Проблемы физики, математики и техники, № 1 (38), 2019

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

А.А. Трофимук, Е.В. Зубей

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE PERMUTABILITY OF A SYLOW SUBGROUP WITH SCHMIDT SUBGROUPS OF ODD ORDER

A.A. Trofimuk, E.V. Zubei

F. Scorina Gomel State University

Группой Шмидта называется конечная ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. В работе устанавливаются неабелевы композиционные факторы группы, у которой некоторая силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка.

Ключевые слова: *конечная группа*, *разрешимая группа*, *подгруппа Шмидта*, *силовская подгруппа*, *перестановочные подгруппы.*

A finite non-nilpotent group G is called a Schmidt group if every proper subgroup of G is nilpotent. In this paper the non-abelian composition factors of a group in which a Sylow subgroup is permutable with Schmidt subgroups of odd order is determined.

Keywords: *finite group*, *solvable group*, *Schmidt subgroup*, *Sylow subgroup*, *permutable subgroups.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Добавлением к подгруппе A в группе G называется подгруппа B такая, что $G = AB$.

Хорошо известно [1], что 2-нильпотентная группа Шмидта четного порядка сверхразрешима, а 2-замкнутая – несверхразрешима. Если в группе нет подгрупп Шмидта четного порядка, то группа 2-разложима, см. [2, теоремы 2.1, 2.4], поэтому разрешима.

Для групп Шмидта нечетного порядка аналогичные утверждения не выполняются. Например, любая $\{3,5\}$-группа Шмидта, как 3-нильпотентная, так и 3-замкнутая, несверхразрешима. Если в группе отсутствуют подгруппы Шмидта нечетного порядка, то группа может быть неразрешимой. В.Н. Тютянов, П.В. Бычков [3] установили, что неабелевы композиционные факторы группы, у которой нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, принадлежат множеству

$$\Omega = \{PSL(2,2^n),\, n \ge 2;\, PSL(2,q),\, q = 2^k + 1;$$
$$PSU(4,2) \simeq PSp(4,3);$$
$$PSp(4,2^n),\, n \ge 2;\, Sz(2^{2n+1}),\, n \ge 1\}.$$

Группы, у которых силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта, исследовались в работах [4]–[7]. В работе [6] установлена r-разрешимость группы G для $r \ge 7$, у которой силовская r-подгруппа R перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из некоторого добавления к R в G. Для $r < 7$ перечислены все неабелевы композиционные факторы такой группы. В работе [7] доказана r-разрешимость группы G при условии, что нечетное r не является числом Ферма и силовская r-подгруппа R перестановочна с 2-нильпотентными (или 2-замкнутыми) подгруппами Шмидта четного порядка из некоторого добавления к R в G.

Вполне естественно изучить группы, у которых силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка. Доказана следующая

Теорема. *Если некоторая силовская p-подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка из G, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2,7)$ или группам из множества Ω.*

1 Вспомогательные результаты

Используемые обозначения и определения стандартны, их можно найти в [8], [9].

Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B. Через H^G обозначается наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая подгруппу H. Следуя [7], условимся называть $S_{<p,q>}$*-группой* группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и циклической силовской q-подгруппой.

***Лемма* 1.1** [3, следствие 2.1]. *Пусть G – группа без подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат множеству Ω.*

***Лемма* 1.2** [5]. *Если простая группа G является произведением p-подгруппы P и подгруппы Шмидта S, то справедливо одно из следующих утверждений*:

(1) $p=2$, $G \simeq PSL(2,7), P \simeq D_8, S \simeq [Z_7]Z_3$;

(2) $p=3$, $G \simeq SL(2,8), P \simeq Z_9, S \simeq [E_{2^3}]Z_7$;

(3) $p=5$, $G \simeq PSL(2,5), P \simeq Z_5$, $S \simeq A_4 \simeq [E_{2^2}]Z_3$.

Здесь через D_m, Z_m, E_{p^t} обозначаются диэдральная, циклическая группы порядка m и элементарная абелева группа порядка p^t соответственно. Знакопеременная группа степени n обозначается через A_n.

***Лемма* 1.3** [5, лемма 3]. *Если K и D – подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D – $S_{<p,q>}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами*:

(1) *L – p-замкнутая $\{p,q\}$-подгруппа*;

(2) *все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны*;

(3) *L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L=([P]Q)^L=Q^L$.*

***Лемма* 1.4** [10, лемма 4]. *Пусть подгруппа A группы G перестановочна с подгруппами $B_1, B_2, ..., B_n$. Тогда A перестановочна с подгруппой $<B_1, B_2, ..., B_n>$, порожденной ими.*

***Лемма* 1.5** [9]. *Пусть A и B – подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^g A$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.*

***Лемма* 1.6.** *Если некоторая силовская p-подгруппа P группы G перестановочна с каждой подгруппой Шмидта S из некоторого добавления B в G. Тогда P перестановочна с подгруппой S^g для любого $g \in G$.*

Доказательство. По условию леммы $G=PB$ и $S \leq B$. Пусть $g=ba$ – произвольный элемент из группы G, где $b \in B, a \in P$. Так как $S^b \leq B$, то $PS^b = S^b P$ и

$$PS^g = PS^{ba} = (PS^b)^a = (S^b P)^a = S^{ba} P = S^g P. \qquad \square$$

2 Доказательство теоремы

Обозначим силовскую p-подгруппу группы G из условия теоремы через P. Предположим, что теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Пусть в G нет подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда группа G удовлетворяет условию теоремы и по лемме 1.1 её неабелевы композиционные факторы принадлежат множеству Ω. Противоречие.

Значит, в группе G существует хотя бы одна подгруппа Шмидта нечетного порядка. Пусть N – собственная неединичная нормальная подгруппа группы G. Тогда PN/N – силовская p-подгруппа группы G/N. Если в G/N нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, то G/N удовлетворяет условию теоремы. Пусть K/N – произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка из G/N и L – минимальное добавление к подгруппе N в K. По лемме 1.3 L содержит подгруппу Шмидта S нечетного порядка и $L=(S)^L$. По условию P перестановочна с подгруппой S и подгруппой Шмидта нечетного порядка S^l для любого $l \in L$. Значит, P перестановочна с $S^L = L$ по лемме 1.4 и поэтому PN/N перестановочна с $LN/N = K/N$. Таким образом, все условия теоремы наследуют фактор-группы G/N. По индукции неабелевы композиционные факторы группы G/N принадлежат списку простых групп из заключения теоремы.

Предположим, что в N нет подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда по лемме 1.1 неабелевы композиционные факторы группы N принадлежат множеству Ω, противоречие с выбором группы G. Поэтому пусть S_1 – произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка из N. Тогда по условию $PS_1 = S_1 P$. Так как $N \cap PS_1 = (N \cap P)S_1 = P_1 S_1$, где P_1 – силовская p-подгруппа из N, то по индукции неабелевы композиционные факторы группы N изоморфны $PSL(2,7)$ или группам из множества Ω. Опять противоречие с выбором группы G.

В дальнейшем считаем, что G – простая группа. Пусть T – произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка. Предположим, что $PT < G$. Тогда P перестановочна с подгруппой T^g для любого $g \in G$ и $P^G \neq G$, либо $T^G \neq G$ по лемме 1.5. Противоречие. Поэтому $PT = G$. По лемме 1.2 возможны только следующие варианты:

1) $p=2$, $G \simeq PSL(2,7), P \simeq D_8, S \simeq [Z_7]Z_3$;

2) $p=3$, $G \simeq SL(2,8), P \simeq Z_9, S \simeq [E_{2^3}]Z_7$;

3) $p=5$, $G \simeq PSL(2,5), P \simeq Z_5, S \simeq A_4 \simeq [E_{2^2}]Z_3$.

Как видно из факторизаций, только группа $PSL(2,7)$ представима в виде произведения силовской подгруппы и подгруппы Шмидта нечетного порядка. Поэтому $G \simeq PSL(2,7)$. Противоречие. $\square$

***Следствие* 2.1.1.** *Пусть G – группа, у которой нет композиционных факторов из множества Ω. Если $p > 2$ и силовская p-подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка, то G разрешима.*

Доказательство. Обозначим силовскую p-подгруппу группы G из условия следствия через P. Применим индукцию по порядку группы G. Из теоремы и леммы 1.1 следует, что в группе G существует хотя бы одна подгруппа Шмидта нечетного порядка и в G все неабелевы композиционные факторы изоморфны $PSL(2,7)$. Пусть N – собственная неединичная нормальная в G подгруппа. Из доказательства теоремы видно, что условия следствия наследуют все фактор-группы и собственные нормальные подгруппы. Тогда по индукции фактор-группа G/N и подгруппа N разрешимы. Значит, G разрешима.

Таким образом, в группе G нет собственных нормальных подгрупп и G – простая группа, изоморфная $PSL(2,7)$. Группа G является произведением p-подгруппы P и подгруппы Шмидта нечетного порядка по лемме 1.5. Однако, из леммы 1.2 следует, что $p=2$. Противоречие с условием. □

***Следствие* 2.1.2.** *Пусть в группе G существует* $2'$*-холлова подгруппа B. Если некоторая силовская* 2*-подгруппа P группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B, то G либо разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны* $PSL(2,7)$.

Доказательство. Если в группе B нет подгрупп Шмидта, то B нильпотентна. Тогда по теореме Виландта–Кегеля группа $G=PB$ разрешима. Поэтому в дальнейшем считаем, что подгруппа B ненильпотентна.

Применим индукцию по порядку группы G. Пусть N – собственная неединичная нормальная подгруппа группы G. Тогда PN/N – силовская 2-подгруппа группы G/N и в группе G/N существует $2'$-холлова подгруппа BN/N. Если в BN/N нет подгрупп Шмидта, то G/N удовлетворяет условиям следствия. Пусть K/N – подгруппа Шмидта из BN/N. По тождеству Дедекинда $K=K\cap BN=(K\cap B)N$ и $K\cap B$ – добавление к подгруппе N в K. Пусть $L\le K\cap B$ – минимальное добавление к подгруппе N в K. По лемме 1.3 L содержит подгруппу Шмидта S нечетного порядка и $L=(S)^L$. Так как $S\le L\le B$, то по условию P перестановочна с подгруппой S. Тогда P перестановочна с подгруппой S^g для любого $g\in G$ по лемме 1.6. По лемме 1.4 P перестановочна с $S^L=L$. Поэтому PN/N перестановочна с $LN/N=K/N$. Таким образом, все условия следствия наследуют фактор-группы G/N. По индукции G/N либо разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы G/N изоморфны $PSL(2,7)$.

Так как N – нормальная подгруппа группы G, $G=PB$ и $(|P|,|B|)=1$, то по [11] $N=$ $=(N\cap P)(N\cap B)$, где $P_1=N\cap P$ – силовская 2-подгруппа подгруппы N, а $B_1=N\cap B$ – $2'$-холлова подгруппа в N. Если в B_1 нет подгрупп Шмидта, то B_1 нильпотентна и по теореме Виландта – Кегеля группа N разрешима. Будем считать, что в B_1 есть подгруппы Шмидта. Из доказательства теоремы следует, что силовская 2-подгруппа P_1 группы N перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B_1. По индукции либо N разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы N изоморфны $PSL(2,7)$. Тогда группа G удовлетворяет заключению следствия.

В дальнейшем считаем, что G – простая группа. Пусть T – произвольная подгруппа Шмидта из B. Предположим, что $PT<G$. Тогда по лемме 1.6 P перестановочна с подгруппой T^g для любого $g\in G$ и $P^G\ne G$, либо $T^G\ne G$ по лемме 1.5. Противоречие. Поэтому $PT=G$. По лемме 1.2 $G\simeq PSL(2,7)$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Матем. зам. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.

2. *Монахов*, *В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса-2001. – 2002, секция 1. – С. 81–90.

3. *Тютянов*, *В.Н.* Конечные группы с нильпотентными подгруппами нечетного порядка / В.Н. Тютянов, П.В. Бычков // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 84–86.

4. *Беркович*, *Я.Г.* О перестановочности подгрупп конечной группы / Я.Г. Беркович, Э.М. Пальчик // Сиб. мат. журн. – 1967. – Т. 8, № 4. – С. 741–753.

5. *Княгина*, *В.Н.* О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 130–139.

6. *Монахов*, *В.С.* О композиционных факторах конечной группы с *OS*-полунормальной силовской подгруппой / В.С. Монахов, Е.В. Зубей // Труды института математики НАН Беларуси. – 2018. – Т. 26:1. – С. 90–94.

7. *Монахов*, *В.С.* О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта из некоторого ее добавления / В.С. Монахов, Е.В. Зубей // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 145–154.

8. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

9. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 796 p.

10. *Княгина*, *В.Н.* Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.

11. *Монахов*, *В.С.* Произведение бипримарной и 2-разложимой групп / В.С. Монахов // Матем. зам. – 1978. – Т. 23, № 5. – С. 641–649.

Поступила в редакцию 20.12.18.