

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНЫ В МОМЕНТ СТРАГИВАНИЯ

М.А. Гундина

Белорусский национальный технический университет, Минск

DETERMINATION OF THE INITIAL DIRECTION OF CRACKS GROWTH AT THE MOMENT OF MOVEMENT

M.A. Hundzina

Belarusian National Technical University, Minsk

Рассматривается методика нахождения начального направления развития прямолинейной трещины в пластине упругого материала с нагрузкой, приложенной на границах пластины в условиях плоской деформации. В работе приводятся аналитические представления для компонентов тензора напряжений. Описана постановка задачи и последовательность шагов для нахождения значения угла, при котором начинается докритический рост трещины. Полученные теоретические зависимости по определению характеристик предельного состояния конструкции позволяют сделать мотивированный выбор геометрических параметров с учетом прочностных свойств материала.

Ключевые слова: трещина, начальное направление роста трещины, интенсивность напряжений, прочность материала.

A technique for determining the initial direction of the growth of a straight crack in a plate of elastic material with a load, applied at the boundaries of the plate in the plane strain conditions, is considered. In the paper analytical representations for the stress tensor components are given. The formulation of the problem and the sequence of steps for finding the value of the angle, at which subcritical crack growth begins, are described. The obtained theoretical dependences by definition of the characteristics of the limiting state of the construction allow making a motivated choice of geometric parameters with the strength properties of the material.

Keywords: crack, initial direction of crack growth, stress intensity, material strength.

Введение

В современной механике разрушения среди актуальных направлений исследований можно выделить следующие: получение оценки прочности конструкции и определение момента ее разрушения, прогнозирование первоначального направления развития трещины, влияние возникающих в окрестности ее вершины эффектов на процессы деформирования.

Одним из важных аспектов оценки трещиностойкости материала является нахождение количественных характеристик распространения трещины, которая развивается под действием приложенных нагрузок, в частности, определение траектории ее распространения и определение первоначального направления роста.

Критерии осреднения напряжений являются эффективными в задачах механики разрушения для анализа напряженно-деформированного состояния упругих материалов. В работе В.В. Новожилова [1] рассмотрены основные положения линейных и нелинейных подходов, кроме этого, сформулированы соответствующие критерии разрушения.

Монографии В.А. Левина, Е.М. Морозова, Ю.Г. Матвиенко, В.З. Партона [2], [3] посвящены применению критерия прочности (критерии наибольшего главного напряжения, касательного,

октаэдрического напряжения) в зависимости от типа используемых материалов, что позволяет провести дальнейший анализ условий эксплуатации конструкций. Л.В. Степанова, С.А. Бронников, О.Н. Белова в статье «Оценка направления роста трещины в условиях смешанного нагружения» подробно описывают методику определения первоначального направления развития произвольно ориентированной трещины с помощью обобщенных критериев, которые используются в современной механике разрушения для моделирования, выполненного численными методами [4].

В ряде работ отечественных и зарубежных ученых анализируется постановка критерия осредненных напряжений вблизи вершины трещины для нахождения начального направления страгивающейся трещины при смешанных условиях нагружения, а также статистическая обработка соответствующих экспериментальных данных задачи [5], [6].

Локальный критерий максимального тангенциального напряжения, который является одним из универсальных критериев, описан в работах Ю.Г. Матвиенко [7].

1 Нахождение начального направления развития трещины

Рассмотрим локальный критерий начального направления роста трещины на основе принципа

критерия максимальных осредненных напряжений в зоне процесса разрушения в окрестности конца трещины.

Вспользуемся выражениями для тангенциальных напряжений [8] для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии пластины, содержащей прямолинейную трещину. Эти выражения необходимы для определения начального направления распространения трещины при нагружении смешанного типа.

С целью исследования основных закономерностей деформирования пластины в окрестности вершины трещины при растягивающей нагрузке используем аналитическое решение упругой задачи. Построим математическую модель для задачи о растяжении пластины, ослабленной прямолинейной трещиной [9].

Бесконечную плоскость заменим квадратом достаточно большого размера. Его размеры будем выбирать так, чтобы была возможной замена бесконечной области конечной, а начало системы координат направим в точку пересечения его диагоналей. Известно, что при удалении от края прямолинейной центральной трещины на величину, равную половине длины трещины, концентрация напряжений быстро уменьшается. В задачах теории упругости и пластичности учитывается факт: если ширина пластины превышает на порядок длину трещины, то разница в решениях по наиболее чувствительному компоненту тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$, представленному в полярной системе, не превысит 6% [10].

Объектом данного численно-аналитического исследования служила пластина высотой 200 мм, длиной 200 мм с центральной прямолинейной трещиной длиной $a = 20$ мм.

Плоский образец представляем в виде пластины как приближение пространственного образца с малой толщиной. Его ширина сечения W образца удовлетворяет следующему соотношению:

$$a \geq 0,6W,$$

в данном случае W можно взять равным 10 мм.

Зададим на границе рассматриваемого квадрата напряжения, соответствующие одноосному растяжению пластины в -70 МПа.

Связь между полярной и декартовой системами координат осуществляется по следующим формулам:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\theta = \operatorname{sgn} x_2 \arccos \frac{x_1}{r},$$

$$r_1(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2},$$

$$\theta_1(x_1, x_2) = \operatorname{sgn} x_2 \arccos \frac{x_1}{r_1(x_1, x_2)},$$

$$r_2(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 + 2a)^2 + x_2^2},$$

$$\theta_2(x_1, x_2) = \operatorname{sgn} x_2 \arccos \frac{x_1}{r_2(x_1, x_2)},$$

где (x_1, x_2) , (r, θ) – координаты текущей точки в декартовой и полярной системе координат соответственно.

На рисунке 1.1 представлены основные числовые параметры углов, напряжений и расстояний до текущей точки, которые используются при решении задачи в окрестности вершины трещины.

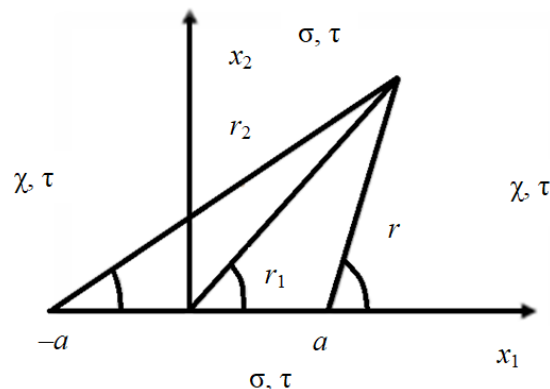


Рисунок 1.1 – Система координат в окрестности вершины трещины

На рисунке 1.1 можно выделить следующие обозначения углов: θ_1 – это угол между r_1 и осью абсцисс; θ_2 – это угол между r_2 и осью Ox ; θ – это угол между r и осью абсцисс, σ , τ , χ – напряжения, приложенные к границам пластины.

Тогда компоненты тензора напряжений выражаются формулами [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{K_I}{\sqrt{a r r_2}} \left(r_1 \cos \left(\theta_1 - \frac{\theta + \theta_2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{r_1 a^2}{r r_2} \sin \theta_1 \sin \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \right) + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{a r r_2}} \left(2 r_1 \sin \left(\theta_1 - \frac{\theta + \theta_2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{r_1 a^2}{r r_2} \sin \theta_1 \cos \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \right) + \chi - \sigma, \\ \sigma_{22} = & \frac{K_I}{\sqrt{a r r_2}} \left(r_1 \cos \left(\theta_1 - \frac{\theta + \theta_2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{r_1 a^2}{r r_2} \sin \theta_1 \sin \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \right) + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{a r r_2}} \sin \theta_1 \sin \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \left. \right), \\ \sigma_{12} = & \frac{K_I}{\sqrt{a r r_2}} \sin \theta_1 \cos \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{a r r_2}} \left(r_1 \cos \left(\theta_1 - \frac{\theta + \theta_2}{2} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{r_1 a^2}{r r_2} \sin \theta_1 \sin \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \right),$$

где коэффициенты интенсивности выражаются через значения напряжения следующим образом:

$$K_I = \sigma \sqrt{a}, \quad K_{II} = \tau \sqrt{a}.$$

Тогда выразим компоненты тензора напряжений в полярной системе по формулам:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta,$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos \theta.$$

Формулы связи декартовой системы координат и полярной системы представлены следующими соотношениями:

$$x_1 = r \cos \theta + a, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Учитывая предыдущие соотношения, выразим компонент тензора напряжений σ_{11} в зависимости от параметров углов, исходных напряжений на границе и расстояний до текущей точки:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \chi - \sigma + (r_1(x_1, x_2) \cdot r \cdot r_2(x_1, x_2) \times \\ & \times (K_1 \cos(0,5(\theta - 2\theta_1(x_1, x_2) + \theta_2(x_1, x_2))) + \\ & + 2K_2 \sin(\theta_1(x_1, x_2) + 0,5(-\theta - \theta_2(x_1, x_2)))) - \\ & - a^2 \sin(\theta_1(x_1, x_2)) \cdot K_2 \cdot \cos(1,5(\theta + \theta_2(x_1, x_2))) + \\ & + K_1 \sin(1,5(\theta + \theta_2(x_1, x_2)))))) / (a r^2 \cdot r_2(x_1, x_2)^2). \end{aligned}$$

Компонент тензора напряжений σ_{22} , учитывая значения коэффициентов интенсивности, примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & (K_2 r \cdot r_2(x_1, x_2) \cdot \sin(\theta_1(x_1, x_2)) \times \\ & \times \sin(1,5 \cdot (\theta + \theta_2(x_1, x_2))) + \\ & + K_1 \cdot r_1(x_1, x_2) \cdot (r \cdot \cos(0,5(\theta - 2\theta_1(x_1, x_2) + \\ & + \theta_2(x_1, x_2))) \cdot r_2(x_1, x_2) - a^2 \cdot \sin(\theta_1(x_1, x_2)) \times \\ & \times \sin(1,5(\theta + \theta_2(x_1, x_2)))))) / (a r^2 \cdot r_2(x_1, x_2)^2). \end{aligned}$$

Компонент тензора напряжений σ_{12} примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & (K_1 r \cdot \cos(1,5(\theta + \theta_2(x_1, x_2))) \cdot r_2(x_1, x_2) \times \\ & \times \sin(\theta_1(x_1, x_2)) + K_2 \cdot r_1(x_1, x_2) \times \\ & \times (r \cdot \cos(0,5(\theta - 2\theta_1(x_1, x_2) + \theta_2(x_1, x_2))) \times \\ & \times r_2(x_1, x_2) - a^2 \cdot \sin(\theta_1(x_1, x_2)) \times \\ & \times \sin(1,5(\theta + \theta_2(x_1, x_2)))))) / (a r^2 \cdot r_2(x_1, x_2)^2). \end{aligned}$$

Тогда можно оценить размеры области предразрушения вблизи вершины стругающейся трещины по следующей формуле:

$$d = \frac{2 K_{Ic}^2}{\pi \sigma_0^2},$$

где величина σ_0 – это предельные локальные напряжения, действующие в зоне предразрушения, коэффициент K_{Ic} – вязкость разрушения;

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_{\theta\theta}(r) dr.$$

Согласно критерию максимальных осредненных тангенциальных напряжений, первоначальный рост трещины совершается в том направлении, где достигается наибольшее значение компонента тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$. Запишем критерий в следующем виде [1]:

$$\sigma_{\theta\theta,0} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta,00} < 0.$$

2 Результаты расчетов

На рисунках 2.1, 2.2 представлены графики компонента тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ для трещины в случае нормального отрыва.

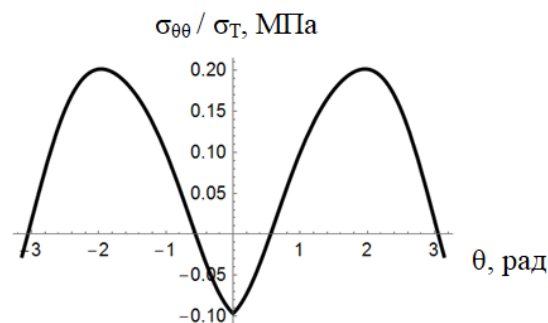


Рисунок 2.1 – Распределение напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ на расстоянии от вершины трещины, составляющем 20% от ее длины, при исходном напряжении 1,6 МПа (материал мрамор)

Проанализировав полученный график, можно сделать вывод о наличии двух локальных максимумов функции $\sigma_{\theta\theta}$, которые достигаются при значениях углов $\theta = \pm 1,96$ (рад). Предположительно в одном из этих направлений начнется первоначальный рост трещины.

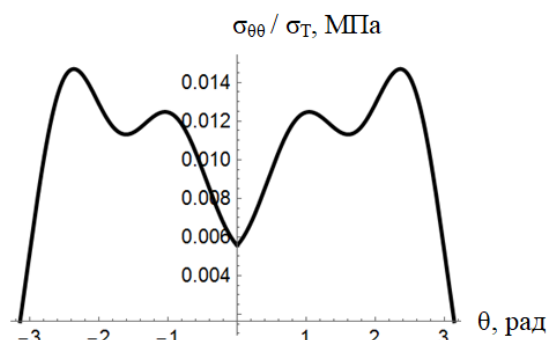


Рисунок 2.2 – Распределение напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ на расстоянии от вершины трещины, составляющем 50% от ее длины, при исходной нагрузке 1,6 МПа (материал мрамор)

На рисунке 2.2 видно, что подрастание привело к перераспределению напряжений в привершинной области и изменению направления дальнейшего роста трещины. Локальный максимум достигается при $\theta = \pm 2,36$ рад. Знак угла

выбирается с учетом предыдущих подрастаний трещины.

Построим зависимость направления развития трещины от расстояния до вершины трещины (рисунок 2.3).

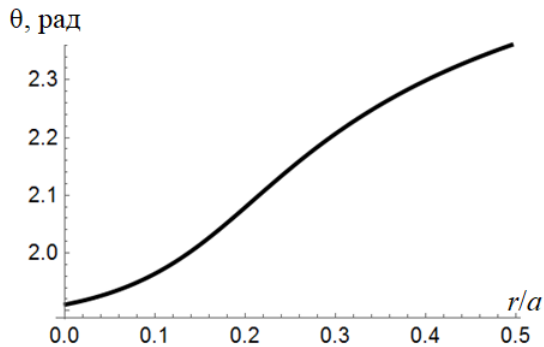


Рисунок 2.3 – Зависимость значения угла, при котором достигается максимальное значение напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, в зависимости от расстояния до вершины трещины

Проанализировав полученный график, можно сделать вывод, что в непосредственной окрестности вершины трещины первоначальное направление ее дальнейшего развития совпадает с осью, на которой расположена прямолинейная трещина $\theta \approx 0$, что согласуется с известными результатами [11]. Также требует учета тот факт, что при малейшем продвижении трещины происходит перераспределение напряжений в окрестности ее вершины и значение угла требуется пересчитывать.

Запишем зависимость интенсивности напряжений в полярной системе координат (при условии плоской деформации) в зависимости от угла θ :

$$T(\theta) = \sqrt{\frac{3}{4}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 3\sigma_{r\theta}^2}.$$

График данной функции представлен на рисунке 2.4 для расстояния от вершины трещины, составляющем 20% ее длины, при исходном напряжении 1,6 МПа (материал мрамор).

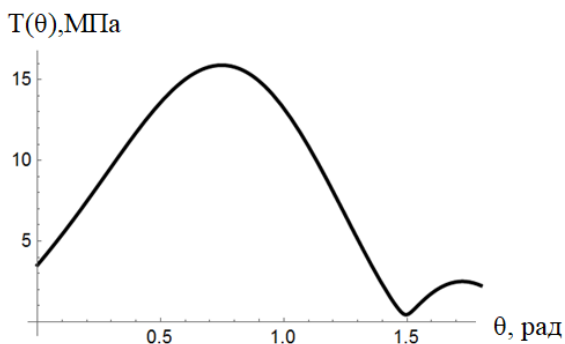


Рисунок 2.4 – Кривая интенсивности напряжений

По графику видно, что интенсивность напряжений принимает максимальное значение не при $\theta = 0$, а при значении $\theta = \pi/4$. Этот же

результат наблюдается для композиционных материалов с металлической матрицей, полученный в условиях эксперимента [12].

Зависимость от угла θ среднего напряжения для случая плоской деформации в полярной системе координат может быть найдена следующим образом:

$$\sigma_{cp}(\theta) = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2}.$$

Зависимость максимального напряжения в полярной системе координат от угла θ :

$$\sigma_{max}(\theta) = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}.$$

На рисунке 2.5 представлен график для расстояния от вершины трещины, составляющем 20% ее длины, при исходном напряжении 1,6 МПа (материал мрамор).

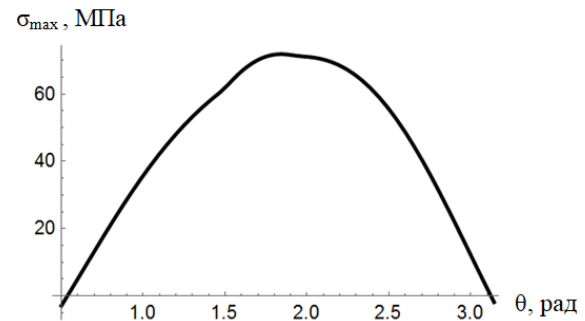


Рисунок 2.5 – Кривая максимального напряжения

Проанализировав график, можно сделать вывод, что наибольшее значение функции σ_{max} достигается при $\theta = 1,96$ (рад), что согласуется с найденным первоначальным направлением роста трещины, описанным выше.

Полученные результаты позволяют дополнить анализ напряженно-деформированного состояния в привершинной окрестности и анализ прочности материала в условии плоской деформации.

Описанный в работе подход основан на предположении о том, что критическое состояние материала наступает тогда, когда наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии. В рассмотренной задаче наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигает максимального значения при θ , таком же, какое соответствует наибольшему значению кривой максимального напряжения, представленной на рисунке 2.5.

Заключение

В работе приведена методика определения первоначального направления развития прямолинейной трещины в пластине для случая плоской деформации. Рассматривается случай нормального отрыва. Значения радиальных углов

начального роста трещины найдены с помощью критерия максимального тангенциального напряжения.

На основании проведенного исследования нагружения пластины с прямолинейной центральной трещиной можно заключить, что моделирование и прогнозирование ее первоначального направления роста позволяет дополнить комплексный анализ основных характеристик процесса разрушения твердого тела, содержащего дефект. Перспективным направлением дальнейшего исследования является учет влияния перераспределения напряженного деформированного состояния в окрестности вершины трещины в упругом, упругопластическом материале и его влияние на методику нахождения направления дальнейшего подрастания трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов, В.В.* К основам теории равновесных трещин в хрупких телах // В.В. Новожилов. – ПММ, 1969. – Т. 33, № 5. – С. 797–812.
2. *Левин, В.А.* Избранные нелинейные задачи механики разрушения / В.А. Левин, Е.М. Морозов, Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2004. – 408 с.
3. *Партон, В.З.* Упругопластическая механика разрушения / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Наука, 1985. – 503 с.
4. *Степанова, Л.В.* Оценка направления роста трещины в условиях смешанного нагружения (нормальный отрыв и поперечный сдвиг) / Л.В. Степанова, С.А. Бронников, О.Н. Белова // Вестник ПНИПУ. – 2017. – № 4. – С. 189–213.
5. *Матвиенко, Ю.Г.* Моделирование кинетики развития трещин в поверхностных слоях материала / Ю.Г. Матвиенко // Заводская лаборатория. – 2017. – Т. 83, № 1. – С. 65–71.
6. *Berto, F.* A review of the local strain energy density approach to V-notches / F. Berto, M.R. Ayatollahi // Physical mesomechanics. – 2017. – Vol. 20, № 2. – P. 14–27.
7. *Matvienko, Y.G.* Two basic approaches in a search of the crack propagation angle / Y.G. Matvienko, E.M. Morozov // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 2017. – Vol. 40, № 8. – P. 1191–1200.
8. *Ayatollahi, M.R.* On the Use of Brazilian Disc Specimen for calculating Mixed Mode I-II Fracture Toughness of Rock Materials / M.R. Ayatollahi, M.R.M. Aliha // Engineering Fracture Mechanics. – 2008. – Vol. 75, № 16. – P. 4631–4641.
9. *Гундина, М.А.* Локальный критерий начального направления роста трещины / М.А. Гундина // VI Машеровские чтения: материалы МНПК 27–28 сентября 2012 г., Витебск, 2012. – С. 58–59.
10. *Timoshenko, S.P.* Theory of Elasticity / S.P. Timoshenko, J.N. Goodier. – NY: McGraw-Hill. – 1970. – P. 100–209.
11. *Астафьев, В.И.* Нелинейная механика разрушения / В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. – Самара: Самарский университет, 2001. – 562 с.
12. *Sun, C.T.* Fatigue crack growth and retardation due to overloads in metal-matrix composites / C.T. Sun, J.F. Doyle, S. Rizzi // Fatigue Crack Growth in Boron-Aluminum Metal-Matrix Composites. – 1986. – 122 p.

Поступила в редакцию 08.10.18.