

УДК 539.3

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРУБЫ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, Е.А. Голубева

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

REALIZATION OF THE SOLUTION OF VISCOELASTICITY' PROBLEMS FOR A PIPE FROM A FUNCTIONAL GRADIENT MATERIAL

V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, E.A. Golubeva

F. Scorina Gomel State University

Определяется напряженно-деформированное состояние вязкоупругой трубы из неоднородных материалов под действием внутреннего давления. Представлены основные зависимости для расчета труб из неоднородных материалов. На основании полученных формул для нахождения деформаций создана компьютерная программа расчета деформаций в трубе, изменяющихся во времени. Приведена реализация расчетов напряженно-деформированного состояния в трубе и параметров ядер ползучести и релаксации.

Ключевые слова: вязкоупругость, труба, функционально-градиентный материал, деформации.

The stress-strain state of a viscoelastic tube made of inhomogeneous materials under the action of internal pressure is determined. The main dependences for the calculation of pipes made of heterogeneous materials are presented. On the basis of the received formulas for finding deformations the computer program of calculation of deformations in a pipe changing in time is created. The implementation of calculations of the stress-strain state in the pipe and the parameters of creep and relaxation nuclei is presented.

Keywords: viscoelasticity, pipe, functionally graded material, strain.

Введение

Бурное развитие современной техники и технологий создания новых материалов характеризуется комплексными исследованиями конструкций и материалов, эффективно работающими как в упругой, так и вязкоупругой областях при действии сложных нагрузок. Если упругие материалы определяются физическими соотношениями между напряжениями и деформациями, то в вязкоупругих материалах напряжения зависят от скоростей деформаций. Многие из новых материалов обладают механическими свойствами, которые нельзя описать с помощью упругих или вязких моделей механического поведения, и в силу этого становится очевидная необходимость построения более общей теории моделей, например, для функционально-градиентных материалов. В проблеме исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндрических тел из новых армированных полимеров можно выделить несколько важных аспектов:

– оценка влияния внешних воздействий (силовых, механических, влияния температурных полей и т. д.) при производстве и эксплуатации трубопроводных систем неоднородной структуры;

– использование в современных конструкциях новых композитов и армированных полимеров с учетом физико-механических характеристик материала, эксплуатационных условий функционирования исследуемых объектов;

– разработка современных систем оценки и диагностики, прогнозирования состояния систем трубопроводов на базе новых компьютерных технологий.

Следует отметить, что основные концепции теории вязкоупругости разработаны российскими учеными такими, как Ю. Работнов, А. Ильюшин, М. Колтунов и др., а также рядом зарубежных ученых. При этом решения задач теории вязкоупругости были заложены ранее в XX веке и продвинулись учеными СССР, используя разные математические модели, представления математического описания новых ядер релаксации и ползучести. В настоящее время стало широко использоваться представление указанных ядер с помощью сумм большого числа убывающих экспоненциальных функций, позволяющих описывать кривые ползучести и релаксации с погрешностью не более 1%. Наличие численных программ значительно облегчило идентификацию таких функций и, что важно, эти виды

представления ядер релаксации и ползучести стали входить в стандартные пакеты для решения задач линейной и нелинейной теорий вязкоупругости.

1 Постановка задачи исследований. Основные зависимости для расчета труб из неоднородных материалов

При исследовании напряженно-деформированного состояния задач вязкоупругости для трубы из функционально-градиентного материала (рисунок 1.1) используем методы расчета, представленные в работах [1], [2], в которых подробно показаны основные формулы для нахождения напряжений в зависимости от свойств материалов.

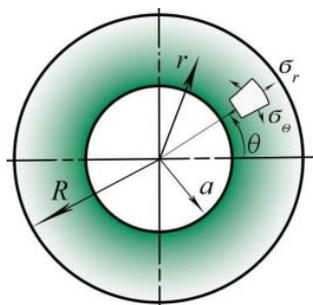


Рисунок 1.1 – Схема трубы из функционально-градиентного материала

Считаем, что материал трубы функционально-градиентный, и выполняется условие упругости для модуля Юнга [2]:

$$E(r) = E_0 r^{\bar{\beta}}, \quad -2 \leq \bar{\beta} \leq 2.$$

Напряжения σ_r и σ_θ удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

Общее решение примет вид:

$$u = \bar{A}r^{m_1} + Br^{m_2},$$

Постоянные \bar{A} , B_i определяются из граничных условий. Получим выражения для напряжений [2]:

$$\sigma_r = - \frac{P \left(\frac{a}{R}\right)^{1-\bar{\beta}} (r^{m_1} - r^{m_2}) r^{\bar{\beta}-1}}{\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}},$$

$$\sigma_\theta = - \frac{P \left(\frac{a}{R}\right)^{1-\bar{\beta}} (r^{m_1} - r^{m_2}) r^{\bar{\beta}}}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) (m_1(v-1) - v)(m_2(v-1) - v)},$$

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\bar{\beta} \pm \sqrt{4 + \bar{\beta}^2 - 4\bar{\beta}v^*} \right).$$

На основании полученных формул для нахождения деформаций и учитывая [2]–[6], создана

компьютерная программа расчета деформаций в трубе, изменяющихся во времени. При постановке и решении краевой задачи использовали теорию линейной вязкоупругости, дифференциальные уравнения в частных производных, численные решения краевой задачи. Функции, описывающие явления ползучести и релаксации, основанные на свойствах функции Миттаг – Леффлера, строятся по результатам экспериментов на ползучесть при постоянных напряжениях или, соответственно, на релаксацию при фиксированных деформациях. Для реализации расчета напряженно-деформированного состояния трубы использовали параметры различных ядер ползучести и релаксации, входящие в интегральные уравнения теории вязкоупругости с применением принципа Вольтера. Так, деформации и перемещение в вязкоупругой задаче [1], [2], [7] при действии внутреннего давления $p(t)$ по принципу Вольтера выражаются следующим образом:

$$\varepsilon_\theta(r,t) = - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\bar{\beta}} (1+\nu)(1-2\nu)(r^{m_1-1} + r^{m_2-1})}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \tilde{E}_0^{-1} \cdot p,$$

$$\varepsilon_r(r,t) = - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\bar{\beta}} (1+\nu)(1-2\nu)(m_1 r^{m_1-1} \omega_2 + m_2 r^{m_2-1} \omega_1)}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \times \tilde{E}_0^{-1} p,$$

$$u(r,t) = - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\bar{\beta}} (1+\nu)(1-2\nu)(r^{m_1} \omega_2 + r^{m_2} \omega_1)}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \tilde{E}_0^{-1} \cdot p,$$

$$\omega_1 = \nu + (1-\nu)m_1, \quad \omega_2 = \nu + (1-\nu)m_2,$$

здесь оператор $\tilde{E}_0^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) \cdot 1 d\tau \right]$ действует на функцию давления $p(t)$. Введены обозначения ε_θ , ε_r и u – деформации и перемещение, $K(t-\tau)$, $R(t-\tau)$ – функция влияния (ядро ползучести, ядро релаксации), E – модуль упругости, t – время наблюдения.

Ядра ползучести и релаксации связаны между собой интегральным соотношением, характеризуют основные механические свойства вязкоупругих материалов и входят в определяющие уравнения.

В данной работе использовали обобщенные ядра вида [7]:

$$R(\tau) = A^* \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda\tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta^* \tau^\alpha; \alpha);$$

$$K(\tau) = A^* \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda\tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta \tau^\alpha; \alpha),$$

в которые входит функция типа Миттаг – Леффлера

$$E_\rho(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция; μ – произвольный параметр, A^* , β , λ , α – реологические параметры.

Приведем основные аналитические зависимости, которые необходимы для дальнейших расчетов. Входящие в физические зависимости интегралы вычисляются через сумму гамма функций для случая $\sigma(t)$, $\varepsilon(t) = \text{const}$:

$$\tilde{R}(\tau) = \int_0^\tau R(s) ds = \frac{A^*}{\beta^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta^*}{\lambda^\alpha}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \lambda\tau)}{\Gamma(\alpha n)},$$

$$\tilde{K}(\tau) = \int_0^\tau K(s) ds = \frac{A^*}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\lambda^\alpha}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \lambda\tau)}{\Gamma(\alpha n)}.$$

При вычислении интегралов можно пользоваться конечной суммой до k -го члена. Из выше приведенных формул, учитывая $(\beta^* = \beta - A^*)$ при $\tau \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_0^\infty R(s) ds = \frac{A^*}{\beta^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta^*}{\lambda^\alpha}\right)^n = \frac{A^*}{\lambda^\alpha - \beta^*} = \frac{A^*}{\lambda^\alpha - (\beta - A^*)},$$

$$\int_0^\infty K(s) ds = \frac{A^*}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\lambda^\alpha}\right)^n = \frac{A^*}{\lambda^\alpha - \beta}.$$

Используя источник [2], рассмотрим различные случаи нагружения материала:

1. Нагрузка постоянная $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$, в этом случае закон деформирования можно выразить следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right].$$

Таблица 1.1 – Значения рассчитанных вязкоупругих компонентов, входящих в формулы для описания явлений ползучести и релаксации построенных на основе экспериментальных данных

t	$K(t)$	$\int_0^t K(t) dt$	$R(t)$	$\int_0^t R(t) dt$	$1 + \int_0^t K(t) dt$	$1 - \int_0^t R(t) dt$
0,001	20,867	0,2272	3,911	0,1855	1,2272	0,8145
0,01	2,7021	0,2819	1,6526	0,2204	1,2819	0,7796
0,1	0,3559	0,3535	0,1955	0,2619	1,3535	0,7381
1,0	0,0463	0,4478	0,0222	0,3103	1,4478	0,6897
5,0	$0,96 \cdot 10^{-2}$	0,5255	$0,41 \cdot 10^{-2}$	0,3456	1,5255	0,6544
10,0	$0,42 \cdot 10^{-2}$	0,5570	$0,17 \cdot 10^{-2}$	0,3587	1,5570	0,6413
18,0	$0,17 \cdot 10^{-2}$	0,5786	$0,65 \cdot 10^{-3}$	0,3672	1,5786	0,6328
30,0	$0,61 \cdot 10^{-3}$	0,5912	$0,22 \cdot 10^{-3}$	0,3719	1,5912	0,6281
70,0	$0,41 \cdot 10^{-4}$	0,5993	$0,14 \cdot 10^{-4}$	0,3748	1,5993	0,6252
100,0	$0,69 \cdot 10^{-5}$	0,5959	$0,22 \cdot 10^{-5}$	0,3750	1,5999	0,6250
200,0	$0,27 \cdot 10^{-7}$	0,6000	$0,79 \cdot 10^{-8}$	0,3750	1,6000	0,6250
300,0	$0,13 \cdot 10^{-9}$	0,6000	$0,36 \cdot 10^{-10}$	0,3750	1,6000	0,6250

Используя значение интеграла $\int_0^t K(\tau) d\tau$,

получаем

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \frac{A^*}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\lambda^\alpha}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \lambda t)}{\Gamma(\alpha n)} \right].$$

2. При времени $t \rightarrow \infty$ деформация асимптотически приближается к значению

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right] = \frac{P_0}{E_0} \left[1 + \frac{A^*}{\lambda^\alpha - \beta} \right],$$

где $A^* = A\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, α, β – параметры ядра.

Ядро $R(\tau)$ и резольвента $K(\tau)$ связаны соотношением

$$K(\tau) - R(\tau) = \int_0^\tau K(\tau-s)R(s) ds.$$

Значения параметров ядер определяются из эксперимента и задаются таблицей чисел, которые соответствуют фиксированным значениям времени. При проведении эксперимента определяются данные для построения кривых ползучести или релаксации. Для тестирования созданной компьютерной программы был произведен расчет параметров, входящих в описания основных соотношений вязкоупругости (таблица 1.1), и сравнивался с результатами расчета работы [6]; вычисление производилось для слабо сингулярного ядра Ржаницына – Колтунова при $\beta^* = 0$, $R(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1}$ и резольвенты

$$K(t) = At^{-1} e^{-\beta t} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(A\Gamma(\alpha)t^\alpha)^i}{\Gamma(i\alpha)} \right]$$

для параметров ядра $\alpha = 0,075$, $\beta = 0,05$, $A = 0,0233$ (материал текстолит), сопоставление результатов расчета показало хорошее совпадение.

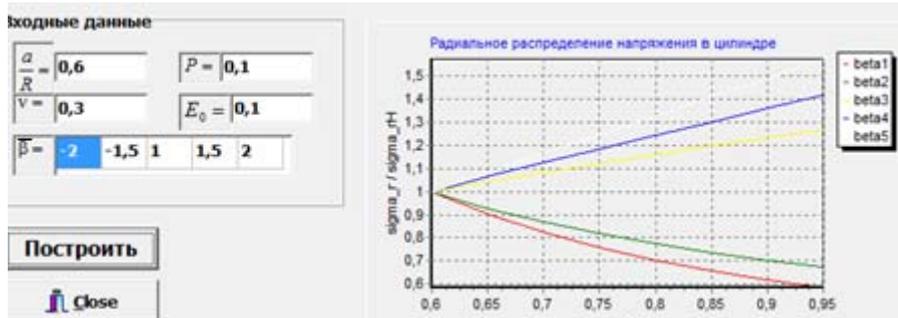


Рисунок 2.1 – Результаты расчетов и графики распределения напряжения и перемещения в трубе

2 Программная реализация расчетов напряженно-деформированного состояния в трубе

Были рассмотрены различные примеры расчета напряжения, разработан алгоритм и создана программа в среде Delphi, которая реализует расчет напряженно-деформированного состояния в трубе из композитов для упругой задачи. На рисунке 2.1 изображено окно ввода исходных данных, рассчитанные коэффициенты \bar{A} и B , построенные программой графики распределения напряжения и перемещения в цилиндрической трубе. Тестирование программы осуществлялось в сравнении с результатами других исследователей, полученных при расчете напряжения и деформации в трубе из композиционных материалов.

На основании решения упругой задачи для неоднородной трубы было построено решение для вязкоупругого случая, в котором характеристики трубы изменяются во времени. Результаты расчета при решении вязкоупругой задачи также созданы в средах Delphi и Mathcad с использованием слабо сингулярного ядра Ржаницына – Колтунова при $\beta^* = 0$.

Разрабатывается методика определения осевого удлинения трубопроводов (труб) из композита с внутренним давлением при заданной температуре. Алгоритм включает использования различных ядер ползучести, в том числе и экспоненту. Деформация в осевом направлении состоит из мгновенной деформации и ползучести.

Для ортотропного тела с цилиндрической анизотропией уравнения упрощаются и принимают вид

$$\epsilon_r = a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z \gamma_{\theta z} = a_{44}\tau_{\theta z},$$

$$\epsilon_\theta = a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta + a_{23}\sigma_z \gamma_{rz} = a_{55}\tau_{rz},$$

$$\epsilon_z = a_{13}\sigma_r + a_{23}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_z \gamma_{r\theta} = a_{66}\tau_{r\theta}.$$

В других (технических) обозначениях уравнения записываются так:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} - \frac{\nu_{rz}}{E_z}\sigma_z, \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G_{\theta z}}\tau_{\theta z},$$

$$\epsilon_\theta = -\frac{\nu_{\theta r}}{E_r}\sigma_r + \frac{1}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\nu_{\theta z}}{E_z}\sigma_z, \gamma_{rz} = \frac{1}{G_{rz}}\tau_{rz},$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{zr}}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta + \frac{1}{E_z}\sigma_z, \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}.$$

Здесь E_r, E_θ, E_z – модули Юнга для растяжения (сжатия) по направлениям r, θ, z (совпадающим с главными направлениями упругости); ν_{ij} – коэффициенты Пуассона, удовлетворяющие условиям:

$$\nu_{0r}E_\theta = \nu_{r0}E_r, \nu_{zr}E_z = \nu_{rz}E_r, \nu_{z\theta}E_z = \nu_{\theta z}E_\theta;$$

G_{ij} – модули сдвига. Физический смысл ν_{ij} и G_{ij} такой же, как и соответствующим им, величинам в декартовых координатах:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, \gamma_{yz} = \frac{1}{G_1}\tau_{yz},$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, \gamma_{xz} = \frac{1}{G_1}\tau_{xz},$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_2}{E}\sigma_x - \frac{\nu_2}{E}\sigma_y + \frac{1}{E_1}\sigma_z, \gamma_{xy} = \frac{1}{G_1}\tau_{xy},$$

или в других обозначениях имеем деформацию в направлении армирования

$$\epsilon_{33} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}} - \frac{\nu_{12}}{E_{11}}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

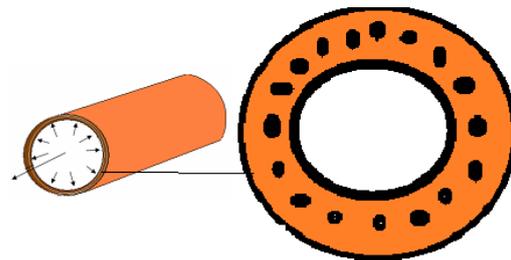


Рисунок 2.2 – Схема армированной трубы

Например, можно легко определить удлинение армированной трубы в вязкоупругом случае (рисунок 2.2). Составляющие напряжений, действующие на трубу: осевые, тангенциальные, радиальные

$$\sigma_3 = \frac{pd}{4h}, \sigma_2 = \frac{pd}{2h}, \sigma_1 = -p.$$

Действия интегральных операторов на 1

$$\varepsilon_{33}(t) = \frac{pd}{4h} \frac{1}{\tilde{E}_{33}}(\dots) - \frac{p}{\tilde{E}_{11}} \left(\frac{d}{2h} - 1 \right) \frac{v_{12}}{\tilde{E}_{11}}(\dots),$$

где введены обозначения $E_{33} = E_3$, $E_{11} = E_1$,

$$\tilde{E}_1^{-1} \cdot 1 = E_{10}^{-1} \left[1 + A_1 \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda \tau} \cdot 1 d\tau \right].$$

Если ядро принято в виде экспоненты, то можно получить замкнутую формулу для определения удлинения трубы.

3 Программная реализация расчета параметров ядер ползучести и релаксации

Определим параметры обобщенного ядра ползучести согласно [7]:

$$K(t) = A^* t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta t^\alpha, \alpha).$$

При постоянном напряжении $\sigma(t) = \sigma_0 = const$ уравнение ползучести будет иметь вид:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right]$$

или в пространстве преобразования Лапласа – Карсона

$$\bar{\varepsilon}(s) = \varepsilon_0 \left[1 + \bar{K}(s) \right],$$

здесь s – параметр преобразования, $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_0}$,

$\bar{K}(s)$, $\bar{\varepsilon}(s)$ – изображение ядра и функции деформации соответственно.

Следуя [7], изображение ядра

$$K(t) = A^* t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta t^\alpha)^n}{\Gamma[\alpha(1+n)]}$$

будет иметь вид:

$$K(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^* \beta^n}{(s + \lambda)^{(1+n)\alpha}} \\ \frac{A^*}{(s + \lambda)^\alpha - \beta} \text{ при } \frac{\beta}{(s + \lambda)^\alpha} < 1. \end{cases}$$

Применим преобразование Лапласа – Карсона к экспериментальным данным ползучести:

$$\varepsilon_s(s_k) = s_k \int_0^{t_n} \varepsilon_s(t) e^{-s_k t} dt + \int_{t_n}^{\infty} \varepsilon_s(t) e^{-s_k t} dt,$$

где $\varepsilon_s(t)$ – экспериментальная функция деформации.

При увеличении продолжительности опыта на ползучесть, выбирая значения параметра s_k ($k=1, 2, \dots$), второе слагаемое в формуле для $\varepsilon_s(s_k)$ можно сделать пренебрежимо малым. Тогда неизвестные параметры ядра вычисляются из условия минимума функции

$$\begin{aligned} & \varphi(A^*, \lambda, \alpha, \beta) = \\ & = \sum_{k=1}^n \left[\varepsilon_s(s_k) - \varepsilon_0 \left(1 + \frac{A^*}{(s_k + \lambda)^\alpha - \beta} \right) \right]^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем задачу оптимизации на безусловный минимум. Для отыскания минимума функции $\varphi(A^*, \lambda, \alpha, \beta)$ был использован метод Хука – Дживса [8]. Была разработана программа для определения параметров обобщенного ядра ползучести. Обработаны все возможные случаи ввода некорректных данных, реализована возможность записи и чтения из файла всех вводимых характеристик. На рисунке 3.1 представлено главное окно разработанной программы, в котором приведены значения искомых параметров обобщенного ядра ползучести, минимальное значение функции φ , количество итераций, подробная информация о ходе работы метода Хука – Дживса.

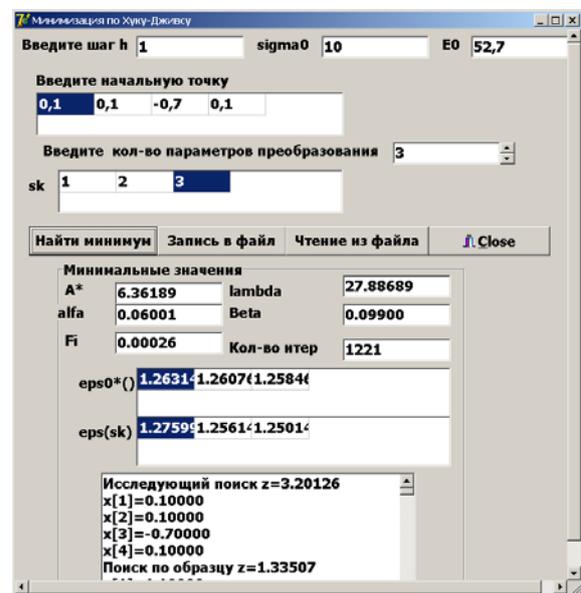


Рисунок 3.1 – Главное окно программы

Заключение

Разработана автоматизированная методика и создан программный модуль нахождения напряжений и деформаций труб из функционально-градиентных материалов с учетом вязкоупругих и реологических свойств материала. Построен алгоритм расчета параметров ядер ползучести и релаксации. Расчеты проводились с помощью разработанного программного модуля. Полученные результаты могут быть использованы в производстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Можаровский, В.В.* Методика розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих труб з урахуванням явищ повзучості і релаксації / В.В. Можаровський, Е.А. Голубева, Д.С. Кузьменков // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2017. – № 3. – С. 151–156.
2. *Tutuncu, N.* Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels / N. Tutuncu,

М. Ozturk // Composites Part B: Engineering. – 2001. – Vol. 32. – P. 683–686.

3. *Можаровский, В.В.* О контактном взаимодействии жесткого индентора с армированным резиновым слоем с учетом явлений вязкоупругости // Полимерные материалы и технологии. – 2017. – Т. 3, № 2. – С. 70–79.

4. *Можаровский, В.В.* Метод расчета характеристик контакта тел с ортотропным покрытием / В.В. Можаровский, М.Ю. Бокий // «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях»: материалы XX Республиканской научной конференции, Гомель, 20–22 марта 2017 г. – ГГУ им. Ф.Скорины. – Гомель, 2017. – С. 184.

5. *Mozharovsky, V.V.* Boundary element method in determining the stress-strain state of composite coating in tribological systems / V.V. Mozharovsky, N.A. Maryina, K.B. Ghazaryan // Ukrainian Conference in Applied Mathematics 28–30 September, 2017. – Ivan Franko National University of Lviv: Lviv, Ukraine. – С. 76–77.

6. *Огибалов, П.М.* Экспериментально-теоретические методы определения упруго-вязких характеристик стеклопластиков / П.М. Огибалов, М.А. Колтунов, И.М. Тюнеева // Сб. «Упругость и неупругость». – Московский университет, 1971. – Вып. 2. – С. 175–192.

7. *Можаровский, В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – М.: Наука, 1988. – 271 с.

8. *Можаровский, В.В.* Лабораторный практикум и методические указания по спецкурсу лекций «Оптимальное проектирование» для студентов математического факультета / В.В. Можаровский. – Гомель, 1996. – 56 с.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ – ГКН Арм., грант T17APM-034.

Поступила в редакцию 14.01.19.