

УДК 621.396.67

## Метод конечных элементов в прикладной электродинамике

В.П. Кудин

Излагаются основные идеи, возможности и преимущества метода конечных элементов (МКЭ). Описана общая схема МКЭ, на примере одномерного дифференциального уравнения второго порядка изложена идея МКЭ. Обсуждены векторный МКЭ и решение систем линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей. Приведены примеры решения задач электродинамики с помощью МКЭ.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения в частных производных, метод конечных элементов, система линейных алгебраических уравнений, разреженная матрица.

The paper outlines the main ideas, possibilities and advantages of the finite element method (FEM). The general scheme of an FEM is described; with the example of a one-dimensional differential equation of the second order the idea of an FEM is presented. The vector FEM and the solution of systems of linear algebraic equations with a sparse matrix are discussed. Examples of the solution of the electrodynamics problems with the help of FEM are given.

**Keywords:** partial differential equations, finite element method, system of linear algebraic equations, sparse matrix.

**Введение.** На сегодняшний день метод конечных элементов (МКЭ) является общепризнанным основным методом численного анализа в целом ряде областей науки и техники. Созданные на его основе комплексы программ широко используются в различных областях: строительстве, кораблестроении, аэрокосмической и автомобильной промышленности, акустике, оптике и т. д. По своей сущности – это вариационный метод с кусочно-полиномиальными базисными функциями, обладающий большой гибкостью и применимый к широкому классу уравнений в частных производных. Он позволяет достаточно точно описать сложные криволинейные границы области определения решения и краевые условия. В отличие от метода конечных разностей МКЭ обеспечивает единственность приближенного решения во всех точках рассматриваемой области и является значительно более эффективным на практике.

МКЭ имеет историю более чем 70 лет. Он был впервые предложен в 1940-х гг. Курантом для решения проблем равновесия и вибрации [1], и его использование началось в 1950-е гг. для проектирования самолетов. После этого метод стал широко применяться к задачам теории упругости и структурного анализа и все чаще к проблемам в других областях, таких как динамика жидкости и электромагнетизм.

МКЭ имеет непревзойденные возможности для моделирования сложных геометрических конструкций с разнообразными материалами. При использовании неструктурированных сеток с криволинейными треугольниками и тетраэдрическими элементами, метод может точно моделировать искривленные поверхности, тонкие структуры, а также различные материалы. Хотя МКЭ требует решения систем уравнений высокого порядка, сама матрица является разреженной и часто симметрической, что позволяет использовать эффективные методы решения. Кроме того, МКЭ хорошо подходит для параллельных вычислений за счет использования различного рода разложений. МКЭ решает дифференциальные уравнения в частных производных напрямую, без использования функций Грина. Как таковой, он требует дискретизации трехмерной области, окружающей исследуемый объект, и усечения этой области, чтобы сделать ее конечной. Надлежащая технология усечения была одним из главных пред-

методов исследования для анализа МКЭ антенных задач, и в настоящее время разработан ряд плодотворных подходов. Кроме того, созданы разнообразные высокоэффективные и надежные алгоритмы и программы для генерации сетки разбиения.

В данной работе излагаются основные идеи МКЭ, его возможности и преимущества с целью привлечения исследователей к его использованию.

**Общая схема МКЭ.** Типичная граничная задача в заданной области  $V$  может быть определена с помощью дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений)

$$L\overset{\rightharpoonup}{u} = f, \quad (1)$$

вместе с граничными условиями на границе  $S$  области  $V$ .

Общая процедура решения граничной задачи (1) с помощью МКЭ состоит из следующих шагов.

Первоначально область  $V$  делится на ячейки или элементы. Например, двумерная область может быть разбита на треугольники или четырехугольники (рисунок 1).

Искомое решение представляется в виде конечного разложения

$$u = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n, \quad (2)$$

по выбранной системе базисных функций  $\varphi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , максимально полно учитывающих особенности решения (что позволит уменьшить число слагаемых в (2)). В общем случае базисные функции представляют собой полиномы невысокой степени, отличные от нуля лишь в нескольких соседних элементах (так называемые функции подобластей).

Потребуем, чтобы разность  $r = L\overset{\rightharpoonup}{u} - f$  была минимально возможной. В общем случае сделать ее равной нулю во всех точках области нельзя, но можно добиться этого в среднем.

Выбираем тестовые или весовые функции  $\psi_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$  в таком же количестве, что и базисные. Если весовые функции совпадают с базисными, то в таком случае метод называется методом Галеркина.

Из условия  $\langle r\psi_m \rangle = \int_V r\psi_m dv = \int_V [L\overset{\rightharpoonup}{u} - f]\psi_m dv = 0$  получаем систему линейных алгебраических уравнений, решение которой дает набор коэффициентов разложения искомой функции по базисным.

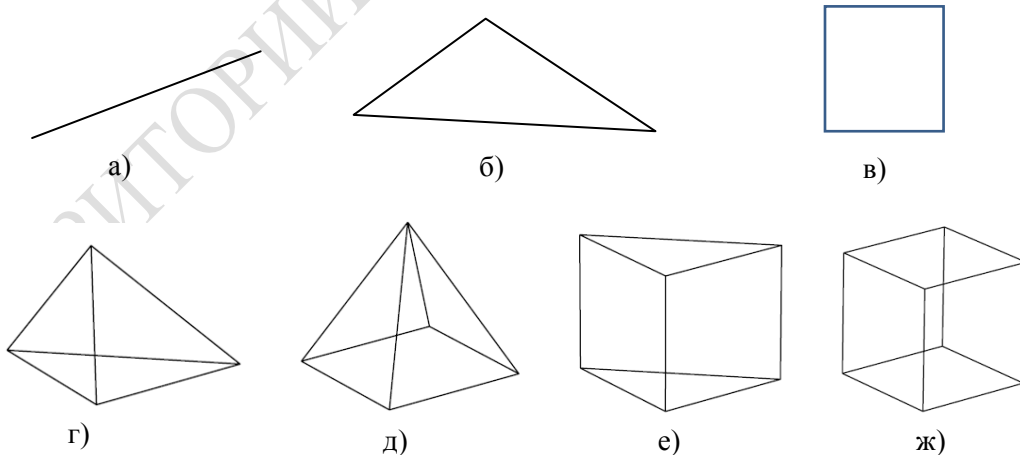


Рисунок 1 – Примеры конечных элементов:

а) для одномерной задачи; б), в) для двумерной задачи; г), д), е), ж) для трехмерной задачи

**МКЭ в одномерном случае.** Идею МКЭ рассмотрим на примере решения одномерного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$-\frac{d}{dx} \left[ \alpha \overset{\rightharpoonup}{\frac{du}{dx}} \right] + \beta \overset{\rightharpoonup}{u} = f, \quad a \leq x \leq b, \quad (3)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u|_{x=a} = u_a, \quad u|_{x=b} = u_b. \quad (4)$$

Подобное дифференциальное уравнение возникает, например, при исследовании распространения плоской волны в неоднородной среде.

Согласно общей схеме МКЭ весь отрезок  $[a,b]$  делится на  $N$  подынтервалов (элементов), вообще говоря, разной длины  $\Delta_n = x_{n+1} - x_n$ ,  $n=1,2,\dots,N$ , где  $x_n$ ,  $n=1,2,\dots,N+1$  – концы элементов, называемые узлами. При этом,  $x_1 = a$ ,  $x_{N+1} = b$ . Мы введем узловые базисные функции  $\varphi_n(x)$ ,  $n=1,2,\dots,N+1$ , отличные от нуля только на двух соседних элементах, за исключением крайних (при  $n=1$  и  $n=N+1$ ), которые определены на одном элементе. Эти функции линейны на каждом элементе, равны единице на общем узле (к которому привязаны) и нулю на двух оставшихся узлах. Математически эти базисные функции выражаются формулой

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} < x \leq x_n, \quad n = 2,3,\dots,N+1 \\ \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n}, & x_n < x \leq x_{n+1}, \quad n = 1,2,\dots,N \end{cases}. \quad (5)$$

Данные базисные функции хорошо известны в теории тонкопроволочных антенн и носят название треугольных базисных функций.

Таким образом, решение задачи (3), (4) ищется в виде конечного ряда

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N+1} c_n \varphi_n(x). \quad (6)$$

Для выбранных базисных функций в соответствии с (5) и (6) в узловых точках  $u(x_n) = c_n$ ,  $n=2,3,\dots,N$ . Кроме того, на концах отрезка  $[a,b]$  согласно (4)  $c_1 = f(a)$ ,  $c_{N+1} = f(b)$ .

На следующем шаге, следуя схеме метода Галеркина, выберем весовые функции  $\psi_m(x) = \varphi_m(x)$ ,  $m=2,3,\dots,N$ . При этом концевые точки исключены, поскольку соответствующие коэффициенты уже известны. Умножим исходное уравнение (3) на весовые функции и проинтегрируем на интервале  $[a,b]$ . Применяя интегрирование по частям, смысл которого в понижении порядка производных, и учитывая равенство нулю весовых функций на концах, получим  $(N-1)$  соотношение для  $m=2,3,\dots,N$ :

$$\int_a^b \left[ \alpha \left( \varphi_m \frac{d\psi_m}{dx} \frac{du}{dx} + \beta \psi_m \ddot{u} - \psi_m f \right) dx = 0. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), учитывая, что коэффициенты известны, после перегруппировки получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из  $(N-1)$  уравнений относительно  $(N-1)$  неизвестных  $c_2, c_3, \dots, c_N$ :

$$\begin{pmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,N} \\ A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & A_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,2} & A_{N,3} & \dots & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{2,1}c_1 + A_{2,N+1}c_{N+1} \\ A_{3,1}c_1 + A_{3,N+1}c_{N+1} \\ \vdots \\ A_{N,1}c_1 + A_{N,N+1}c_{N+1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь элементы матрицы  $\mathbf{A}$  и столбца правой части  $\mathbf{b}$  есть

$$A_{m,n} = \int_a^b \left[ \alpha \left( \varphi_m \frac{d\psi_m}{dx} \frac{d\varphi_n}{dx} + \beta \psi_m \ddot{\varphi}_n \right) dx = 0, \quad (9)$$

$$b_m = \int_a^b \psi_m f dx, \quad (10)$$

причем индексы в (9), (10) принимают значения  $m,n=1,2,\dots,N+1$ .

В компактном виде СЛАУ (8) может быть записана в виде

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{B}^{<1>}c_1 - \mathbf{B}^{<N+1>}c_{N+1}.$$

В последнем выражении матрица  $\mathbf{B}$  представляет собой матрицу  $\mathbf{A}$ , из которой удалили крайние (первый и последний) столбцы и крайние строки. Аналогично вектор  $\mathbf{d}$  получается удалением из вектора  $\mathbf{c}$  первого и последнего элементов. Верхними угловыми скобками обозначена операция извлечения из матрицы соответствующего столбца.

Из (9) следует, что матрица  $\mathbf{A}$  является симметрической, если весовые функции взяты такими же, как и базисные (метод Галеркина). Кроме того, для базисных функций вида (5), да и вообще любых, отличных от нуля только на двух соседних интервалах, матрица  $\mathbf{A}$  будет иметь ненулевые элементы только на трех диагоналях: главной, и двух соседних. Таким образом, матрица  $\mathbf{A}$  является разреженной, что позволяет использовать эффективные и экономичные алгоритмы решения СЛАУ с подобными матрицами. Это обстоятельство является ключевым для МКЭ и позволяет решать с его помощью системы большой размерности. Вторым ключевым обстоятельством, как уже указывалось при выводе формулы (9), является отсутствие вторых производных базисных и весовых функций в данной формуле, что крайне важно при построении численной процедуры решения.

Аналогично решается и задача Неймана, когда на концах заданного отрезка накладываются граничные условия на производную искомой функции. В этом случае СЛАУ (8) должна быть дополнена двумя уравнениями, получающимися при использовании весовых функций  $\psi_1$  и  $\psi_{N+1}$ , а коэффициенты  $c_1, c_{N+1}$  также должны быть найдены в процессе решения.

**Векторный МКЭ.** При решении векторных уравнений Максвелла в трехмерной области с помощью МКЭ возможно появление ложных мод при неудачном выборе сетки дискретизации. Причина заключается в том, что узловые базисные функции для каждой из трех декартовых компонент поля принципиально не обеспечивают непрерывность производных полей. Поэтому в этом случае необходимо применять векторные конечные элементы [2], получившие по имени их создателя название «элементы Неделека». В отличие от классического узлового МКЭ базисные функции векторного МКЭ связаны не с узлами дискретизации, а с ребрами и гранями ячейки дискретизации. Именно последнее обстоятельство и обеспечивают непрерывность производных полей.

Векторные конечные элементы имеют определенные преимущества перед классическими узловыми конечными элементами:

- ВКЭ базисные функции позволяют естественным образом учитывать граничные условия для тангенциальных или нормальных компонент полей.
- ВКЭ базисные функции корректно описывают электромагнитные поля при наличии различных по свойствам областей, обеспечивая непрерывность нормальной или тангенциальной компонент решения, допуская разрывность другой.
- Использование ВКЭ при решении задачи на собственные значения не приводит к появлению ложных мод на любых типах сеток.

**Решение СЛАУ с разреженной матрицей.** При решении задач с помощью МКЭ, особенно в трехмерном векторном случае, получаются СЛАУ с матрицами большой размерности. Здесь число неизвестных может составлять несколько миллиардов или более. Поэтому использование обычных процедур, вроде метода Гаусса, применяемых для матриц общего вида, невозможно. Ситуацию спасает то, что метод конечных элементов порождает разреженные матрицы, т. е. такие, в которых количество отличных от нуля элементов сравнительно невелико, причем все они сгруппированы вблизи главной диагонали с всегда ненулевыми элементами. В таком случае имеет место существенная экономия машинного времени и памяти при вычислении самих матричных элементов (поскольку их мало) и их хранения (поскольку достаточно хранить только сами элементы и их местоположение). Также удастся построить эффективные алгоритмы умножения матрицы на вектор и методы решения СЛАУ (итерационные и др.) [3], [4].

**Примеры решения задач электродинамики с помощью МКЭ.** Здесь приводятся некоторые результаты, которые демонстрируют возможности МКЭ.

В работе [5] предложена модель для электродинамического моделирования тонких проводников – классической задачи, традиционно и естественно решаемой методом инте-

гральных уравнений. Уравнения Максвелла дискретизируются с помощью разбиения на тетраэдры. Ток на проводнике описывается дифференциальным уравнением второго порядка.

В качестве примера рассмотрен тонкий провод длиной 41 м и радиусом 10 мм. Провод дискретизируется 42 тетраэдрами с длиной ребра 1,08 м. Антенна возбуждается в средней точке источником напряжения. Была проведена проверка метода при различных относительных положениях провода и сетки.

На рисунке 2 показана частотная зависимость входного сопротивления тонкого провода при различных сетках и в сравнении с результатами, полученными методом моментов. Хорошо видно, что от сетки результаты не зависят, в то время как с повышением частоты расхождения с методом моментов увеличиваются.

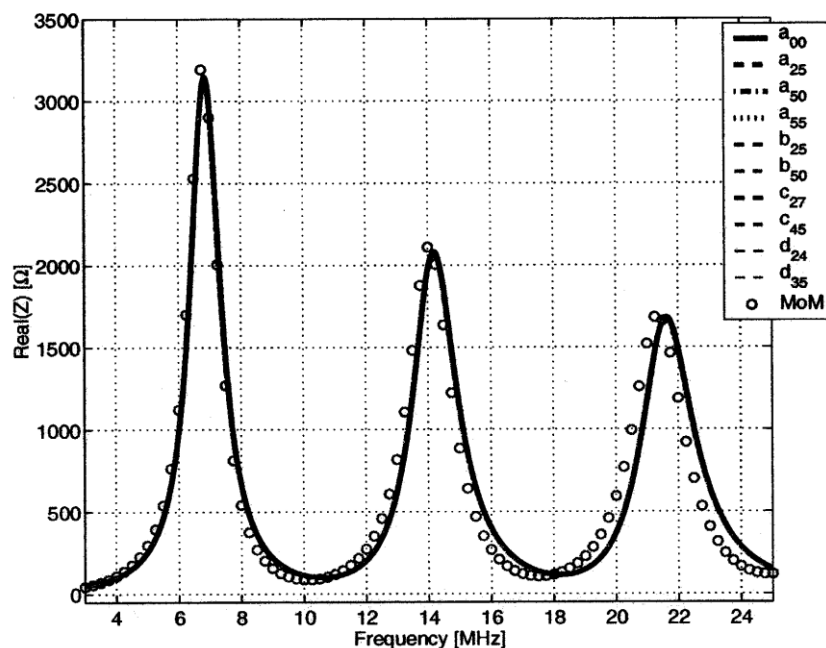


Рисунок 2 – Частотная зависимость входного сопротивления тонкого провода [6] при различных сетках (сплошная кривая) и в сравнении с результатами, полученными методом моментов (кружочки)

Ряд работ посвящен применению метода конечных элементов для анализа двоякопериодических структур. В частности, в [6] предложена формулировка трехмерного МКЭ во временной области применительно к расчету рассеяния наклонно падающей плоской волны на бесконечной двоякопериодической структуре, основанная на использовании единичной ячейки. При этом вся частотная характеристика может быть получена путем единственного вычисления. Метод развит для задачи рассеяния, однако он может быть непосредственно распространен и на задачи излучения.

В [7] предложен быстрый метод моделирования конечных решеток произвольных трехмерных элементов. Метод использует повторяющийся характер конечных решеток и трехмерную функцию Грина, на основе которых создается блочно-теплицева структура СЛАУ. Это позволяет существенно уменьшить требования к памяти и применить быстрое преобразование Фурье для ускорения матрично-векторного умножения в итерационном процессе решения. Каждый элемент решетки моделируется на основе МКЭ и интегральных уравнений. Все это в совокупности дает метод, который гораздо эффективнее прямого МКЭ в части затрат времени и памяти.

В [8] МКЭ используется для анализа и оптимизации 8-канального модуля из антенн Вивальди совместно с диаграммообразующей схемой (рисунок 3). Модуль формирует веер из 8-ми независимых лучей в диапазоне частот 8...12 ГГц.

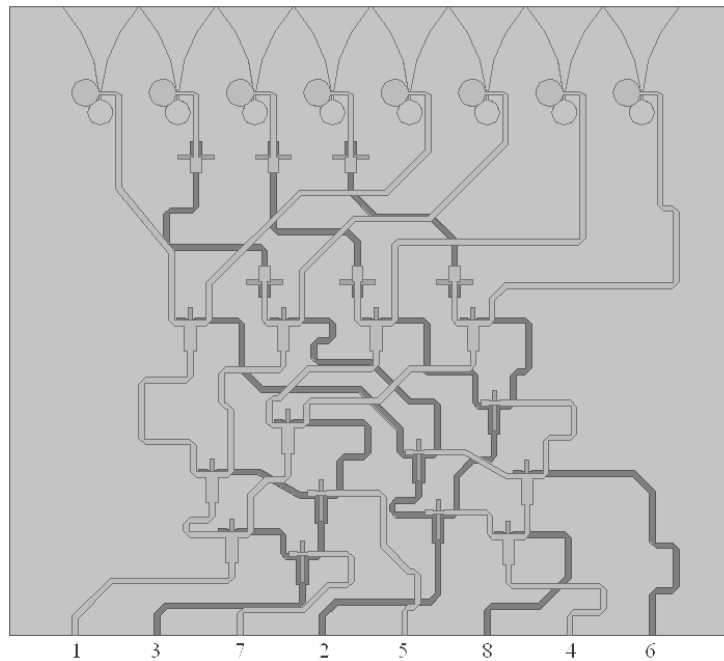


Рисунок 3 – Антенный модуль на основе антенны Вивальди с восьмиканальной параллельной диаграммообразующей схемой

**Программные продукты, реализующие МКЭ.** Программный комплекс HFSS (аббревиатура от High Frequency Structural Simulator) американской компании ANSYS в настоящее время является, по-видимому, наиболее популярным инструментом радиоинженеров для проектирования электронных приборов и антенных систем. Он предлагает набор встроенных модулей, основанных на МКЭ, методе интегральных уравнений, асимптотических методах физической оптики и гибридных лучевых методах, для решения широкого круга задач практически во всем частотном диапазоне.

HFSS использует трехмерный векторный вариант МКЭ в частотной области. Это позволяет определить все интересующие параметры –  $S$ -,  $Y$ -,  $Z$ -матрицы, трехмерные поля в ближней и дальней зонах и провести удобную визуализацию результатов.

HFSS обладает автоматической технологией построения сетки, которая требует лишь задания геометрии и свойств материала. В качестве элемента используется тетраэдр, что дает возможность адекватно геометрически и электродинамически описать практически любой объект. Сеточная технология позволяет уменьшить затраты машинной памяти и времени вычислений. HFSS также позволяет использовать криволинейные элементы. Эти элементы конформны любой связанной криволинейной поверхности, что в итоге дает высшую степень точности описания геометрии.

Модуль HFSS во временной области основан на трехмерном МКЭ для временной области и той же процедуре автоматического построения сетки на основе тетраэдров.

Программный комплекс CST MICROWAVE STUDIO является частью комплекса программ для моделирования электромагнитного поля CST STUDIO SUITE немецкой (а теперь международной) компании CST – Computer Simulation Technology, которая продолжает динамично развиваться. Комплекс включает инструменты для проектирования и оптимизации устройств, работающих в широком диапазоне частот – от статических до оптических. Анализ может включать тепловые и механические эффекты, также как и моделирование цепей.

В последние годы активно развивается пакет COMSOL Multiphysics, который позволяет моделировать практически все физические процессы, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Программа содержит различные решатели, которые позволяют справиться даже с самыми сложными задачами, а простая структура приложения обеспечивает простоту и гибкость использования. Решение любой задачи базируется на численном решении уравнений в частных производных с помощью МКЭ.

Спектр задач, которые поддаются моделированию в пакете, чрезвычайно широк. Он позволяет решать задачи из области электромагнетизма, теории упругости, динамики жидкостей и газов, химической газодинамики, термодинамики и многих других. Набор специальных модулей в программе охватывает практически все сферы приложений уравнений в частных производных. У пользователя есть также возможность построить и решить свою систему уравнений. Замечательной особенностью пакета COMSOL Multiphysics является возможность взаимодействия модулей, решающих разные физические задачи. Например, можно совместно исследовать взаимодействующие электромагнитные и тепловые процессы в электрических машинах.

**Заключение.** Таким образом, в настоящее время наблюдается тенденция доминирования МКЭ в области численных процедур решения задач прикладной физики и техники.

Достоинства МКЭ:

- Возможность решения векторных трехмерных (или четырехмерных – включая время) систем дифференциальных уравнений в частных производных.
- Естественное включение граничных условий на поверхностях раздела сред.
- Результирующие матрицы являются разреженными – ненулевые элементы сгруппированы вблизи главной диагонали, что позволяет построить эффективные методы решения СЛАУ с такими матрицами.
- Количество неизвестных может достигать  $10^9$ – $10^{10}$ .

### Литература

1. Courant, R.L. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration / R.L. Courant // Bull. Am. Math. Soc. – 1943. – Vol. 49. – P. 1–23.
2. Nedelec, J.C. A new family of mixed finite elements in  $R^3$  / J.C. Nedelec / Numer. Math. – 1986. – Vol. 50. – P. 57–81.
3. Писсанецки, С. Технология разреженных матриц / С. Писсанецки. – М. : Мир, 1988. – 410 с.
4. Баландин, М.Ю. Методы решения СЛАУ большой размерности / М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.
5. Edelvik, F. An Unconditionally Stable Subcell Model for Arbitrarily Oriented Thin Wires in the FETD Method / F. Edelvik [et al] // IEEE Transactions. – 2003. – Vol. AP-51, № 8. – P. 1797–1805.
6. Rickard Petersson, L.E. A Three-Dimensional Time-Domain Finite-Element Formulation for Periodic Structures / L.E. Rickard Petersson, J.M. Jin // IEEE Transactions. – 2006. – Vol. AP-54, № 1. – P. 12–19.
7. Kindt, R.W. Array Decomposition Method for the Accurate Analysis of Finite Arrays / R.W. Kindt [et al] // IEEE Transactions. – 2003. – Vol. AP-51, № 6. – P. 1364–1372.
8. Фаняев, И.А. Топология и характеристики антенного модуля X-диапазона / И.А. Фаняев, В.П. Кудин // Доклады БГУИР. – 2014. – № 4 (82). – С. 87–92.

Гомельский филиал университета  
гражданской защиты МЧС РБ

Поступила 27.03.2017