-tv-1}),$$

$$b_i = \eta(\alpha_{j0} \overline{a_j} \underbrace{\overline{a_i}\alpha_{i0}\alpha_{j0}\overline{a_j} \dots \overline{a_i}\alpha_{i0}\alpha_{j0}\overline{a_j}}_{-tv-1}),$$

$$b_m = \eta(\underbrace{a_m \quad \dots \quad a_m}_{(n-3)(-2vt-1)} \underbrace{\overline{a_m} \dots \overline{a_m}}_{-2vt-1}), m \neq i, m \neq j.$$

6 Цикл (12 … d)

Конкретизируем полученные результаты для цикла $\sigma = (1\,2 \dots d) \in \mathbf{S}_k$.

***Теорема* 6.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), $d \leq k$, $(1\,2 \ldots d) \in \mathbf{S}_k$, $l = td + 1$ *для некоторого натурального* t, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\,(12\ldots d),\,k} >$,

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3},\ \alpha_{j1} = \underbrace{a_{j+1} \ldots a_{j+1}}_{n-3}, \ldots, \alpha_{j(d-j)} = \underbrace{a_d \ldots a_d}_{n-3},$$

$$\alpha_{j(d-j+1)} = \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}, \ldots, \alpha_{j(d-1)} = \underbrace{a_{j-1} \ldots a_{j-1}}_{n-3}, \quad (6.1)$$

$$\beta_j = \alpha_{j(d-1)}\,\overline{a_{j-1}} \ldots \alpha_{j(d-j+1)}\,\overline{a_1}\,\alpha_{j(d-j)}\,\overline{a_d} \ldots \alpha_{j1}\,\overline{a_{j+1}}. \quad (6.2)$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \ldots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k \ldots \overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k}_{-t\nu-1})). \quad (6.3)$$

Доказательство. Так как порядок подстановки $(12 \ldots d)$ равен d, то по теореме 5.1 справедливо равенство (6.3), где

$$\beta_j = \alpha_{j(d-1)}\,\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \alpha_{j1}\,\overline{a_{\sigma(j)}}. \quad (6.4)$$

$$\alpha_{jr} = \underbrace{a_{\sigma^r(j)} \ldots a_{\sigma^r(j)}}_{n-3},\ j = 1, \ldots, k,\ r = 0, 1, \ldots, d-1. \quad (6.5)$$

А так как $\sigma = (12 \ldots d)$, то

$$\sigma(j) = j + 1,$$
$$\sigma^2(j) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma(j+1) = j + 2,$$
$$\ldots$$
$$\sigma^{d-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-1-j}(j)) = \sigma(d-1) = d,$$
$$\sigma^{d+1-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-j}(j)) = \sigma(d) = 1,$$
$$\ldots$$
$$\sigma^{d-1}(j) = \sigma(\sigma^{d-2}(j)) = \sigma(j-2) = j - 1,$$
$$\sigma^{d}(j) = \sigma(\sigma^{d-1}(j)) = \sigma(j-1) = j.$$

Поэтому последовательности $\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{j(d-1)}$, определяемые равенствами (6.5), принимают вид (6.1), а правая часть равенства (6.4) совпадает с правой частью равенства (6.2) □

Если порядок d цикла $(12 \ldots d)$ делит $n - 1$, то теорема 6.1 позволяет сформулировать ещё одну теорему.

***Теорема* 6.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), $d \leq k$, $(12 \ldots d) \in \mathbf{S}_k$, $n = pd + 1$ *для некоторого натурального* p, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\,(12\ldots d),\,k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \ldots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-sp\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k \ldots \overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k}_{-sp\nu-1})),$$

где последовательности β_j *и* $\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{j(d-1)}$ *определяются соответственно равенствами* (6.1) *и* (6.2).

Из теорем 6.1 и 6.2 при $\nu = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [3, теоремы 2.5 и 2.6].

Следующие две теоремы получаются из теорем 6.1 и 6.2, если в них положить $d = k$.

***Теорема* 6.3.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), $l = tk + 1$ *для некоторого натурального* t, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\,(12\ldots k),\,k} >$,

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3},\ \alpha_{j1} = \underbrace{a_{j+1} \ldots a_{j+1}}_{n-3}, \ldots \alpha_{j(k-j)} = \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3},$$

$$\alpha_{j(k-j+1)} = \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}, \ldots, \alpha_{j(k-1)} = \underbrace{a_{j-1} \ldots a_{j-1}}_{n-3}, \quad (6.6)$$

$$\beta_j = \alpha_{j(k-1)}\,\overline{a_{j-1}} \ldots \alpha_{j(k-j+1)}\,\overline{a_1}\,\alpha_{j(k-j)}\,\overline{a_k} \ldots \alpha_{j1}\,\overline{a_{j+1}}. \quad (6.7)$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \ldots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k \ldots \overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k}_{-t\nu-1})).$$

***Теорема* 6.4.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), $n = pk + 1$ *для некоторого натурального* p, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\,(12\ldots k),\,k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \ldots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-sp\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k \ldots \overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k}_{-sp\nu-1})),$$

где последовательности β_j *и* $\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{j(k-1)}$ *определяются соответственно равенствами* (6.6) *и* (6.7).

Из теорем 6.3 и 6.4 при $\nu = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [3, теоремы 2.7 и 2.8].

Следующая теорема получается из теоремы 6.3, если в ней положить $k = n - 1$.

***Теорема* 6.5.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^{n-1}, \eta_{s,\,(12\ldots n-1),\,n-1} >$,

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3},\ \alpha_{j1} = \underbrace{a_{j+1} \ldots a_{j+1}}_{n-3}, \ldots$$

$$\ldots, \alpha_{j(n-1-j)} = \underbrace{a_{n-1} \ldots a_{n-1}}_{n-3},$$

$$\alpha_{j(n-j)} = \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}, \ldots, \alpha_{j(n-2)} = \underbrace{a_{j-1} \ldots a_{j-1}}_{n-3},$$

$$\beta_j = \alpha_{j(n-2)}\,\overline{a_{j-1}} \ldots \alpha_{j(n-j)}\,\overline{a_1}\,\alpha_{j(n-1-j)}\,\overline{a_{n-1}} \ldots \alpha_{j1}\,\overline{a_{j+1}}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \ldots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-s\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_{n-1} \underbrace{\overline{a_{n-1}}\alpha_{(n-1)0}\beta_{n-1} \ldots \overline{a_{n-1}}\alpha_{(n-1)0}\beta_{n-1}}_{-s\nu-1})).$$

Из теоремы 6.5 при $\nu = -1$ вытекает результат о косых элементах из [3, теорема 2.9].

Следующая теорема вытекает из теоремы 6.3, если в ней положить $k = l - 1$. Она же может быть доказана аналогично теореме 6.1, если воспользоваться теоремой 5.6.

***Теорема* 6.6.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{l-1})$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^{l-1}, \eta_{s,\,(12\ldots l-1),\,l-1} >$,

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3},\ \alpha_{j1} = \underbrace{a_{j+1} \ldots a_{j+1}}_{n-3}, \ldots \alpha_{j(l-1-j)} = \underbrace{a_{l-1} \ldots a_{l-1}}_{n-3},$$

$$\alpha_{j(l-j)} = \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}, \ldots, \alpha_{j(l-2)} = \underbrace{a_{j-1} \ldots a_{j-1}}_{n-3},$$

$$\beta_j = \alpha_{j(l-2)}\,\overline{a_{j-1}} \ldots \alpha_{j(l-j)}\,\overline{a_1}\ \alpha_{j(l-1-j)}\,\overline{a_{l-1}} \ldots \alpha_{j1}\,\overline{a_{j+1}}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \ldots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-v-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_{l-1}}\alpha_{(l-1)0}\beta_{l-1} \ldots \overline{a_{l-1}}\alpha_{(l-1)0}\beta_{l-1}}_{-v-1})).$$

Из теоремы 6.6 при $\nu = -1$ вытекает результат косых элементах из [3, теорема 2.10].

Тернарный случай. Следующее следствие вытекает из теоремы 5.1, если в ней положить $n = 3$.

***Следствие* 6.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* d, $2s = td$ *для некоторого натурального* t, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}}$$

$$\underbrace{\overline{a_1 a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}} \ldots \overline{a_1 a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}}}_{-\nu t-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}}$$

$$\underbrace{\overline{a_k a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}} \ldots \overline{a_k a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}}}_{-\nu t-1})).$$

Следующее следствие вытекает из следствия 6.1, если в нём положить, $d = 2$.

***Следствие* 6.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* 2, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\overline{a_{\sigma(1)}}\ \underbrace{\overline{a_1 a_{\sigma(1)}} \ldots \overline{a_1 a_{\sigma(1)}}}_{-\nu s-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\overline{a_{\sigma(k)}}\ \underbrace{\overline{a_k a_{\sigma(k)}} \ldots \overline{a_k a_{\sigma(k)}}}_{-\nu s-1})).$$

Следующее следствие вытекает из следствия 6.1, если в нём положить σ – цикл длины k.

***Следствие* 6.3.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, $2s = tk$ *для некоторого натурального* t, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\overline{a_{\sigma^{k-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}}$$

$$\underbrace{\overline{a_1 a_{\sigma^{k-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}} \ldots \overline{a_1 a_{\sigma^{k-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}}}_{-\nu t-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\overline{a_{\sigma^{k-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}}$$

$$\underbrace{\overline{a_k a_{\sigma^{k-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}} \ldots \overline{a_k a_{\sigma^{k-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}}}_{-\nu t-1})).$$

Следующее следствие можно извлечь из следствия 6.2, если в нём положить, σ – транспозиция из $\mathbf{S}_k$. Оно же вытекает из следствия 5.1.

***Следствие* 6.4.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, $k \geq 3$, $\sigma = (i\ j)$ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_k$, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,(ij),k} >$. *Тогда* $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_i}\ \underbrace{\overline{a_j a_i} \ldots \overline{a_j a_i}}_{-\nu s-1}),\ b_i = \eta(\overline{a_j}\ \underbrace{\overline{a_i a_j} \ldots \overline{a_i a_j}}_{-\nu s-1}),$$

$$b_m = \eta(\underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-2\nu s-1}),\ m \neq i,\ m \neq j.$$

Следующее следствие вытекает из теоремы 6.1, если в ней положить $n = 3$.

***Следствие* 6.5.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, $d \leq k$, $(1\ 2 \ldots d) \in \mathbf{S}_k$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,(12 \ldots d),k} >$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\beta_1 \underbrace{\overline{a_1}\beta_1 \ldots \overline{a_1}\beta_1}_{-tv-1}), \ldots, \eta(\beta_k \underbrace{\overline{a_k}\beta_k \ldots \overline{a_k}\beta_k}_{-tv-1})),$$

где

$$\beta_j = \overline{a_{j-1}} \ldots \overline{a_1}\ \overline{a_d} \ldots \overline{a_{j+1}}.$$

Следующее следствие можно извлечь из следствия 6.5, если в нём положить, σ – транспозиция (1 2) из $\mathbf{S}_k$. Оно же вытекает из следствия 6.4.

***Следствие* 6.6.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа*, $(1\ 2) \in \mathbf{S}_k$, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,(12),k} >$. *Тогда* $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_1 = (\eta(\overline{a_2}\ \underbrace{\overline{a_1}a_2 \ldots \overline{a_1}a_2}_{vs-1}),\ b_2 = \eta(\overline{a_1}\ \underbrace{\overline{a_2}a_1 \ldots \overline{a_2}a_1}_{vs-1})),$$

$$b_m = \eta(\underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-2\nu s-1}),\ m \neq 1,\ m \neq 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* Степени элементов в *l*-арных группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 47–51.

2. *Гальмак*, *А.М.* Степени элементов в *l*-арных группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 38–43.

3. *Гальмак*, *А.М.* О косых элементах в полиадических группах специального вида, определяемых циклической подстановкой / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 55–60.

Поступила в редакцию 09.09.2023.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор