

УДК 539.3

## ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

А.С. Зеленая

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

### CYLINDRICAL BENDING OF ELASTOPLASTIC RECTANGULAR THREE-LAYER PLATE WITH COMPRESSIBLE FILLER IN TEMPERATURE FIELD

A.S. Zelenaya

*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Исследован цилиндрический изгиб несимметричных по толщине упругопластических трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем при действии термосиловых нагрузок. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом наполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. Получена система уравнений равновесия и ее аналитическое решение в перемещениях. Проведена численная реализация решения для трехслойной металлополимерной пластины.

**Ключевые слова:** термопластичность, трехслойная прямоугольная пластина, цилиндрический изгиб.

Cylindrical bending of asymmetrical in thickness elastic-thermoplastic three-layer plates with a compressible filler under the action of loads and temperature was investigated. The kinematic hypotheses are based on the hypothesis of a broken line: the Kirchhoff hypotheses are accepted for the outer layers, the deformed normal remains rectilinear in a rigid compressible filler. A system of equilibrium equations and its analytical solution in displacements are obtained. Numerical realization of solutions for a three-layer metal-polymer plate is carried out.

**Keywords:** thermoplasticity, three-layered rectangular plate, cylindrical bending.

#### Введение

Постепенное повышение требований по прочности и весу, которые предъявляются к современным конструкциям, способствуют широкому распространению многослойных конструкций, частным случаем которых являются трехслойные элементы конструкций. В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции удовлетворяют этим требованиям с точки зрения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. В связи с этим возникает необходимость разработки новых и уточнения уже существующих методов их расчета.

В работах [1]–[3] рассмотрены колебания стержней, пластин и оболочек под действием различных нагрузок. Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками исследовано в статье [4]. В [5] рассмотрен термоупругий изгиб упругой кольцевой трехслойной пластины на упругом основании. Упругопластический изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем рассмотрен в [6].

Здесь рассматривается цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем под действием термосиловых нагрузок, получены

уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, проведен численный анализ решения.

#### 1 Постановка краевой задачи

Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная прямоугольная пластина, состоящая из двух несущих слоев и сжимаемого наполнителя. Постановка задачи дается в прямоугольной системе координат, связанной со срединной плоскостью наполнителя (рисунок 1.1). Предполагается пластину вытянутой вдоль оси  $x$ .

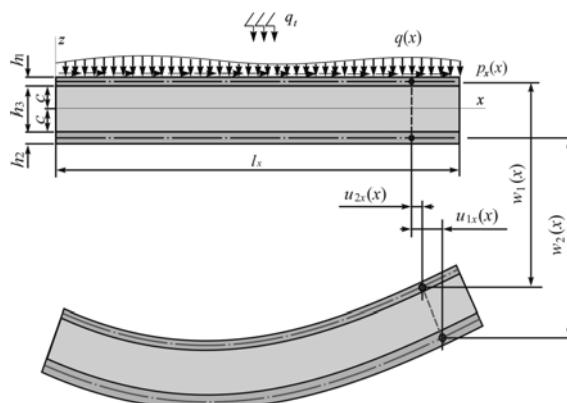


Рисунок 1.1 – Расчетная схема пластины

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком наполнителе

справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты  $z$ . На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Допустим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешние распределенные нагрузки  $q(x)$ ,  $p_x(x)$  и тепловой поток интенсивностью  $q_t$ , направленный перпендикулярно первому несущему слою.

Ранее в [7] были получены уравнения равновесия в усилиях упругопластической пластины. Полагая в этой системе уравнений равновесия параметры с нижним индексом  $u$  и производные по  $u$  равными нулю, получим уравнения равновесия в усилиях, описывающих цилиндрический изгиб рассматриваемой пластины:

$$\begin{aligned} H_{1x}^0 - P_{1x}^0 &= p_x + H_{1x}^\omega - P_{1x}^{\omega}, \\ H_{1x}^0 + P_{2x}^0 &= H_{1x}^\omega + P_{2x}^{\omega}, \\ S_{1x}^0 + H_2^0 - T_{1x}^0 &= \\ &= q + \frac{p_x h_1}{2} + \frac{p_y h_1}{2} + S_{1x}^{\omega} + H_2^\omega - T_{1x}^{\omega}, \\ S_{2x}^0 - H_2^0 - T_{2x}^0 &= S_{2x}^{\omega} - H_2^\omega - T_{2x}^{\omega}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Краевая задача замыкается добавлением соответствующих граничных условий при  $x = 0, l_x$ :

$$\begin{aligned} P_{1x}^{0(n)} &= N_{rx}^{(1)} + P_{1x}^{\omega(n-1)}, \\ P_{2x}^{0(n)} &= N_{rx}^{(2)} + P_{2x}^{\omega(n-1)}, \\ T_{1x}^{0(n)} - S_{1x}^{\omega(n)} &= Q_{rx}^{(1)} + (T_{1x}^{\omega(n-1)} - S_{1x}^{\omega(n-1)}), \\ T_{2x}^{0(n)} - S_{2x}^{\omega(n)} &= Q_{rx}^{(1)} + (T_{2x}^{\omega(n-1)} - S_{2x}^{\omega(n-1)}), \\ S_{1x}^{\omega(n)} &= M_{rx}^{(1)} + S_{1x}^{\omega(n-1)}, \\ S_{2x}^{\omega(n)} &= M_{rx}^{(2)} + S_{2x}^{\omega(n-1)}. \end{aligned}$$

Здесь  $N_{rx}^{(1)}$ ,  $N_{rx}^{(2)}$ ,  $Q_{rx}^{(1)}$ ,  $Q_{rx}^{(2)}$ ,  $M_{rx}^{(1)}$ ,  $M_{rx}^{(2)}$  – заданные усилия на торце пластины в первом и во втором несущих слоях; индекс  $r$  принимает значения  $0, l_x$ .

Для термопластической пластины используем соотношения закона Гука в девiatorно-сферической форме, которые в температурном поле принимают вид

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \left(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)\right) \varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} \Delta T_k) \quad (1.2) \\ &(i, j = x, z, k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Здесь  $s_{ij}^{(k)}$ ,  $\sigma^{(k)}$  – девiatorная и сферическая части тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – девiatorная и сферическая части тензора деформаций;  $\varepsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформации в  $k$ -м слое;  $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$  –

функции пластичности Ильюшина в несущих слоях, которые в случае  $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_r^{(k)} \omega^{(k)}(T_k)$  равны нулю;  $\varepsilon_r^{(k)}(T_k)$  – предел текучести материала;  $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, T_k)$  – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя, равная нулю при  $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}(T_k)$ ;  $\varepsilon_s^{(3)}(T_k)$  – предел физической нелинейности заполнителя;  $G_k(T_k)$ ,  $K_k(T_k)$  – температурно-зависимые модули упругости материалов слоев;  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного удлинения;  $\Delta T_k$  – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения  $T_0$ .

Подставим в уравнения равновесия (1.1) выражения линейных и нелинейных составляющих внутренних усилий через искомые функции  $u_{1x}$ ,  $u_{1y}$ ,  $u_{2x}$ ,  $u_{2y}$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  с применением (1.2). Учитываем, что температура изменяется только по толщине пластины  $T_k = T_k(z)$  и поле стационарно. Получим уравнения равновесия в перемещениях при цилиндрическом изгибе прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.

Как и ранее в [6] для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений применим метод «упругих» решений Ильюшина [8]. Данный метод позволяет сводить краевую задачу последовательно на каждом шаге приближения к соответствующей линейной задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

Получим уравнения равновесия в перемещениях при цилиндрическом изгибе упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле в итерационном виде:

$$\begin{aligned} a_1 u_{1x}^n - a_1 u_{2x}^n - a_4 u_{1x}^n - a_5 u_{2x}^n + a_2 w_1^n + \\ + a_3 w_2^n - 2a_6 w_1^n + a_7 w_2^n = p_x + p_\omega^{n-1}, \\ -a_1 u_{1x}^n + a_1 u_{2x}^n - a_5 u_{1x}^n - a_9 u_{2x}^n - a_{10} w_1^n - \\ - a_{17} w_2^n - a_6 w_1^n + 2a_7 w_2^n = s_\omega^{n-1}, \\ -a_2 u_{1x}^n + a_{10} u_{2x}^n + 2a_6 u_{1x}^n + \\ + a_6 u_{2x}^n + a_{11} w_1^n - a_{12} w_2^n + \\ + a_{15} w_1^n - a_{16} w_2^n + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = \\ = q + \frac{p_x h_1}{2} + q_\omega^{n-1}, \\ -a_3 u_{1x}^n + a_{17} u_{2x}^n - a_7 u_{1x}^n - \\ - 2a_7 u_{2x}^n - a_{12} w_1^n + a_{14} w_2^n - \\ - a_{16} w_1^n + a_{13} w_2^n - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_\omega^{n-1}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $a_1, \dots, a_{28}$  – коэффициенты, учитывающие температурное изменение параметров упругости материалов по толщине пластины;  $n$  – номер приближения.

Следует отметить, что система (1.3) совпадает по виду с соответствующей системой уравнений равновесия трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем [9].

Слагаемые с индексом « $\omega$ » включают все нелинейные и температурные добавки.

$$\begin{aligned} P_{\omega}^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} - P_{1x}^{\omega(n-1)}, \\ S_{\omega}^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} + P_{2x}^{\omega(n-1)}, \\ q_{\omega}^{n-1} &= S_{2x}^{\omega(n-1)} + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)}, \\ g_{\omega}^{n-1} &= S_{2x}^{\omega(n-1)} - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2x}^{\omega(n-1)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

или через напряжения

$$\begin{aligned} P_{\omega}^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} - P_{1x}^{\omega(n-1)}, \\ &= \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} - \left[ \frac{N_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_{xx}^{(1)\omega(n-1)} \right], \\ &= \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} dz - \left[ \frac{1}{2} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} z dz + \int_{h_1} \sigma_{xx}^{(1)\omega(n-1)} dz \right], \\ S_{\omega}^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} + P_{2x}^{\omega(n-1)}, \\ &= \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + \left[ \frac{N_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_{xx}^{(2)\omega(n-1)} \right], \\ &= \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} dz + \left[ \frac{1}{2} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} z dz + \int_{h_2} \sigma_{xx}^{(2)\omega(n-1)} dz \right], \\ q_{\omega}^{n-1} &= S_{1x}^{\omega(n-1)} + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)} + H_2^{\omega(n-1)} = \\ &= \left[ \left( c + \frac{h_1}{2} \right) N_{xx}^{(1)\omega(n-1)} - M_{xx}^{(1)\omega(n-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_1}{4} N_{xx}^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4c} M_{xx}^{(3)\omega(n-1)} \right] + \\ &\quad + \frac{N_{zz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} - \left[ \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} \right], \\ &\quad + \frac{N_{zz}^{(3)t(n-1)}}{2c} = \left[ \left( c + \frac{h_1}{2} \right) \int_{h_1} \sigma_{xx}^{(1)\omega(n-1)} dz - \int_{h_1} \sigma_{xx}^{(1)t(n-1)} z dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_1}{4} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} dz + \frac{h_1}{4c} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} z dz \right] - \\ &\quad - \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{h_1}{4c} \right) \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} dz + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} z dz \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)\omega(n-1)} dz + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)t(n-1)} dz, \\ g_{\omega}^{n-1} &= S_{2x}^{\omega(n-1)} - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2x}^{\omega(n-1)} - H_2^{\omega(n-1)} = \\ &= \left[ - \left( c + \frac{h_2}{2} \right) N_{xx}^{(2)\omega(n-1)} - M_{xx}^{(2)\omega(n-1)} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad - \frac{h_2}{4} N_{xx}^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_2}{4c} M_{xx}^{(3)\omega(n-1)} \left. \right] - \frac{N_{zz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} - \\ &\quad - \left[ \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} \right] - \frac{N_{zz}^{(3)t(n-1)}}{2c} = \\ &= \left[ - \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \int_{h_2} \sigma_{xx}^{(2)\omega(n-1)} dz - \int_{h_2} \sigma_{xx}^{(2)t(n-1)} z dz - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h_2}{4} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} dz + \frac{h_2}{4c} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} z dz \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)\omega(n-1)} dz - \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{h_2}{4c} \right) \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} z dz \right] - \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)t(n-1)} dz. \end{aligned}$$

Примем кинематические условия свободно-го опирания рассматриваемой термоупругопластической пластины по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие граничные условия в перемещениях при  $x = 0, l_x$  имеют вид ( $k = 1, 2$ ):

$$u_{kx}^n = w_k^n = v_k^n = 0. \quad (1.5)$$

Решение системы дифференциальных уравнений предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям опирания на жесткие опоры (1.5):

$$\begin{aligned} u_{1x} &= \sum_{p=0}^{\infty} U_{1xp}^n \cos \frac{\pi p x}{l_x}, \\ u_{2x} &= \sum_{p=0}^{\infty} U_{2xp}^n \cos \frac{\pi p x}{l_x}, \\ w_1 &= \sum_{p=0}^{\infty} W_{1p}^n \sin \frac{\pi p x}{l_x}, \\ w_2 &= \sum_{p=0}^{\infty} W_{2p}^n \sin \frac{\pi p x}{l_x}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $U_{1xp}^n, U_{2xp}^n, W_{1p}^n, W_{2p}^n$  – неизвестные амплитуды перемещений на  $n$ -м шаге.

Поперечную и дополнительную «внешнюю» нагрузку (1.4) в слоях пластины представим в виде разложения в следующие тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{p=0}^{\infty} q_p \sin \frac{\pi p x}{l_x}, \\ q_{pm} &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} q(x) \sin \frac{\pi p x}{l_x} dx, \\ P_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p=0}^{\infty} P_{\omega p}^{n-1} \cos \frac{\pi p x}{l_x}, \\ P_{\omega p}^{n-1} &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} P_{\omega}^{n-1}(x) \sin \frac{\pi p x}{l_x} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p=0}^{\infty} s_{\omega p}^{n-1} \cos \frac{\pi p x}{l_x}, \\
 s_{\omega p}^{n-1} &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} s_{\omega}^{n-1}(x) \sin \frac{\pi p x}{l_x} dx, \\
 q_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p=0}^{\infty} q_{\omega p}^{n-1} \sin \frac{\pi p x}{l_x}, \\
 q_{\omega p}^{n-1} &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} q_{\omega}^{n-1}(x) \sin \frac{\pi p x}{l_x} dx, \\
 g_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p=0}^{\infty} g_{\omega p}^{n-1} \sin \frac{\pi p x}{l_x}, \\
 g_{\omega p}^{n-1} &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} g_{\omega}^{n-1}(x) \sin \frac{\pi p x}{l_x} dx. \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

После подстановки перемещений (1.6), нагрузок и дополнительных усилий (1.7) в систему (1.3) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений  $U_{1xp}^n, U_{2xp}^n, W_{1p}^n, W_{2p}^n$ :

$$\begin{aligned}
 b_1 U_{1xp}^n + b_2 U_{2xp}^n + b_3 W_{1p}^n + b_4 W_{2p}^n &= p_{\omega p}^{n-1}, \\
 b_2 U_{1xp}^n + b_5 U_{2xp}^n + b_6 W_{1p}^n + b_7 W_{2p}^n &= s_{\omega p}^{n-1}, \\
 b_3 U_{1xp}^n + b_8 U_{2xp}^n + b_8 W_{1p}^n + b_5 W_{2p}^n &= q_p + q_{\omega p}^{n-1}, \\
 b_4 U_{1xp}^n + b_7 U_{2xp}^n + b_9 W_{1p}^n + b_{10} W_{2p}^n &= g_{\omega p}^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $b_i$  выражаются через величины  $a_i$  и зависят от температуры, параметров  $p$  и  $m$  и вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= a_1 + a_4 \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^2, \quad b_2 = -a_1 + a_5 \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^2, \\
 b_3 &= a_2 \left( \frac{\pi p}{l_x} \right) + 2a_6 \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^3, \\
 b_4 &= a_3 \left( \frac{\pi p}{l_x} \right) - a_7 \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^3, \\
 b_5 &= a_1 + a_9 \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^2, \\
 b_6 &= -a_{10} \left( \frac{\pi p}{l_x} \right) + a_6 \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^3, \\
 b_7 &= -a_{17} \left( \frac{\pi p}{l_x} \right) - 2a_7 \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^3, \\
 b_8 &= a_8 - a_{11} \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^2 + a_{15} \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^4, \\
 b_9 &= -a_8 + a_{12} \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^2 - a_{16} \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^4, \\
 b_{10} &= a_8 - a_{14} \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^2 + a_{13} \left( \frac{\pi p}{l_x} \right)^4.
 \end{aligned}$$

## 2 Численные расчеты

Численные расчеты проводились для трехслойной пластины, пакет которой составлен из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, толщины слоев  $h_1 = 0,04$  м,  $h_2 = 0,02$  м,  $h_3 = 0,2$  м. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью  $q = -12$  МПа, размеры пластины  $l_x = 1$  м. Нагрузка подбиралась таким образом, чтобы максимальные интенсивности деформаций не превышали трех пределов для несущих слоев и пяти пределов для заполнителя, следовательно, при данной нагрузке деформации остаются в рамках теории малых упругопластических деформаций.

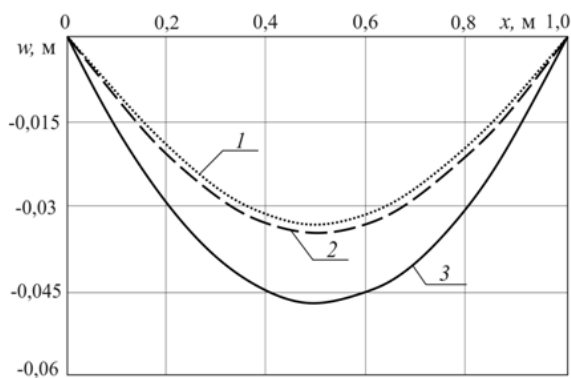
При определении влияния температуры на упругие характеристики материала несущих слоев принималась формула Белла. Принимаем, что для рассматриваемой пластины теплотой, ушедшей на нагревание внешнего металлического слоя, пренебрегаем, так как слой достаточно тонкий и обладает малой теплоемкостью. Температура этого слоя принимается равной температуре заполнителя в месте склейке, т. е.  $T_1 = T_3(c, t)$ . Вся теплота, воспринимаемая пластиной за время  $t$ , идет на нагревание заполнителя. Температура второго несущего слоя также не изменяется по толщине и принимается равной температуре заполнителя в месте их склейки  $T_2 = T_3(-c, t)$ . Численные исследования проводились при интенсивности теплового потока  $q_t = 5000$  Дж/(м<sup>2</sup>·с).

Рассмотрим влияние температуры на прогибы и продольные перемещения в несущих слоях, которые представлены на рисунке 2.1 а), б). Здесь и далее 1 – упругая пластина, 2 – термоупругая, 3 – термоупругопластическая.

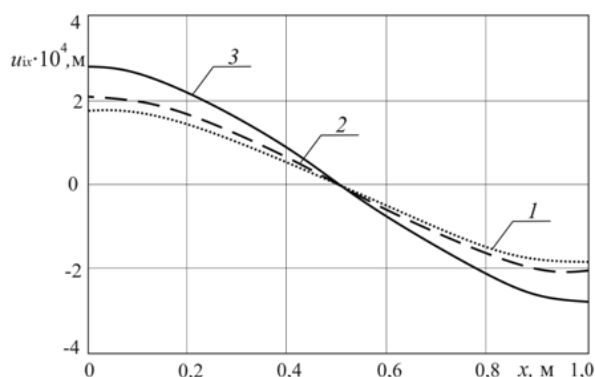
Отличие цилиндрического прогиба первого слоя упругой пластины от термоупругой составляет 5,7%. Отличие прогиба термопластической пластины от упругой – 31%, от термоупругой – 27%. Следовательно, воздействие температуры приводит к увеличению прогиба.

Увеличение продольных перемещений аналогично, отличие упругих перемещений от термоупругих составляет 4,5%, для термоупругопластических перемещений – 27% по сравнению с упругими.

На рисунке 2.2 показано изменение относительной поперечной деформации  $\epsilon_{zz}$  (график в процентах) вдоль оси  $x$  ( $y = 0,5 l_y$ ). Кривая везде отрицательна, что указывает на обжатие заполнителя, максимум достигается посередине пластины. Отличие обжатия термоупругой пластины от упругой составляет 30%, термоупругопластической от упругой – 78%.



а)



б)

Рисунок 2.1 – Перемещения в пластине при изгибе

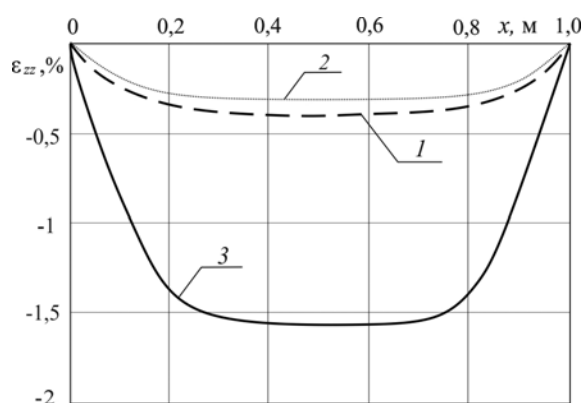


Рисунок 2.2 – Деформации обжатия в наполнителе

### Заключение

Полученное в работе решение можно использовать для исследования цилиндрического изгиба термоупругопластической трёхслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем при действии температурных и силовых нагрузок.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Леоненко, Д.В. Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Д.В. Леоненко // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.
2. Starovoitov, É.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / É.I. Starovoitov, A.V. Yarovaia, D.V. Leonenko // *Strength of materials*. – 2003. – Vol. 35, № 4. – P. 346–352.
3. Леоненко, Д.В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических

оболочек / Д.В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2010. – № 3 (12). – С. 53–56.

4. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

5. Starovoitov, É.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.

6. Леоненко, Д.В. Упругопластический изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Д.В. Леоненко, А.С. Зеленая // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб.* – Минск: БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С. 65–71.

7. Леоненко, Д.В. Напряженно-деформированное состояние физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / Д.В. Леоненко, А.С. Зеленая // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2018. – № 2 (43). – С. 77–82.

8. Ильюшин, А.А. Упругопластические деформации полых цилиндров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 224 с.

9. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании [монография] / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2006. – 379 с.

Поступила в редакцию 30.10.18.