Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (102), 2017

УДК 519.85

К методам построения оптимальных параметров целевой функции в задачах дробно-линейного потокового программирования

Л.А. Пилипчук

Предлагаются математические модели и методы решения следующей обратной задачи дробно-линейного программирования (ДЛП). Дана задача ДЛП и выбрано одно из ее допустимых решений. Требуется минимально изменить коэффициенты целевой функции задачи, чтобы выбранное допустимое решение стало оптимальным. Мера близости векторов (допустимых решений) оценивается с помощью нормы l_1, что позволяет оставаться в рамках линейного программирования (ЛП). Для решения задачи, которая является двойственной к обратной задаче потокового программирования, разработан конструктивный метод декомпозиции ограничений.
Ключевые слова: линейное программирование, дробно-линейное программирование, обратная задача дробно-линейного программирования, двойственность, разреженные системы линейных алгебраических уравнений, конструктивная теория декомпозиции, норма.

Mathematical models and methods for solving the following inverse linear-fractional programming (LFP) problem are proposed. For a given LFP problem and one of its feasible solutions, it is required to adjust the objective function coefficients as little as possible so that the given feasible solution becomes optimal. The closeness of vectors (of feasible solutions) is estimated by means of the l_1 norm. This makes it possible stay within the framework of linear programming (LP). To solve the problem that is dual to the inverse of network flow programming problem, a constructive method for decomposing constraints has been developed.
Keywords: linear programming, linear-fractional programming, inverse linear-fractional programming problem, duality, sparse systems of linear algebraic equations, constructive theory of decomposition, norm.

1. Математические модели прямой и обратной задач дробно-линейного потокового программирования. Пусть $S = (V, E)$ – конечный связный граф, V – множество узлов и E – множество дуг, определенных на $V \times V$ $(|V| < \infty, |E| < \infty)$. Рассмотрим математическую модель прямой задачи дробно-линейного потокового программирования с взаимосвязью дуговых потоков:

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum\limits_{(i,j)\in E} p_{ij}x_{ij} + \beta}{\sum\limits_{(i,j)\in E} q_{ij}x_{ij} + \gamma} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(E)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(E)} x_{ji} = b_i, i \in V, \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in E} \lambda_{ij}^p x_{ij} = \alpha_p, \quad p = \overline{1,l}, \quad x_{ij} \ge 0, (i,j) \in E. \tag{3}$$

Вектор $x = x_{ij}, (i,j) \in E$ – допустимое решение задачи (1)–(3), если выполняются ограничения (2)–(3), X – множество допустимых решений, $x \in X$. $p_{ij}, q_{ij}, \beta, \gamma, b_i, \lambda_{ij}^p, \alpha_p$ – параметры задачи (1)–(3), $I_i^+(E) = j \in V : (i,j) \in E$, $I_i^-(E) = j \in V : (j,i) \in E$. Знаменатель $q(x)$ дробно-линейной целевой функции (1) не меняет знак на множестве X. Положим $q(x) > 0$, $\forall x \in X$.

Предположим, что неточными данными [1] являются параметры p_{ij}, $(i,j) \in E$ дробно-линейной функции (1). Для изменения параметров p_{ij}, $(i,j) \in E$ применим принципы обратной оптимизации [2]–[5].

Теорема 1. Если заданного допустимого решения $x^0 = x_{ij}^0, (i,j) \in E$ прямой задачи (1)–(3) и некоторого допустимого решения (y, r, z) двойственной задачи:

$$g(y,r,z) = z \to \max,$$
$$y_i - y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} r_p + q_{ij} z \le c_{ij},\ (i,j) \in E, \tag{4}$$
$$-\sum_{i \in I} a_i y_i - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \gamma z = \beta,$$

$z \in R^1,\ y = (y_i, i \in I),\ r = (r_p, p = \overline{1,l})$ выполняются условия:

$$(y_i - y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} r_p + q_{ij} z - c_{ij}) x_{ij}^{0} = 0,\ (i,j) \in E, \tag{5}$$

то x^0 – оптимальное решение задачи (1)–(3).

Доказательство *теоремы 1* аналогично [5] для случая фиксированного потока в неоднородной задаче линейной оптимизации с неточными данными.

2. Математические модели и конструктивные методы для определения минимальных изменений параметров целевой функции. Для задачи (1)–(3) построим математическую модель обратной задачи. Обозначим через θ_{ij} – увеличение и ψ_{ij} – уменьшение параметра p_{ij}, $\theta_{ij} \ge 0$, $\psi_{ij} \ge 0$, $(i,j) \in E$, при этом изменения θ_{ij} и ψ_{ij} каждого параметра p_{ij} не могут одновременно принимать положительные значения: $\theta_{ij}\psi_{ij} = 0, (i,j) \in E$. Пусть $\tilde{p}_{ij} = p_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij}$, $(i,j) \in E$ – новые параметры целевой функции (1). Введем норму

$$l_1 = \|\tilde{p} - p\|_1 = \sum_{(i,j) \in E} \left|\tilde{p}_{ij} - p_{ij}\right| = \sum_{(i,j) \in E} \left|\theta_{ij} - \psi_{ij}\right| = \sum_{(i,j) \in E} (\theta_{ij} + \psi_{ij}).$$

Математическая модель обратной задачи для определения минимальных изменений параметров $p_{ij}, (i,j) \in E$ имеет следующий вид:

$$u(\theta,\psi) = -\sum_{(i,j) \in E} (\theta_{ij} + \psi_{ij}) \to \max, \tag{6}$$

$$y_i - y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} r_p + q_{ij} z - \theta_{ij} + \psi_{ij} \le p_{ij},\ (i,j) \in B_1,$$
$$y_i - y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} r_p + q_{ij} z - \theta_{ij} + \psi_{ij} = p_{ij},\ (i,j) \in B_2, \tag{7}$$
$$-\sum_{i \in I} b_i y_i - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \gamma z = \beta,$$

$$\theta_{ij} \ge 0, \psi_{ij} \ge 0, (i,j) \in E, B_1 = \{(i,j) \in E : x_{ij}^0 = 0\}, B_2 = \{(i,j) \in E : x_{ij}^0 > 0\},$$

где $x^0 = \{x_{ij}^0, (i,j) \in E\}$ – известное допустимое решение задачи (1)–(3).

Для нахождения минимальных изменений θ_{ij} и ψ_{ij}, $(i,j) \in E$ параметров $p_{ij}, (i,j) \in E$ целевой функции (1) для обратной задачи (6)–(7) построим двойственную задачу, которая имеет следующий вид:

$$f(z,t) = \sum_{(i,j) \in E} p_{ij} z_{ij} + \beta t \to \min, \tag{8}$$
$$\sum_{j \in I_i^+(E)} z_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(E)} z_{ji} - b_i t = 0,\ i \in V, \tag{9}$$
$$\sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ij}^{p} z_{ij} - \alpha_p t = 0, \quad p = \overline{1,l},$$
$$\sum_{(i,j) \in E} q_{ij} z_{ij} + \gamma t = 0, \tag{10}$$
$$0 \le z_{ij} \le 1, (i,j) \in B_1, \quad B_1 = \{(i,j) \in E : x_{ij}^0 = 0\}; \quad \left|z_{ij}\right| \le 1, (i,j) \in E \setminus B_1, \tag{11}$$

где $(z,t) = (z_{ij}, (i,j) \in E; t)$ – допустимое решение задачи (8)–(11), $(z,t) \in Z$. Заметим, что вектор (z,t), где $t = 0$, $z = \ z_{ij} = 0, (i,j) \in E$ является допустимым решением задачи (8)–(11).

Теорема 2. Если $L = \ I_L; E_L$ – опора графа $S = (V,E)$ для системы (9) [6]–[7] и опорная матрица является матрицей инцидентности графа $S = (V,E)$ [7], то общее решение разреженной недоопределенной системы (7) может быть представлено в следующем виде:

$$z_{ij} = \delta_{ij}^{\xi} t + \sum_{(\tau,\rho)\in E\setminus E_L} \delta_{ij}^{\tau\rho} z_{\tau\rho}, (i,j) \in E_L, \tag{12}$$

где совокупность векторов $\delta(\tau,\rho) = \ \delta_{ij}^{\tau\rho}, (i,j) \in E; \delta^{\tau\rho}$, $(\tau,\rho) \in E \setminus E_L$, порожденных дугами $(\tau,\rho) \in E \setminus E_L$, и вектор $\delta(\xi) = (\delta_{ij}^{\xi}, (i,j) \in E; \delta^{\xi})$ при неизвестной t составляют базис пространства решений однородной системы (9), $t, z_{\tau\rho}$ – свободные переменные, $(\tau,\rho) \in E \setminus E_L$. Совокупность дуг E_L опоры графа $S = (V,E)$ для системы (9) является остовным деревом графа S [7]–[8].

Матрица инцидентности связного графа $S = (V,E)$ графа является матрицей неполного ранга, который равен $|V| - 1$. Для систем неполного ранга в [8]–[9] приведены алгоритмы построения аналитических и численных решений с использованием результатов разреженного матричного анализа и технологий потокового программирования.

Теорема 3. Если $L = \ I_L; E_L, v_t$ – опора графа $S = (V,E)$ для системы (9), где v_t – индекс последнего столбца матрицы системы (9), то общее решение разреженной недоопределенной системы (9) может быть представлено в следующем виде:

$$z_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in E\setminus E_L} \delta_{ij}^{\tau\rho} z_{\tau\rho}, (i,j) \in E_L, \quad t = \sum_{(\tau,\rho)\in E\setminus E_L} \delta^{\tau\rho} z_{\tau\rho}, \tag{13}$$

где векторы $\delta(\tau,\rho) = \ \delta_{ij}^{\tau\rho}, (i,j) \in E; \delta^{\tau\rho}$, $(\tau,\rho) \in E \setminus E_L$, порожденные дугами $(\tau,\rho) \in E \setminus E_L$ составляют базис пространства решений однородной системы (9), $z_{\tau\rho}$ – свободные переменные, $(\tau,\rho) \in E \setminus E_L$ [7]–[8].

Для создания эффективного метода решения задачи (8)–(11) большой размерности исследованы свойства разреженной матрицы системы (9), разработан алгоритм построения базиса пространства решений однородной системы (9) и на его основе получено ее общее решение как линейная комбинация векторов базиса пространства решений. Число операций для вычисления каждого вектора базиса пространства решений пропорционально числу его ненулевых компонент. Для решения задачи (8)–(11) разработаны конструктивные методы декомпозиции разреженных систем линейных алгебраических уравнений с применением технологий потокового программирования [8]–[9]. Разработаны вычислительные технологии для решения больших задач потокового программирования, возникающих на практике, с учетом результатов разреженного матричного и сетевого анализа.

3. Определение минимальных изменений параметров целевой функции. Восстановим компоненты векторов $\theta = \ \theta_{ij}, (i,j) \in E$, $\psi = \ \psi_{ij}, (i,j) \in E$ по оптимальному решению задачи (8)–(11). Имеем два случая: 1) столбец с индексом $v_t \in J_B$ (входит в состав опоры) и 2) столбец с индексом $v_t \notin J_B$ (не входит в состав опоры).

Рассмотрим случай 1): $v_t \in J_B$. Оценки $\tilde{\Delta}_{ij}, (i,j) \in E_N = E \setminus E_B$ для оптимальной опоры E_B графа S для системы (9)–(10) известны:

$$\tilde{\Delta}_{ij} = p_{ij} - \left(u_i - u_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{p} v_p + q_{ij} w \right), (i,j) \in E_N,$$

где потенциалы $u = (u_i, i \in V)$, $v = (v_p, p = \overline{1,l})$, w удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$u_i - u_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p v_p + q_{ij} w = p_{ij}, (i,j) \in E_B,$$
$$-\sum_{i \in V} b_i u_i - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p v_p + \gamma w = \beta. \qquad (14)$$

Из соотношений $\tilde{\Delta}_{ij} = -\theta_{ij} + \psi_{ij}, (i,j) \in E$ определим искомые значения изменений $\theta_{ij}, \psi_{ij}, (i,j) \in E$ параметров $p_{ij}, (i,j) \in E$ дробно-линейной целевой функции (1) следующим образом:

$$\theta_{ij} = \left|\tilde{\Delta}_{ij}\right|, \ \psi_{ij} = 0, \text{если } \tilde{\Delta}_{ij} < 0;$$
$$\theta_{ij} = 0, \ \psi_{ij} = \tilde{\Delta}_{ij}, \text{если } \tilde{\Delta}_{ij} > 0; \qquad (15)$$
$$\theta_{ij} = \psi_{ij} = 0, \text{если } \tilde{\Delta}_{ij} = 0.$$

Рассмотрим случай 2): $v_t \notin J_B$. Вычислим оценки $\tilde{\Delta}_{ij}, (i,j) \in E_N$ и $\tilde{\Delta}$:

$$\tilde{\Delta}_{ij} = p_{ij} - \left(u_i - u_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p v_p + q_{ij} w \right), (i,j) \in E_N = E \setminus E_B,$$
$$\tilde{\Delta} = \beta + \sum_{i \in V} b_i u_i + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p v_p - \gamma w,$$

где E_B – множество опорных дуг оптимальной опоры обобщенного графа S для системы (9)–(10) и потенциалы $u = (u_i, i \in V)$, $v = (v_p, p = \overline{1,l})$, w удовлетворяют следующей системе:

$$u_i - u_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p v_p + q_{ij} w = p_{ij}, (i,j) \in E_B. \qquad (16)$$

Искомые величины $\theta_{ij}, \psi_{ij}, (i,j) \in E$ изменений параметров $p_{ij}, (i,j) \in E$ дробно-линейной целевой функции (1) вычисляются согласно (15).

Окончательно, по оптимальному решению $t, z_{ij}, (i,j) \in E$ задачи (8)–(11) и оптимальной опоре графа $S = (V, E)$ для системы (9)–(10) получены минимальные изменения $\theta_{ij}, \psi_{ij}, (i,j) \in E$ (15) коэффициентов $p_{ij}, (i,j) \in E$ дробно-линейной целевой функции (1). Допустимое решение $x^0 = (x_{ij}^0, (i,j) \in E)$ прямой задачи (1)–(3) является оптимальным решением для новых параметров $\tilde{p}_{ij} = p_{ij} + \theta_{ij} - \psi_{ij}, (i,j) \in E$ числителя дробно-линейной целевой функции (1).

Литература

1. Фидлер М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерман. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 288 с.
2. Burton D. On an instance of the inverse shortest paths problem / D. Burton, Ph. L. Toint // Mathematical Programming. – 1992. – Vol. 53, Is. 1. – P. 45–61.
3. Ahuja, R. K. Inverse Optimization / R.K. Ahuja, J.B. Orlin // Operation Research. – 2001. – Vol. 49, Is. 5. – P. 771–783.
4. Jain, S. An Inverse Capacitated Transportation Problem / S. Jain, N. Arya // IOSR Journal of Mathematics. – 2013. – Vol. 5, Is. 4. – P. 24–27.
5. Пилипчук, Л.А. Методы построения оптимальных параметров целевой функции в неоднородных сетевых задачах линейной оптимизации с неточными данными / Л.А. Пилипчук // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2016. – № 3 (96). – С. 113–117.
6. Габасов, Р. Методы линейного программирования : в 3 ч. / Р. Габасов, Ф.М Кириллова. – Минск : БГУ, 1980. – Ч. 3. Специальные задачи. – 368 с.

7. Пилипчук, Л.А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л.А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2012. – 260 с.

8. Pilipchuk, L.A. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk // American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. – 2015. – Vol. 1690, 060006. – Doi : 10.1063/1.4936744. – 9 p.

9. Pilipchuk, L.A. Computational techniques and data structures of the sparse underdetermined systems with using graph theory / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk // American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc. – 2016. – Vol. 1789, 060014. – Doi : 10.1063/1.4968506. – 7 p.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 13.03.2017