Проблемы физики, математики и техники, № 1 (38), 2019

УДК 621.391:517

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАРКОВА – СТИЛТЬЕСА МЕР И СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А.Р. Миротин, И.С. Ковалёва

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE MARKOV – STIELTJES TRANSFORM OF MEASURES AND DISCRETE TIME SYSTEMS

A.R. Mirotin, I.S. Kovaliova

F. Scorina Gomel State University

Рассматривается класс фильтров (систем) с дискретным временем, частотные характеристики которых являются функциями типа Маркова – Стилтьеса. Анонсировано описание этих фильтров в терминах их системной функции и импульсной характеристики. В частности, отмечено, что этот класс содержит все фильтры с вполне монотонными импульсными характеристиками. Описаны свойства стационарности, каузальности, устойчивости и обратимости соответствующих систем.

Ключевые слова: *преобразование Маркова – Стилтьеса*, *фильтр*, *частотная характеристика*, *системная функция*, *стационарность*, *каузальность*, *устойчивая система*, *обратимая система*

A class of discrete time filters (systems) with frequency characteristics that are functions of Markov – Stieltjes type is considered. The description of these filters in terms of their system functions and impulse responses is announced. In particular, it is noted that this class contains all filters with completely monotonic impulse responses. The properties of stationarity, causality, stability and reversibility of the corresponding systems are described.

Keywords: *Markov – Stieltjes transform*, *filter*, *frequency characteristic*, *system function*, *stationary state*, *causality*, *stable system*, *invertible system.*

Введение

В работе рассматривается класс фильтров (систем) с дискретным временем (ДВ систем) с частотной характеристикой, являющейся функцией типа Маркова – Стилтьеса, то есть преобразованием Маркова – Стилтьеса некоторой ограниченной меры. Анонсировано описание этих фильтров в терминах их частотной характеристики (или, что равносильно, системной функции), а также в терминах их импульсной характеристики. В частности, отмечено, что этот класс содержит все фильтры с вполне монотонными импульсными характеристиками. Обсуждаются свойства стационарности, каузальности, устойчивости и обратимости соответствующих систем. В последнем случае указан обратный оператор. Большая часть результатов приведена без доказательства. Отсутствующие доказательства предполагается опубликовать в последующих работах авторов. Отметим, что ранее авторами были исследованы свойства преобразования Маркова – Стилтьеса функций в пространствах Харди $H^p(\mathbb{D})$ и Лебега $L^p(0,1)$ [1]–[4].

1 Свойства преобразования Маркова – Стилтьеса мер

Всюду далее через $M^b([0,1],\mathbb{C})$ $(M^b([0,1],\mathbb{R}))$ будем обозначать пространство всех ограниченных комплексных (соответственно, вещественных) мер на $[0,1]$, а через $M_+^b([0,1])$ – его подпространство, состоящее из положительных мер. Функция распределения меры μ обозначается $\mu(t)$.

***Определение* 1.1** [5, глава 6]. *Преобразованием Маркова – Стилтьеса меры* $\mu\in M^b([0,1],\mathbb{C})$ называется функция, задаваемая при $z\in\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$ соотношением

$$S\mu(z)=\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1-tz}. \tag{1.1}$$

При $z\in[1,+\infty)$ интеграл в правой части (1.1) понимается как предел

$$S\mu(z)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{[0,1]\cap\{|t-1/z|>\varepsilon}\frac{d\mu(t)}{1-tz}. \tag{1.2}$$

***Теорема* 1.1.** *Преобразование Маркова – Стилтьеса меры* $\mu\in M^b([0,1],\mathbb{C})$ *голоморфно в области* $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$, *а также существует п. в. на луче* $[1,+\infty)$.

***Следствие* 1.1.** *Пусть* $\mu\in M^b([0,1],\mathbb{C})$, $F=S\mu$. *Тогда*

1) $F\in H^p(\mathbb{D})$ *при всех* $p\in(0,1)$.

2) *Пусть* $p\in[1,\infty)$, $1/p+1/q=1$. *Если*

$$\int_0^1 d|\mu|(t)/(1-t)^{\varepsilon+1/q}<\infty$$

при некотором $\varepsilon\in(0,1/p)$, *то* $F\in H^p(\mathbb{D})$.

3) *Если* $\int_0^1 d|\mu|(t)/(1-t) < \infty$, *то* F *принадлежит диск-алгебре* $A(\overline{\mathbb{D}})$. *Если, к тому же,* $\mu > 0$, *то* F *не обращается в нуль на единичной окружности* $\mathbb{T}$.

2 Описание преобразований Маркова – Стилтьеса мер

Этот раздел носит вспомогательный характер. В нем содержится описание функций, представимых в виде (1.1), для комплексных и положительных мер, которое нам понадобится ниже.

***Лемма* 2.1.** *Для функции* $F(z)$ *следующие утверждения равносильны*:

1) *Функция* $F(z)$ *аналитична в* $\mathbb{D}$,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

и существует положительная константа с такая, что для любых комплексных чисел λ_i *и любого натурального m*

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \lambda_k a_k\right| \le c \max\left\{\left|\sum_{k=0}^{m} \lambda_k t^k\right| : t \in [0,1]\right\}. \quad (2.1)$$

2) *Существует мера* $\mu \in M^b([0,1],\mathbb{C})$ *такая, что* $\|\mu\| \le c$ *и* $F = S\mu$.

Напомним [6], что функция g относится к классу $R[a,b]$, если она голоморфна в открытой верхней полуплоскости, отображает эту полуплоскость в свое замыкание, а также голоморфна и положительна на $(-\infty, a)$ и голоморфна и отрицательна на (b,∞). При этом в силу [6, теорема П.6] эту функцию можно единственным образом представить в виде

$$g(z) = \int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z},$$

где τ – ограниченная положительная регулярная борелевская мера, сосредоточенная на отрезке $[a,b]$ («представляющая мера»).

***Лемма* 2.2.** *Функция* F *имеет вид* $S\mu$ *для некоторой меры* $\mu \in M_+^b([0,1])$ *если и только если выполнены следующие условия*:

1) F *голоморфна в* $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$ *и положительна на интервале* $(-\infty,1)$,

2) *функция* $\zeta F(\zeta)$ *отображает открытую нижнюю полуплоскость в свое замыкание.*

3 Системы с моментными импульсными характеристиками

Далее мы пользуемся терминологией теории обработки сигналов, применяемой в [7, с. 153–159] и [8]. В частности, ниже *фильтр* Φ – это оператор $f \mapsto \Phi f$. Далее будет рассматриваться лишь случай дискретного времени (ДВ сигналы).

Фильтр Φ будем называть *стационарным*, если:

1) Φ – линейный ограниченный оператор в $\ell^2(\mathbb{Z})$;

2) Φ является инвариантным по времени, т. е. перестановочен со сдвигом:

$$\Phi(D^s f) = D^s(\Phi f)$$

для каждого момента s и каждого сигнала f, где $D^s f(n) = f(n-s)$ – оператор сдвига.

Фильтр Φ будем называть *каузальным*, если отсутствие входного сигнала до момента $s \in \mathbb{Z}$, т. е. $f(t) = 0$ для $t < s$, влечет отсутствие выходного сигнала: $(\Phi f)(t) = 0$ для $t < s$. Для инвариантного по времени фильтра это равносильно выполнению последнего условия при $s = 0$.

Фильтр Φ будем называть *устойчивым*, если он переводит ограниченные сигналы в ограниченные.

Фильтр Φ будем называть *обратимым*, если соответствующий ему линейный оператор имеет ограниченный обратный.

Последовательность $W = \Phi\delta_0$, где

$$\delta_n := (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{Z}},$$

будем называть *импульсной характеристикой фильтра* Φ, её обратное (дискретное) преобразование Фурье $\varphi = \mathcal{F}^{-1}W$ – *частотной характеристикой фильтра* Φ, а норму $\|\varphi\|_{L^\infty}$ – его *амплитудным искажением* (через $\mathcal{F}$ мы обозначаем преобразование Фурье на окружности $\mathbb{T}$).

Известно (лемма Винера), что каждый стационарный фильтр есть в точности оператор свертки с последовательностью W, т. е. имеет вид

$$\Phi_W f = f * W = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)W(n-k)\right)_{n\in\mathbb{Z}},$$

причем функция $\varphi = \mathcal{F}^{-1}W$ принадлежит $L^\infty(\mathbb{T})$. При этом для каузальности этого фильтра необходимо и достаточно выполнение условия $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$, т. е. условия $W(n) = 0$ при $n < 0$ (см., например, [7, леммы 7.2.1, 7.2.3]).

Ниже будет рассмотрен случай, когда импульсная характеристика $(W(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ есть последовательность $\left(\int_0^1 t^n d\mu(t)\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ моментов некоторой меры μ (и, в частности, является вполне монотонной последовательностью). При этом возникают фильтры с частотной характеристикой $F(z)$ и системной функцией $F(1/z)$, где $F(z)$ – функция типа Маркова – Стилтьеса с представляющей мерой μ. Поскольку такие функции, как правило, допускают хорошие рациональные приближения (см., например, [9], [10]–[12]), рассмотренные ниже фильтры могут хорошо аппроксимироваться фильтрами с рациональными системными функциями, которые хорошо изучены (см., например, [8], [13]).

Отметим, что для меры $\mu \in M^b([0,1],\mathbb{C})$ при $|z|<1$

$$F(z) = S\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n, \text{ где } h(n) = \int_0^1 t^n d\mu(t).$$

Пусть $Dx(k) = x(k-1)$ – оператор сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$. Это унитарный оператор. Рассмотрим оператор

$$F(D) := \sum_{k=0}^{\infty} h(k)D^k,$$

определенный первоначально на финитных слева сигналах из $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Заметим, что на множестве плюс-сигналов (то есть на подпространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ пространства $\ell^2(\mathbb{Z})$) система $y = F(D)v$ допускает реализацию в виде следующей динамической системы:

$$\begin{cases} P_n(t) = tP_{n-1}(t) + v(n) \ (n \in \mathbb{N}),\ P_0(t) = v(0), \\ y(n) = \int_0^1 P_n(t)d\mu(t). \end{cases}$$

Отметим, что уравнение состояния этой системы не зависит от меры μ, т. е. от фильтра.

Для формулировки и доказательства следующей теоремы (в части вычисления обратного оператора) необходимы некоторые сведения о функциональном исчислении, построенном в [14]–[16].

Мы будем говорить, что (вообще говоря, замкнутый плотно определенный) оператор A в банаховом пространстве X принадлежит классу $V_1(X)$, если $[0,1) \subset \rho(A)$ и для некоторого $M > 0$ выполняется неравенство

$$\|R(t,A)\| \le \frac{M}{1-t},\ t \in [0,1).$$

Далее нам понадобится следующая

***Лемма* 3.1.** *Унитарные операторы в гильбертовом пространстве H принадлежат классу $V_1(H)$.*

Доказательство. В силу спектральной теоремы для унитарного оператора U в H имеем при $t \in [0,1)$

$$\|(tI-U)^{-1}x\|^2 = \int_{\{|\lambda|=1\}} \left|\frac{1}{t-\lambda}\right|^2 d\langle E(\lambda)x,x\rangle \le \frac{1}{(1-t)^2}\|x\|^2,$$

где $E(\lambda)$ – спектральное разложение оператора U, $x \in H$, угловые скобки обозначают скалярное произведение в H (см., например, [17, следствие X.2.8 (II)]). Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Будем говорить также, что функция g принадлежит классу R_1, если она принадлежит классу $R[0,1]$ (см. определение этого класса в разделе 2) и непрерывна в точке 1. Если g есть функция класса R_1 с представляющей мерой μ, $A \in V_1(X)$, то оператор $g(A)$ определяется формулой

$$g(A) = \int_0^1 R(t,A)d\mu(t).$$

Возникающее функциональное исчисление будем называть R_1*-исчислением*.

Положим $Q_1 = \{\varphi \mid \varphi = 1/g,\ g \in R_1\}$. Известно [16], что функция φ класса Q_1 имеет вид $\varphi(z) = \alpha + \beta z - f(z)$, где $f \in R_1$. В этом случае, при $A \in V_1(X)$, оператор $\varphi(A)$ с областью определения $D(A)$ определяется формулой $\varphi(A) = \alpha + \beta A - f(A)$, в которой $f(A)$ понимается в смысле R_1-исчисления. Возникающее функциональное исчисление будем называть Q_1*-исчислением*.

В [16] была показано (теорема обращения), что для любой функции $g \in R_1$ и любого $A \in V_1(X)$ оператор $g(A)$ имеет левый обратный, задаваемый формулой

$$g(A)^{-1} = \varphi(A),$$

где $\varphi = 1/g$ и правая часть понимается в смысле Q_1-исчисления. При этом с точки зрения применений этой теоремы важно отметить, что коэффициенты α и β, фигурирующие в представлении $\varphi(z) = \alpha + \beta z - f(z)$ функции $\varphi = 1/g$, могут быть вычислены по формулам

$$\beta = -\frac{1}{\mu([a,b])},\ \alpha = \frac{1}{\mu([a,b])^2}\int_a^b td\mu(t),$$

где μ – представляющая мера функции g, а представляющая мера функции *f* может быть найдена, например, с помощью формулы обращения для преобразования Стилтьеса [18] (см. [16]).

***Теорема* 3.2.** *Пусть $F(z) = S\mu(z)$. Если*

$$\int_0^1 \frac{d|\mu|(t)}{1-t} < \infty, \qquad (3.1)$$

то оператор $F(D)$ однозначно продолжается до стационарного, каузального и устойчивого фильтра с частотной характеристикой F и амплитудным искажением $\|F\|_{H^\infty}$; при этом $\|F(D)\| = \|h\|_{\ell^1}$ и

$$F(D) = \int_0^1 (I-tD)^{-1}d\mu(t), \qquad (3.2)$$

где интеграл Бохнера сходится по норме оператора.

При $\mu \ge 0$ условие (3.1) *является также и необходимым для наличия у оператора $F(D)$*

стационарного и каузального продолжения. Кроме того, в этом случае фильтр $F(D)$ *обратим, и его обратный имеет вид*

$$F(D)^{-1} = -\left(\frac{1}{F_1}\right)(D^{-1})D,$$

где F_1 *есть функция из* R_1 *с представляющей мерой* μ, *а* $(1/F_1)(D^{-1})$ *понимается в смысле* Q_1*-исчисления.*

Предыдущая теорема показывает, что фильтры вида $F(D)$ с положительной представляющей мерой обладают хорошими свойствами. Следующая теорема описывает эти фильтры в терминах их частотной характеристики (или, что равносильно, системной функции), а также в терминах их импульсной характеристики.

Следуя [13], Z-преобразование

$$\tilde{H}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(n) z^{-n}$$

будем называть *системной функцией* стационарного фильтра $\Phi = \Phi_W$.

Пусть $\Delta := I - D^{-1}$. Рассмотрим итерированные разностные операторы

$$\Delta^n W(k) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j W(j+k) \quad (k, n \in \mathbb{Z}_+).$$

***Теорема* 3.3.** *Пусть* Φ *есть стационарный и каузальный фильтр с системной функцией* $\tilde{H}$ *и импульсной характеристикой* W. *Следующие утверждения равносильны*:

1) Φ *имеет вид* $F(D)$, *где* $F = S\mu$, $\mu \in M_+^b([0,1])$;

2) *функция* $\tilde{H}(1/z)$ *удовлетворяет условиям леммы* 2.2;

3) $\Delta^n W(k) \geq 0 \quad (k, n \in \mathbb{Z}_+)$, *т. е. последовательность* W *вполне монотонна*.

При этом $F(z) = \tilde{H}(1/z)$, *а* W *– последовательность моментов меры* μ.

***Теорема* 3.4**. *Стационарный и каузальный фильтр* Φ *с системной функцией* $\tilde{H}$ *имеет вид* $F(D)$, *где* $F = S\mu, \mu \in M^b([0,1],\mathbb{C})$, *тогда и только тогда*, *когда функция* $\tilde{H}(1/z)$ *удовлетворяет условиям леммы* 2.1. *При этом* $F(z) = \tilde{H}(1/z)$.

Доказательство. Мы используем обозначения, введенные выше.

Необходимость. Пусть стационарный и каузальный фильтр Φ с системной функцией $\tilde{H}$ имеет вид $F(D)$, где $F = S\mu, \mu \in M^b([0,1],\mathbb{C})$. Тогда по лемме Винера $\Phi f = W * f$. С другой стороны, как было отмечено выше, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^n$, где $h(n) = \int_0^1 t^n d\mu(t)$. Далее мы считаем, что $h(n) = 0$ при $n < 0$. При этом

$$\Phi f(n) = F(D) f(n) := \sum_{n=0}^{\infty} h(n) f(n-k) = h * f(n).$$

Значит, $W = h$, а потому

$$\tilde{H}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} W(n)\zeta^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\left(\frac{1}{\zeta}\right)^n = F\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Таким образом, $\tilde{H}(1/z) = F(z) = S\mu$, и функция $\tilde{H}(1/z)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1.

Достаточность. Пусть стационарный каузальный фильтр Φ таков, что $\tilde{H}(1/z)$ удовлетворят условиям леммы 2.1. Тогда $\tilde{H}(1/z) = S\mu(z)$, где $\mu \in M^b([0,1],\mathbb{C})$, $z \in D$. Отсюда в силу определения $\tilde{H}$ следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} W(n)\left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^n.$$

Поэтому $W = h$, что при всех f влечет равенство $\Phi f = W * f = h * f = F(D) f$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалева*, *И.С.* Теорема о свертке для преобразования Маркова – Стилтьеса / И.С. Ковалева, А.Р. Миротин // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 66–70.

2. *Mirotin*, *A.R.* The Markov – Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces / A.R. Mirotin, I.S. Kovalyova // Integral Transforms and Special Functions. – 2016. – Vol. 27, № 12. – P. 995–1007.

3. *Mirotin*, *A.R.* Corrigendum to our paper “The Markov-Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces” / A.R. Mirotin, I.S. Kovalyova // Integral Transforms and Special Functions. – 2017. – Vol. 28, № 5. – P. 421–422.

4. *Ковалева*, *И.С.* Обобщенный оператор Маркова – Стилтьеса в пространствах Харди и Лебега / И.С. Ковалева, А.Р. Миротин // Труды института математики. – 2017. – Т. 25, № 1. – С. 39–50.

5. *Миротин*, *А.Р.* Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А.Р. Миротин. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.

6. *Крейн*, *М.Г.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1973. – 552 с.

7. *Nikolski*, *N.K.* Operators, Functions and System: in 2 Vol. / N.K. Nikolski; translated by A. Hartman. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2002. – Vol. 1: Hardy, Hankel, and Toeplitz. – 461 p. – (Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 92).

8. *Сиберт*, *У.М.* Цепи и сигналы системы: в 2 частях. Ч. 2. / У.М. Сиберт; пер. с англ.; под ред. И.С. Рыжака. – М.: Мир, 1988.

9. *Вячеславов*, *Н.С.* Рациональные приближения функций типа Маркова – Стилтьеса в пространствах Харди $H^p, 0 < p \le \infty$ / Н.С. Вячеславов, Е.П. Мочалина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2008. – № 4. – С. 3–13.

10. *Andersson*, *J.-E.* Rational approximation to function like x^α in integral norms / J.-E. Andersson // Analysis Math. – 1988. – Vol. 14, № 1. – P. 11–25.

11. *Andersson*, *J.-E.* Best rational approximation to Markov functions / J.-E. Andersson // J. of Approximation Theory. – 1994. – Vol. 76, № 2. – P. 219–232.

12. *Пекарский*, *А.А.* Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова / А.А. Пекарский // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7. – С. 121–132.

13. *Papoulis*, *A.* Signal analysis / A. Papoulis. – NY: McGrow Hill, 1977. – 431 p.

14. *Миротин*, *А.Р.* О некоторых свойствах функционального исчисления замкнутых операторов в банаховом пространстве / А.Р. Миротин, А.А. Атвиновский // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 63–67.

15. *Атвиновский*, *А.А.* Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. II / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2015. – № 5. – С. 3–16.

16. *Атвиновский*, *А.А.* Обращение одного класса операторов в банаховом пространстве и некоторые его применения / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 55–60.

17. *Данфорд*, *Н.* Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – М.: Мир, 1966. – 1063 с.

18. *Widder*, *D.V.* The Laplace transform / D.V. Widder. – N.J.: Princeton Univ. Press, 1946. – 412 p.

19. *Ахиезер*, *Н.И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н.И. Ахиезер. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 310 с.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь, № 20160825, *а также при поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь для студентов и аспирантов*, № 20180641.

Поступила в редакцию 05.11.18.