

УДК 535.317.1

ВЛИЯНИЕ ЧАСТИЧНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ НА КОНТРАСТ САМОРЕПРОДУЦИРОВАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАНСПАРАНТОВ

Смирнов А. П.

Получено выражение для контраста дифракционных изображений синусоидальной решетки при освещении ее пространственно частично когерентным квазимонохроматическим светом при изменении расстояния между решеткой и плоскостью наблюдения. Исследованы условия достижения максимального контраста саморепродуцированных изображений и критические условия минимального и нулевого контрастов дифракционных изображений периодических транспарантов.

Вопросу влияния частичной пространственной когерентности на саморепродуцированные изображения периодических транспарантов посвящены работы [1, 2]. Целью данной работы являлось обобщение результатов этих работ на все множество дифракционных изображений в пространстве за периодическим транспарантом. Следует отметить, что цель достигнута с применением более компактного и наглядного математического аппарата, чем в [1, 2], а именно с помощью теории линейных оптических преобразований на основе импульсных откликов, опирающейся на параболическое приближение волновых полей.

Если транспарант (периодический или нет) освещается квазимонохроматическим со средней длиной волны λ излучением от источника, расположенного на расстоянии R от транспаранта, то комплексная степень когерентности $\mu(x_1, x_2)$ [3], связанная с плоскостью транспаранта, может быть записана в виде

$$\mu(x_1, x_2) = \lambda R h(x_1, R) h^*(x_2, R) I_S\left(\frac{x_1 - x_2}{\lambda R}\right), \quad (1)$$

где

$$h(x, R) = (i\lambda R)^{-1/2} \exp\left(\frac{i\pi x^2}{\lambda R}\right) \quad (2)$$

— импульсный отклик слоя свободного пространства толщиной R [4], $I_S(x)$ — функция интенсивности источника, граница которого описывается функцией S , а уголок над функцией обозначает образ Фурье этой функции. Анализ проведем по одной координате. Обобщение на случай двух переменных выполняется автоматически ввиду того, что функции μ и h в общем случае представимы в виде произведения одномерных функций по координатным осям. Следует отметить, что, если источник расположить в фокусе линзы, то фазовый квадратичный множитель в (1) компенсируется.

Интенсивность дифракционного изображения за транспарантом, описываемым функцией $f(x)$ амплитудно-фазового пропускания, на расстоянии z от транспаранта, представленная через свертку с импульсным откликом свободного пространства, имеет вид

$$I_{\text{ИК}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x_1, x_2) f(x_1) f^*(x_2) h(x - x_1, z) h^*(x - x_2, z) dx_1 dx_2$$

или с учетом (1) и (2)

$$I_{\text{чк}}(x) = \lambda R \int_{-\infty}^{\infty} I_S \left(\frac{x_1 - x_2}{\lambda R} \right) g(x_1) g^*(x_2) \exp \left[-i 2\pi \frac{x}{\lambda z} (x_1 - x_2) \right] dx_1 dx_2, \quad (4)$$

где

$$g(x) = [f(x) h(x, R)] h(x, z) = p(x) h(x, z). \quad (5)$$

Функция $p(x)$ представляет собой распределение амплитуды поля в плоскости транспаранта при освещении его пространственно когерентной сферической волной, распространяющейся от точечного источника, расположенного в начале координат плоскости, где помещается источник с границей S . Из этого факта, в частности, следует, что для компенсации квадратичного фазового множителя в (1) линзу центрируют относительно оптической оси независимо от положения источника. Выполнив двумерное преобразование Фурье, из (4) получаем

$$I_{\text{чк}} = \frac{\lambda R}{z} I_S \left(-\frac{R}{z} x \right) \otimes \left| \hat{g} \left(\frac{x}{\lambda z} \right) \right|^2, \quad (6)$$

где \otimes — операция одномерной свертки по пространственной переменной.

Для дальнейших преобразований выпишем два соотношения: преобразование Фурье импульсного отклика на частоте $x/\lambda z$

$$\hat{h} \left(\frac{x}{\lambda z}, z \right) = (i\lambda z)^{1/2} h^*(x, z) \quad (7)$$

и соотношение Фурье—Френеля

$$f(x) \otimes h(x, z) = h(x, z) \left[\hat{f} \left(\frac{x}{\lambda z} \right) \otimes h^*(x, z) \right], \quad (8)$$

получаемое путем выделения из операции свертки с импульсным откликом свободного пространства ядра преобразования Фурье. Используя эти соотношения, преобразуем второй сомножитель в (6)

$$\begin{aligned} \hat{g} \left(\frac{x}{\lambda z} \right) &= \frac{1}{\lambda z} \hat{p} \left(\frac{x}{\lambda z} \right) \otimes \hat{h} \left(\frac{x}{\lambda z}, z \right) = \\ &= (-i\lambda z)^{-1/2} \hat{p} \left(\frac{x}{\lambda z} \right) \otimes h^*(x, z) = (-i\lambda z)^{-1/2} h^*(x, z) [p(x) \otimes h(x, z)]. \end{aligned}$$

Следует заметить, что в этих выкладках свертка осуществляется по переменной x , поэтому перед сверткой образов Фурье функций p и h появился множитель $1/\lambda z$, так как преобразование осуществлялось по частоте $x/\lambda z$. Таким образом, с точностью до фазового множителя $\hat{g}(x/\lambda z)$ представляет собой амплитуду поля дифракционного изображения транспаранта, освещаемого сферической волной, и (6) может быть записано в виде

$$I_{\text{чк}}(x) = \frac{R}{z^2} I_S \left(-\frac{R}{z} x \right) \otimes I_{\text{к}}(x), \quad (9)$$

где $I_{\text{к}}(x)$ — интенсивность дифракционного изображения при освещении транспаранта когерентной сферической волной.

Непосредственным применением эффекта, описываемого формулой (9), является процесс мультипликации изображений, выполненных в виде транспаранта, с помощью периодических двумерных дырчатых масок [5, 6], так как при выполнении условий саморепродукции [7] $I_{\text{к}}(x)$ представляет собой саморепродуцированное изображение маски и свертка с функцией источника I_S означает мультиплицирование изображений источника. Как следует из (9), размноженные изображения перевернуты, и влияние частичной пространственной когерентности можно учесть в конце анализа дифракционной задачи, проведенного в предположении пространственной когерентности освещения. Таким образом, конечные размеры квазимонохроматического источника влияют на дифракционное изображение подобно фильтру низких пространствен-

ных частот с передаточной функцией, пропорциональной образу Фурье функции источника, взятой с масштабным коэффициентом $-z/R$.

Используем полученные результаты для анализа влияния частичной пространственной когерентности излучения на саморепродуцированные изображения периодического транспаранта. Дифракционные изображения представляют собой или саморепродуцированные изображения периодического транспаранта, или мультиплицированные изображения транспаранта, или периодические дифракционные картины в случае, когда размноженные изображения перекрываются. Период дифракционных изображений зависит от периода транспаранта, длины волны освещения и положения плоскости наблюдения [7]. Например, в плоскости

$$z = T \frac{l}{m} \frac{d^2}{\lambda}, \quad T = 1 + \frac{z}{R}, \quad (10)$$

где d — период транспаранта, l и m — целые не имеющие общих множителей числа, I — масштабный коэффициент, учитывающий расстояние от источника до транспаранта, или, другими словами, тип освещения: сферической или плоской волной (в последнем случае $T=1$), возможно наблюдать дифракционные изображения с периодом d/m . Если для освещения использовать источник в виде щели с шириной b и равномерной интенсивностью, то соответствующий фильтр пространственных частот как образ Фурье от прямоугольной функции ширины b с учетом масштабного коэффициента имеет вид

$$\varphi(\nu) = \text{sinc}\left(\frac{zb}{R}\nu\right), \quad (11)$$

а дифракционные изображения с периодом d/m будут иметь нулевой контраст, поскольку основная частота и ее гармоники совпадают с нулями функции $\varphi(\nu)$, если

$$\nu_{\text{кр}} = \frac{m}{d} N = n \frac{R}{zb}, \quad n = 1, 2, \dots, N = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где n — номер нуля функции $\varphi(\nu)$, или с учетом (10) критический угловой размер источника, для которого дифракционное изображение в плоскости наблюдения l/m имеет нулевой контраст, выражается формулой

$$\alpha_{\text{кр}} = \frac{b}{R} = \frac{n}{l} \frac{\lambda}{d} \frac{1}{T}. \quad (13)$$

Если $l=2, 4, \dots$ ($m=1$), то (13) описывает множество критических апертур источника для саморепродуцированных изображений периодического транспаранта. С этой точки зрения (13) совпадает с результатом [2], где рассматривался случай освещения плоской волной ($T=1$), но (13) справедливо для любой плоскости локализации дифракционного изображения, имеющей один и тот же параметр m , поэтому наряду с плоскостями саморепродукции (l четное) условие (13) справедливо для всех плоскостей с нечетным параметром m . Такой любопытный эффект нулевого контраста при освещении плоской волной связан с тем фактом, что при фиксированном l уменьшение периода дифракционной картины в m раз связано с уменьшением расстояния до плоскости наблюдения также в m раз и, как следует из (9), пропорционально уменьшается эффективный размер источника, сворачиваемого с когерентным дифракционным изображением. При освещении периодического транспаранта сферической волной множество плоскостей наблюдения с нулевым контрастом меняется, оно определяется условием $lT = \text{const}$.

Заметим, что если при переходе от когерентного освещения плоской волной к освещению сферической дифракционная картина меняется, как было отмечено, только в масштабе и плоскости локализации, то при частично когерентном освещении такая чисто геометрическая связь, как следует из (12), пропадает: контрасты этих «подобных» картин различны, так как различны множества $\nu_{\text{кр}}(n)$.

Соотношения (12) и (13) позволяют оценить только условия нулевого контраста, в общем же случае необходимо задаться видом функции $f(x)$. В этом отношении удобны синусоидальные транспаранты, обладающие свойством не-

прерывной локализации [1], другими словами, все дифракционные картины подобны друг другу, но имеют различное боковое смещение, т. е. отличаются только фазовым коэффициентом

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[1 + C \cos \left(\frac{2\pi x}{d} \right) \right], \quad (14)$$

где C — контраст амплитудной решетки f . Чтобы получить выражение для интенсивности дифракционного изображения транспаранта в когерентном свете при освещении сферической волной, воспользуемся соотношением Фурье—Френеля (8) для функции $f(x)$ из (14) и изменим масштаб получившегося в результате распределения (геометрическое подобие дифракционных картин при различных типах освещения рассмотрено в [8])

$$I_{\kappa}(x) \sim \frac{1}{4} \left| 1 + C \exp \left(-\frac{i\pi\lambda z}{d^2} \right) \cos \left(2\pi \frac{x}{dT} \right) \right|^2. \quad (15)$$

На основании (9) интенсивность дифракционного изображения синусоидальной решетки при освещении источником квазимонохроматического излучения, имеющего ширину b и равномерную интенсивность, запишется

$$I_{\text{чк}}(x) \sim \frac{1}{4} \int_{x-zb/2R}^{x+zb/2R} \left| 1 + C \exp \left(-i \frac{\pi\lambda z}{d^2} \right) \cos \left(2\pi \frac{x'}{Td} \right) \right|^2 dx' \quad (16)$$

или

$$I_{\text{чк}}(x) \sim \frac{4\pi zb}{TRd} \left(1 + \frac{C^2}{2} \right) + \varepsilon C \sin \left(\frac{\pi bz}{TRd} \right) \cos \left(\frac{\pi\lambda z}{d^2} \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{Td} \right) + C^2 \sin \left(\frac{2\pi bz}{TRd} \right) \cos \left(\frac{4\pi x}{Td} \right). \quad (17)$$

Выражая с помощью (10) z через параметр $p=l/m$ и вводя обозначения

$$\gamma = \frac{bd}{R\lambda}, \quad \alpha = \pi\gamma p, \quad \beta = \pi T p, \quad (18)$$

получим в результате анализа (17) выражения для контраста дифракционных изображений синусоидальной решетки: если выполнено условие

$$|\cos(\beta)| > C |\cos(\alpha)|, \quad (19)$$

то

$$V = \frac{8C |\sin(\alpha) \cos(\beta)|}{2\alpha(C^2 + 2) + C^2 \sin(2\alpha)}, \quad (20a)$$

в противном случае

$$V = \frac{|\sin(\alpha)| (C |\cos(\alpha)| + |\cos(\beta)|)^2}{\alpha(C^2 + 2) + \text{sign}[\cos(\alpha) \cos(\beta)] \sin(\alpha) \cos(\beta) (2C |\cos(\alpha)| - |\cos(\beta)|)}, \quad (20b)$$

где sign — знаковая функция.

Выражения (20) представляют собой обобщение результата [1], так как справедливы для любых саморепродуцированных изображений периодического синусоидального транспаранта и позволяют исследовать зависимость контраста от любого параметра дифракционного эксперимента и тем самым реализовать измерительные задачи этих параметров по данным измерений контраста, а именно возможность измерять степень когерентности, размеры источника, расстояние до источника и расстояния до плоскостей наблюдения, причем в последнем случае, если в качестве экрана использован диффузный объект с выпуклым рельефом, решить соответствующую топографическую задачу и, что особенно важно, в реальном масштабе времени [9, 10].

Следует отметить, что масштабный коэффициент T , связывающий подобные дифракционные картины при различных типах освещения, зависит от расстояния до плоскости наблюдения (10) или от параметра p , поэтому

$$T = \left(1 - p \frac{d^2}{R\lambda} \right)^{-1} = \left(1 - p\gamma \frac{d}{b} \right)^{-1}. \quad (21)$$

Если ограничиться действительными дифракционными изображениями [10], то параметр $p \in (0, R\lambda/d^2)$.

Из (20) следует, что контраст не может быть равным нулю, если освещение полностью когерентно. В данном рассмотрении апертура периодической решетки бесконечна, влияние ограниченных размеров исследовано в [8, 11]. Выбор выра-

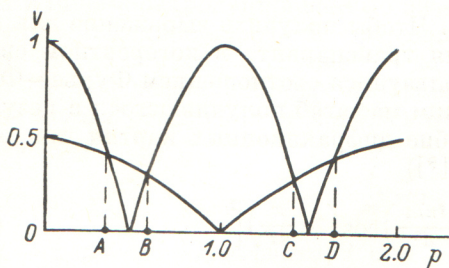


Рис. 1. Графическое решение неравенства (19): $\cos(\pi T p) > C \cos(\pi \gamma p)$, $C=0.5$, $\gamma=0.5$, $T=1$. Отрезки (AB) и (CD) соответствуют области действия уравнения (20б), вне этих отрезков контраст рассчитывается по формуле (20а).

жения для расчета контраста зависит от положения плоскости наблюдения, степени когерентности излучения, а также исходного контраста синусоидальной решетки, связанных в неравенстве (19). Графическая иллюстрация неравенства представлена на рис. 1, на котором отрезки (AB) и (CD) соответствуют области действия уравнения (20б), включающей нули функции $\cos(\beta)$, и на которой контраст достигает своих локальных минимумов в точках смены знака

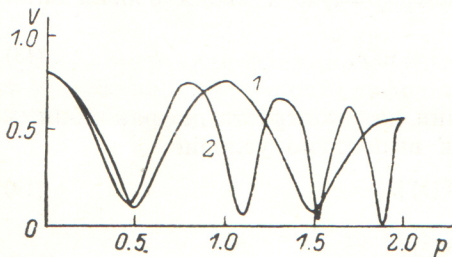


Рис. 3. Графики изменения контраста подобных дифракционных изображений, полученных от одинаковых решеток при освещении плоской волной (1) и сферической (2).

Параметр частичной когерентности $\gamma=0.25$, размер источника равен периоду решетки: $b=d$.

функции $\cos(\alpha) \cos(\beta)$, а так как в пределах каждого из отрезков $\cos(\alpha)$ знака не меняет, то локальный минимум достигается в нулях функции $\cos(\beta)$

$$V_{\min} = \frac{C^2}{2 + C^2} \frac{|\sin(\pi \gamma p_{\min})| \cos^2(\pi \gamma p_{\min})}{\pi \gamma p_{\min}}, \quad p_{\min} = \frac{2n + 1}{2T}. \quad (22)$$

Нули контраста находятся вне области, составленной из отрезков типа (AB) и (CD), т. е. в области действия уравнения (20а) и определяются поведением функции $\sin(\alpha)$, описывающей влияние частичной когерентности. Условия нулевого контраста были обсуждены ранее и свелись к множеству критических апертур источника (13). Нулевой контраст достигается в плоскостях наблюдения, определяемых нулями функции $\sin(\alpha)$ (20а),

$$p_0 = \frac{n}{\gamma} = n \frac{R\lambda}{bd}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

На рис. 2 представлены графики изменения контраста в пределах до первого саморепродуцированного изображения $p \leq 2$ для случая освещения плоской волной $T=1$ при $\gamma=0.5$ и 0.25 . Из сравнения графиков видно, что изменение степени когерентности неодинаково сказывается на различных дифракционных изображениях, так на интервале изменения параметра p от 0 до 0.8 изменение степени когерентности в 2 раза не влияет на контраст в пределах единиц пре-

цента, тогда как вблизи максимости саморепродукции изменения контраста намного чувствительнее, он падает до нуля. На рис. 3 продемонстрировано влияние типа освещения на контраст дифракционных изображений в случае $\gamma=0.25$ и $b=d$. Из сравнения графиков видно, что при сферическом фронте освещения частота колебаний контраста повышается с расстоянием, контраст подобных дифракционных изображений может меняться в любую сторону, как и оставаться неизменным. Следует отметить, что в отличие от графиков на рис. 2 параметр p на рис. 3 отмечает только подобные дифракционные изображения, расположенные на различных расстояниях от транспаранта. В данном конкретном случае масштаб расстояний для графика 1, как следует из (10) и (18), в 2 раза больше, чем для графика 2, а расстояние до источника равно расстоянию до первого саморепродуцированного изображения.

Литература

- [1] Fujiwara H. — Opt. Acta, 1974, v. 21, N 11, p. 861—869.
- [2] Deckers Ch. — Nouv. Rev. Optique, 1975, v. 6, N 4, p. 197—202.
- [3] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1970, с. 553.
- [4] Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М., 1970, с. 87.
- [5] Brungdahl O. — JOSA, 1973, v. 63, N 4, p. 416—419.
- [6] Wang Y., Fan X. — Chin. J. Lasers, 1984, v. 11, N 2, p. 78—82.
- [7] Winthrop J. T., Worthington C. R. — JOSA, 1965, v. 55, N 4, p. 373—381.
- [8] Смирнов А. П. — Опт. и спектр., 1978, т. 44, в. 2, с. 359—365.
- [9] Chavel P., Stranc T. C. — Appl. Opt., 1984, v. 23, N 6, p. 862—871.
- [10] Leger J. R., Snyder M. A. — Appl. Opt., 1984, v. 23, N 10, p. 1655—1670.
- [11] Deckers Ch. — Nouv. Rev. Optique, 1976, v. 6, N 4, p. 197—202.

Поступило в редакцию 6 января 1986 г.