МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ АБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП, НЕ СОДЕРЖАЩИХ $\mathfrak{F}$-КОРАДИКАЛ

Р.В. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON INTERSECTION OF ABNORMAL SUBGROUPS THAT DON'T CONTAIN A $\mathfrak{F}$-RESIDUAL

R.V. Borodich

F. Scorina Gomel State University

Исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер максимальных A-допустимых Θ-подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал. Установлено влияние соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини на строение самой группы.

Ключевые слова: *конечная группа*, *абнормальная подгруппа*, $\mathfrak{F}$*-корадикал*.

The structure of a subgroup equal to the intersection of maximal A-admissible Θ-subgroups not containing the $\mathfrak{F}$-residual is investigated. The influence of the corresponding generalized subgroup Frattini on the structure of the group itself is determined.

Keywords: *finite group*, *abnormal subgroup*, $\mathfrak{F}$*-residual*.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В исследовании конечных групп одним из важных направлений является исследование свойств пересечений некоторых систем максимальных подгрупп и изучениие влияния этих свойств на строение самой группы. Одной из классических подгрупп этого направления является подгруппа Фраттини [1]. В дальнейшем это направление развивалось в работах таких авторов, как В. Гашюц [2], В. Дескинс [3] и многих других (см. монографии [4]–[6]).

Данная работа посвящена развитию указанных направлений в группах с операторами.

1 Определения и обозначения

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $<H, H^x>$; *абнормальной*, если $x \in <H, H^x>$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называют нормально наследственным (S_n-замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то

$$G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}.$$

Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^{\phi}) \cap f(Ker\phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ – автоморфное отображение группы G в себя. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных абнормальных A-допустимых подгрупп. Если таких подгрупп в группе G нет, то положим $\Delta(G, A) = G$.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и группа G имеет группу операторов A. Через $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обозначим пересечение ядер всех максимальных абнормальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G. Если в группе G все максимальные абнормальные A-допустимые подгруппы содержат $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, то положим $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = G$.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [7].

Пример. *Пусть Q – группа кватернионов 8-го порядка. Рассмотрим $G = [Q]Z_3$, Z_3 – группа операторов для Q. В группе Q подгруппа K порядка 2 является максимальной допустимой относительно группы операторов Z_3, но не является максимальной подгруппой группы Q.*

Существует точный неприводимый Z_7-модуль V над полем F_5. Пусть $G = [[V]Z_7] \times Q$, где Q – группа кватернионов 8-го порядка, Z_3 – группа операторов группы G. На подгруппе $[[V]Z_7]$ группа операторов Z_3 действует тождественно. Рассмотрим $\Gamma = [G]Z_3$. Подгруппа $\Delta(\Gamma) \cap G = K$, а подгруппа $\Delta(G) = Q$. Следовательно,

$$\Delta(\Gamma) \cap G \subset \Delta(G, A).$$

Этот пример показывает, что задача о исследовании свойств подгруппы $\Delta(G, A)$ не сводится к рассмотрению строения подгруппы $\Delta(\Gamma)$.

2 Вспомогательные результаты

Лемма 2.1 [10, С. 38]. *Если $H \triangleleft G$, $(|H|, |G : H|) = 1$, то существует $K \subseteq G$, $G = HK$, $H \cap K = 1$ и все такие подгруппы сопряжены между собой.*

Теорема 2.2 [8, С. 49]. *Для любой группы G и любой ступенчатой формации $\mathfrak{F}$ имеет место равенство $\Delta^F(G)/\Delta(G) = Z_{\infty}^F(G/\Delta(G))$.*

Лемма 2.3 [4, С. 96]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация. Тогда каждая $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа любой группы принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Лемма 2.4. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – ступенчатая формация, K – некоторая нормальная подгруппа группы G. Пусть каждая максимальная абнормальная A-допустимая подгруппа группы G, не содержащая K, содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta(G, A)$;

2) $K / K \cap \Delta(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A))$.

Доказательство. Очевидно, что пересечение $K \cap G^{\mathfrak{F}}$ содержится во всех максимальных абнормальных A-допустимых подгруппах, как содержащих $G^{\mathfrak{F}}$, так и не содержащих $G^{\mathfrak{F}}$, а следовательно, оно входит в $\Delta(G, A)$.

Пусть R/S – главный фактор группы G, причём $R \subseteq K$, $S \supseteq K \cap \Delta(G, A)$. Так как

$$R \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq S,$$

то имеем G-изоморфизм:

$$RG^{\mathfrak{F}} / SG^{\mathfrak{F}} R / (R \cap SG^{\mathfrak{F}}) = R / S(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = R / S.$$

Так как $G / SG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $RG^{\mathfrak{F}} / SG^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-централен в $G / SG^{\mathfrak{F}}$, а значит и в G. Но тогда R / S $\mathfrak{F}$-централен в G. □

Лемма 2.5 [9, С. 45]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной группе подгруппа $\Phi_{\theta}(G, A)$ нильпотентна.*

Лемма 2.6 [4, С. 179]. *Если подгруппа H пронормальна в G, то подгруппа $N_G(H)$ абнормальна в G.*

Лемма 2.7 [4, С. 38]. *Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G / F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Теорема 2.8 [4, С. 41]. *Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ S-замкнута (S_n-замкнута) тогда и только тогда, когда для любого простого p формация $f(p)$ S-замкнута (соответственно S_n-замкнута).*

***Лемма* 2.11.** *Пусть группа G имеет группу операторов A. Тогда* $\Delta_{\Delta}^{F}(G)\subseteq D_{\Delta}^{F}(G,A)$.

Доказательство. Предположим, что $\Delta_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)\not\subseteq D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Тогда существует максимальная абнормальная А-допустимая подгруппа *M* не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, такая, что $M\not\supseteq\Delta_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$. Так как $\Delta_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$ является характеристической подгруппой, то $M\Delta_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)=G$. Так как *M* – максимальная абнормальная *A*-допустимая подгруппа, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, то она содержится в некоторой абнормальной $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе *K* группы *G*. Тогда получаем, что $G=M\Delta_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)=K\Delta_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)=K$. Полученное противоречие и доказывает лемму. □

***Лемма* 2.12** [4, С. 78]. *Пусть H – нильпотентная нормальная подгруппа группы G. Если* $H\neq 1$ *и* $H\cap\Phi(G)=1$, *то H дополняема в G и равна прямому произведению некоторого числа минимальных подгрупп группы G.*

***Лемма* 2.13** [9, С. 78]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, Θ *– абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной группе подгруппа* $\Phi_{\theta}(G,A)$ *нильпотентна.*

***Лемма* 2.14** [11, С. 26]. *Пусть группа G имеет группу операторов A. Если K – A-допустимая подгруппа группы G, то* $N_G(K)$ *является A-допустимой подгруппой группы G.*

***Лемма* 2.15.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, $K\subseteq N\lhd G$, $K\lhd G$, *N и K – A-допустимые подгруппы группы G и* $K\subseteq\Delta(G,A)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* N/K π*-замкнута, то и N* π*-замкнута*;

2) $F_p(N/K)=F_p(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_{π}-подгруппу H/K. Так как $K\subseteq\Delta(G,A)$, то по лемме 2.5 *K* нильпотентна. Нетрудно заметить, что $S_{\pi'}$-подгруппа *R* из *K* является $S_{\pi'}$-подгруппой в *H*. По лемме 2.1 *H* содержит S_{π}-подгруппу *S* и любые две такие подгруппы сопряжены в *H*. По обобщенной лемме Фраттини $G=N_G(S)H$. С учётом того, что $H=SR$, получаем, $G=N_G(S)R$. Так как *S* есть S_{π}-подгруппа в *N*, а подгруппа *N A*-допустима, то *S A*-допустима. Тогда по лемме 2.14 подгруппа $N_G(S)$ *A*-допустима и по лемме 2.6 является абнормальной подгруппой группы *G*. Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной *A*-допустимой подгруппе *M* из *G*. Поэтому $G=MR$. Так как $R\subseteq\Delta(G,A)\subseteq M$, то $G=M$. Получили противоречие. Следовательно, *S* нормальна в *G*.

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi=p'$. □

3 Основной результат

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и*

$$N/N\cap\Delta(G,A)\in\mathfrak{F}.$$

Тогда N представима в виде прямого произведения $N=N_1\times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $N_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$;

3) $N_2\subseteq\Delta(G,A)$.

Доказательство. Пусть $D=N\cap\Delta(G,A)$, $\omega=\pi(\mathfrak{F})$. Так как N/D является ω-группой, то по лемме 2.15 подгруппа *N* представима в виде $N=N_1\times N_2$, где N_1 – S_{ω}-подгруппа из *N*. Так как $N_2\subseteq\Delta(G,A)$, то $N/D\simeq N_1/D_1\in\mathfrak{F}$, где $D_1=N_1\cap\Delta(G,A)$. Пусть $p\in\omega$. Так как $N_1/D_1\in\mathfrak{F}$, то, используя леммы 2.15 и 2.7, получаем

$$(N_1/D_1)/F_p(N_1/D_1)=$$
$$=N_1/D_1/F_p(N_1)/D_1\simeq N_1/F_p(N_1)\in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p\in\pi(N_1)$, то по лемме 2.7 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$. □

***Следствие* 3.1.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация, содержащая* $\mathfrak{N}$ *и группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и* $N/N\cap\Delta(G,A)\in\mathfrak{F}$, *то* $N\in\mathfrak{F}$.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация нильпотентных групп, получаем следующее

***Следствие* 3.1.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и* $N/N\cap\Delta(G,A)\in\mathfrak{N}$, *то* $N\in\mathfrak{N}$.

Если положить $A=1$, то получаем

***Следствие* 3.1.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– некоторая локальная формация, N – нормальная подгруппа группы G и* $N/N\cap\Delta(G)\in\mathfrak{F}$. *Тогда N представима в виде прямого произведения* $N=N_1\times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $N_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$;

3) $N_2\subseteq\Delta(G)$.

***Следствие* 3.1.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, содержащая $\mathfrak{N}$. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Тогда*

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)).$$

Доказательство. Так как подгруппа Фраттини фактор-группы $G/\Delta(G, A)$ единична, то, применяя лемму 2.11 и теорему 2.2, получаем

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) \supseteq \Delta_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)\Delta(G, A) / \Delta(G, A) \supseteq$$
$$\supseteq \Delta^{\mathfrak{F}}\Delta(G, A) / \Delta(G, A) \supseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)) =$$
$$= Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)).$$

Обратное включение выполняется ввиду леммы 2.4. □

Согласно леммы 2.3 получаем следующее

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная локальная формация. Тогда*

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}.$$

***Следствие* 3.2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная локальная формация. Тогда*

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta(G) \in \mathfrak{F}.$$

***Теорема* 3.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$. Тогда $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \subseteq \Delta(G, A)$,*

$$\pi(B) \cap \pi(F) = \varnothing.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.2 $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A)$ является $\mathfrak{F}$-гиперцентром в $G/\Delta(G, A)$. По следствию 3.2.1

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}.$$

Остаётся применить теорему 3.1. □

***Следствие* 3.3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$. Тогда $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$ для любой группы G.*

Если положить $A = 1$, то $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ и из теоремы 3.3 получаем результат М.В. Селькина из [5].

***Теорема* 3.4.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$. Тогда подгруппа $D_{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G, A)$ нильпотентна и*

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G, A)/\Delta(G, A) = Z(G/\Delta(G, A)).$$

Доказательство. Из следствия 3.3.1 вытекает нильпотентность подгруппы $D_{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G, A)$. По теореме 3.2 $D_{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G, A)/\Delta(G, A)$ является гиперцентром в $G/\Delta(G, A)$. Так как подгруппа Фраттини группы $G/\Delta(G, A)$ единична, то по лемме 2.12 гиперцентр группы $G/\Delta(G, A)$ совпадает с центром. □

В случае, когда группа операторов единична, то из теоремы 3.4 получаем известный результат В. Гашюца из [2].

***Теорема* 3.5.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – формация. Если в группе G существуют максимальные абнормальные A-допустимые подгруппы, не содержащие $\mathfrak{F}$-корадикал и не принадлежащие $\mathfrak{F}$, тогда пересечение всех таких подгрупп совпадает с $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$.*

Доказательство. Обозначим через D пересечение всех максимальных абнормальных A-допустимых подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал и не принадлежащих $\mathfrak{F}$. Очевидно, что $D \supseteq D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \supseteq \Delta(G, A)$. Если $D \subseteq \Delta(G, A)$, то утверждение теоремы верно. Пусть D не входит в $\Delta(G, A)$. Тогда $G = MD$, где M – некоторая максимальная абнормальная A-допустимая подгруппа группы G. Если $M \in \mathfrak{F}$, то $G / D \in \mathfrak{F}$. Откуда следует, что D содержится только в тех максимальных абнормальных A-допустимых подгруппах, которые содержат $G^{\mathfrak{F}}$, что невозможно. Поэтому M не входит в $\mathfrak{F}$ и является максимальной абнормальной A-допустимой подгруппой, содержащей $G^{\mathfrak{F}}$. Итак, всякая максимальная абнормальная A-допустимая подгруппа, не содержащая D, содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $D \subseteq D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. □

***Теорема* 3.6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$. Если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N / N \cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;
3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Предположим, что $\Delta(G, A) \neq 1$. Тогда для $G/\Delta(G, A)$ теорема верна и

$$N/\Delta(G, A) = N_1/\Delta(G, A) \times N_2/\Delta(G, A).$$

Остаётся показать, что $N_1 \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(N_1)$. Так как $N_1/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 2.15 и лемму 2.7, получаем

$$(N_1 / \Delta(G, A)) / F_p(N_1 / \Delta(G, A)) =$$
$$= N_1 / \Delta(G, A) / F_p(N_1) / \Delta(G, A) \simeq$$
$$\simeq N_1 / F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 2.7 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$.

В результате индуктивных рассуждений можно считать, что $\pi(N_1)\subseteq\pi(\mathfrak{F})$ и $N_2=1$. Поэтому необходимо доказать, что $N=N_1\in\mathfrak{F}$.

Пусть $K=N\cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Каждая максимальная A-допустимая Δ-подгруппа, не содержащая K, содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, ввиду леммы 2.4 имеем

$$K/K\cap\Delta(G,A)\subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/K\cap\Delta(G,A)).$$

Если $K\cap\Delta(G,A)\neq 1$, то по индукции

$$N/K\cap\Delta(G,A)\in\mathfrak{F},$$

а значит, согласно теореме 3.1 $N\in\mathfrak{F}$.

Пусть $K\cap\Delta(G,A)=1$. Тогда подгруппа K $\mathfrak{F}$-гиперцентральна в группе G. Докажем, что K $\mathfrak{F}$-гиперцентральна и в подгруппе N. Пусть L/S – G-главный pd-фактор группы K. Тогда $G/C\in f(p)$, где $C=C_G(L/S)$, f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как по теореме 2.8 формация $f(p)$ является нормально наследственной, то

$$NC/CN/C_N(L/S)\in f(p).$$

Следовательно, подгруппа N f-стабилизирует G-главный ряд подгруппы K. Это означает, что $K\subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(N)$. Отсюда и из $N/K\in\mathfrak{F}$ вытекает, что $N\in\mathfrak{F}$. □

***Следствие* 3.6.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и* $N/N\cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G,A)\in\mathfrak{F}$, *то* $N\in\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп, то получаем

***Следствие* 3.6.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и* $N/N\cap D_{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G,A)\in\mathfrak{N}$, *то* $N\in\mathfrak{N}$.

Если группа операторов единична, то получаем

***Следствие* 3.6.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация. Если N – нормальная подгруппа группы G и* $N/N\cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}$, *тогда N представима в виде прямого произведения* $N=N_1\times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $N_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2)\cap\pi(F)=\varnothing$;

3) $N_2\subseteq\Delta(G)$.

***Следствие* 3.6.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная подгруппа группы G и* $N/N\cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}$, *то* $N\in\mathfrak{F}$.

Необходимо отметить, что условие нормальной наследственности локальной формации в теореме 3.6 является существенным и его отбросить нельзя. Действительно, если положить $A=1$ и формация $\mathfrak{F}$ не является нормально наследственной, то в ней найдётся такая группа G, у которой некоторая нормальная подгруппа N не входит в $\mathfrak{F}$. Так как $G\in\mathfrak{F}$, то $D^{\mathfrak{F}}(G)=G$. Поэтому $N/N\cap D^{\mathfrak{F}}(G)=N/N\in\mathfrak{F}$. Но отсюда не следует, что $N\in\mathfrak{F}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frattini*, *G.* Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. *Gaschütz*, *W.* Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.

3. *Deskins*, *W.E.* A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // Ill. J. Math. – 1961. – Vol. 5, № 2. – P. 306–313.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.

5. *Селькин*, *М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.

6. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

7. *Бородич*, *Р.В.* Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

8. *Бородич*, *Р.В.* О пересечении $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич // Весцi НАН Беларусi. Серыя физ.-мат. навук. – 2007. – № 3. – С. 47–52.

9. *Бородич*, *Р.В.* О пересечении A-допустимых θ-подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (31). – С. 44–47.

10. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

11. *Gorenshtein*, *D.* Finite groups / D. Gorenshtein. – New York: Harper and Row, 1968. – 572 p.

Поступила в редакцию 06.02.19.