

УДК 535.2

АНОМАЛЬНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ

Елютин С. О., Маймистов А. И.

На языке метода обратной задачи рассеяния с помощью численного моделирования показано, что при определенной скважности падающих на среду оптических импульсов процесс формирования солитонов самопрозрачности имеет аномальный характер. В частности, показано, что два импульса с площадями, достаточными для образования одного 2π -импульса, при определенных условиях эволюционируют в три солитона.

Солитоны за последние годы стали объектом интенсивного изучения [1-3], так как обладают уникальными свойствами и являются весьма полезными в описании коллективных явлений в ряде областей нелинейной физики. Одним из примеров в оптике, в котором солитоны играют важную роль, является самоиндуцированная прозрачность (СИП) [4]. Теория этого явления базируется на укороченных уравнениях Максвелла—Блоха, которые, как выяснилось [5, 6], принадлежат классу вполне интегрируемых систем дифференциальных уравнений в частных производных. Распространяющиеся в резонансной среде без видимого поглощения ультракороткие импульсы (УКИ) света отвечают солитонным решениям этих уравнений, наиболее последовательный анализ которых может быть проведен в рамках метода обратной задачи теории рассеяния (ОЗР) [3, 7].

Число солитонов и их параметры (амплитуда, длительность, фаза) методом ОЗР позволяет определить (по крайней мере численными методами) путем решения определенной линейной задачи на собственные значения, исходя из начального вида огибающей УКИ [8-10]. Интересный результат был получен в [10]: в зависимости от интервала времени, разделяющего два прямоугольных УКИ, последовательно входящих в резонансную среду, число солитонов меняется скачком от одного до трех при условии, что площадь обоих УКИ лежит в определенных пределах. С другой стороны, если исходить из теоремы площадей [4], площадь каждого импульса достаточна для образования из него только одного солитона, так что следует ожидать появления двух солитонов (но не трех или одного).

В настоящей работе дана интерпретация указанной аномалии на языке метода ОЗР. Проведенное затем численное моделирование эволюции УКИ подтверждает предложенную интерпретацию. Кроме того, обнаружено, что, кроме солитонов и линейной дисперсионно-расплывающейся волны, может возникнуть нелинейный, слабо затухающий сигнал, предшествующий солитонам.

Применение метода ОЗР к решению в данном случае уравнений теории СИП оказалось возможным благодаря тому, что уравнения Максвелла—Блоха могут быть представлены в виде матричного уравнения (представление Лакса [1-3])

$$\partial \hat{A} / \partial x = \partial \hat{B} / \partial \tau + \hat{B} \hat{A} - \hat{A} \hat{B}, \quad (1)$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -i\lambda & ie(x, \tau)/2 \\ ie^*(x, \tau)/2 & i\lambda \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \langle N(\Delta\omega + 2\lambda)^{-1} \rangle & \langle P(\Delta\omega + 2\lambda)^{-1} \rangle \\ \langle P^*(\Delta\omega + 2\lambda)^{-1} \rangle & \langle -N(\Delta\omega + 2\lambda)^{-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

Здесь $x=z/L$, $\tau=t-z/c$, L — длина резонансного поглощения, $e(x, \tau) = -pE(z, t)/\hbar$, p — матричный элемент дипольного момента резонансного перехода, $E(z, t)$ — медленно меняющаяся амплитуда электрического поля УКИ, которое распространяется вдоль оси z в среде, характеризующейся разностью населенностей $N(z, t)$ и комплексной поляризацией $P(z, t)$. Угловые скобки обозначают суммирование по всем частотным расстройкам $\Delta\omega$ от центра неоднородно уширенной линии поглощения. С матрицей \hat{A} можно связать некоторую задачу теории рассеяния (или спектральную задачу метода ОЗР)

$$\partial\varphi/\partial\tau = \hat{A}\varphi, \quad (2)$$

где $e(x, \tau)$ играют роль потенциала, отмеченного индексом x , от которого спектральный параметр λ (в том числе собственные значения оператора в уравнении (2)) не зависит. Поведение $e(x, \tau)$ при $|\tau| \rightarrow \infty$ диктует краевые условия к уравнению (2). Если x изменяется непрерывно, то решения (2) $\varphi(\lambda, x, \tau)$ будут функциями $e(x, \tau)$ изменяются согласно уравнению

$$\partial\varphi/\partial x = \hat{B}\varphi. \quad (3)$$

Условие совместности пары линейных задач (2) и (3) приводит к (1). Зная огибающую начального УКИ $e(0, \tau)$, надо, решив (2), определить данные рассеяния для этого потенциала. Их значение при любом x определяется из (3) и решение обратной спектральной задачи (2) — определение потенциала по данным рассеяния — приводит к $e(x, \tau)$, т. е. к решению уравнений теории СИП. Метод ОЗР в принципе позволяет полностью восстановить функцию $e(x, \tau)$ на любой глубине x . Однако практически удается исследовать лишь асимптотическую по x (солитонную) часть решения системы (1). Для нахождения фонового или переходного режима требуется решение линейных дифференциального, а затем интегрального уравнений, что, хотя принципиально и проще самой нелинейной системы (1), часто приводит к непреодолимым трудностям.

В терминах метода ОЗР образование n солитонов означает, что спектральная задача имеет n собственных значений. Из свойств симметрии спектральной задачи следует, что собственные значения λ_k ($k=1, 2, \dots, n$) либо все чисто мнимые (солитоны в этом случае называются 2π -импульсами [4]), либо среди них есть пары λ_k и λ_{k+1} такие, что $\lambda_k^* = -\lambda_{k+1}$ [1-3]. Такой паре отвечают два солитона, имеющие одинаковые групповые скорости и по этой причине не разделяющиеся с ростом координаты x . Эту пару солитонов, проявляющуюся как единый объект, называют бризером (или 0π -импульсом [2]), который не является стационарным решением (1). В [9] было показано, что образование бризера возможно, например, из двух импульсов прямоугольной формы, но сдвинутых по фазе на π .

Как было сразу замечено [4], в теории СИП важным параметром ультракороткого импульса является его площадь

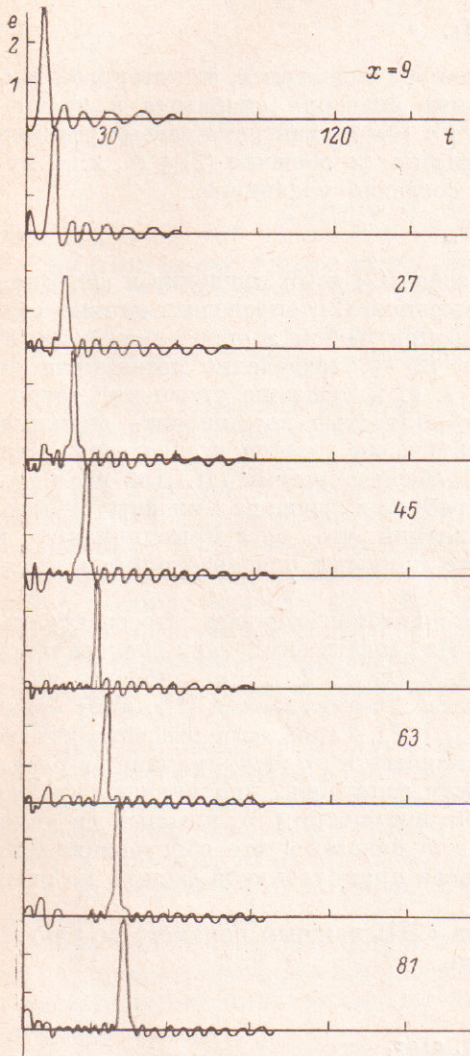
$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e(x, \tau) d\tau.$$

Площадь исходного импульса и УКИ, прошедшего расстояние x , в среде связаны соотношением, известным как теорема площадей,

$$\text{tg} [\Theta(x)/2] = \text{tg} [\Theta(0)/2] \exp[-x]. \quad (4)$$

При рассмотрении задачи о числе 2π -импульсов, возникающих из двух прямоугольных импульсов с одинаковой фазой, в [10] было обнаружено, что в соответствии с теоремой площадей для одиночного сигнала из каждого импульса развивается солитон, если их площади достаточно велики (больше π), но не превышают значений, при которых уже каждый исходный импульс развивается на два и более солитонов. Одновременно с этим есть «аномальные» площади ($3.5 < \Theta_{1,2} < 4.5$), при которых число 2π -импульсов зависит от скважности τ_s между парой исходных прямоугольных импульсов. Существует

критическая скважность τ_{sc} такая, что, если $\tau_s < \tau_{sc}$, образуется только один 2π -импульс, а при $\tau_s > \tau_{sc}$ — три 2π -импульса. В рамках метода ОЗР указанный результат означает, что при $\tau_s < \tau_{sc}$ спектральная задача имеет только одно собственное значение, однако при $\tau_s > \tau_{sc}$ их становится сразу три. В качестве альтернативы можно предположить, что на самом деле число собственных значений не зависит от величины скважности и, более того, для указанных величин площадей их всегда три. Но при $\tau_s < \tau_{sc}$ одно из собственных значений



лежит на мнимой оси в комплексной плоскости λ ($\text{Re } \lambda_1 = 0$), а два других расположены симметрично по обе стороны мнимой оси, т. е. $\text{Re } \lambda_2 = -\text{Re } \lambda_3$, $\text{Im } \lambda_2 = \text{Im } \lambda_3$. При изменении величины скважности τ_s ($\tau_s < \tau_{sc}$) λ_2 и λ_3 движутся по комплексной плоскости навстречу друг другу, сохраняя при этом свое симметричное расположение относительно мнимой оси, и при $\tau_s = \tau_{sc}$ $\text{Re } \lambda_2 = \text{Re } \lambda_3 = 0$, т. е. оба собственных значения спектральной задачи сливаются. При дальнейшем увеличении τ_s это вырождение исчезает, и теперь все три собственных значения спектральной задачи движутся, оставаясь на мнимой оси,

$$\begin{aligned} \text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = \text{Re } \lambda_3 = 0, \\ \text{но } \text{Im } \lambda_1 \neq \text{Im } \lambda_2 \neq \text{Im } \lambda_3. \end{aligned}$$

Пока $\tau_s < \tau_{sc}$ из двух прямоугольных импульсов с аномальными площадями образуются один 2π -импульс (солитон) и один бризер 0π -импульс (два солитона с одинаковыми групповыми скоростями, но различными фазовыми скоростями). При $\tau_s = \tau_{sc}$ имеются один 2π -импульс и вырожденный бризер [11], представляющий собой пару 2π - и (-2π) -импульсов, у которых и фазовая и групповая скорости одинаковы. При $\tau_s > \tau_{sc}$ образуются три солитона: два

Рис. 1. Эволюция импульса при $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 8$, $\tau_s = 0$, $\tau_p = 2$.

2π -импульса и один (-2π) -импульс, и их групповые скорости теперь различны.

Такая картина согласуется с результатом [10] в том, что касается числа 2π -импульсов, но в отличие от [10] она предсказывает существование бризера и объясняет переход от одного 2π -импульса к трем.

Для проверки справедливости представленного здесь предположения о неизменности числа собственных значений спектральной задачи метода ОЗР при различных τ_s было выполнено численное моделирование эволюции двух прямоугольных одинаковых импульсов, которые имели длительность τ_p , площадь $\theta_1 = \theta_2$ и входили в среду с некоторой временной задержкой τ_s . Важно отметить, что решение спектральной задачи не зависит от степени неоднородного уширения. Последнее определяет лишь масштаб пространственных изменений световых импульсов. Число возникающих солитонов по этой причине не зависит от наличия неоднородного уширения. Основываясь на этих фактах,

можно упростить всю проблему, рассматривая уравнения СИП в случае, когда линия поглощения однородно уширена и имеет место строгий резонанс

$$\partial e / \partial x = -P, \quad \partial P / \partial \tau = eN, \quad \partial N / \partial \tau = -eP. \quad (5)$$

Фазовой модуляции и исходного УКИ по предположению нет, и все входящие в эту систему величины действительны.

Основой численной процедуры служил метод прогноза и коррекции, успешно применявшийся ранее [12-14] при расчете эффектов прохождения ультракоротких импульсов. Точность метода была вполне достаточной для надежного определения всех особенностей временной огибающей когерентного поля. На рис. 1 представлена картина распространения двух входных импульсов с площадями $\Theta_1 = \Theta_2 = 4$ из «аномального интервала» при $\tau_s = 0$. Здесь имеется полное

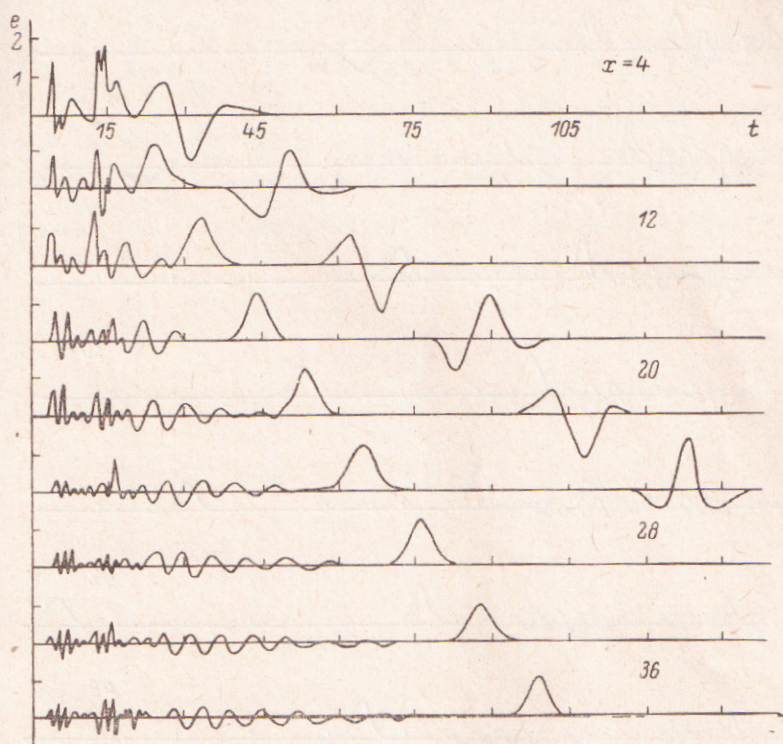


Рис. 2. Образование бризера при $\theta_1 = \theta_2 = 4$ и $\tau_s / \tau_p = 4.5$.

согласие с тем, что диктует теорема площадей и график на рис. 1 из [10], определяющий величину амплитуды солитона для данных $\Theta(0)$. Однако если $\tau_s \neq 0$, то помимо 2π -импульса образуется также и бризер (рис. 2) со скоростью, меньшей скорости 2π -импульса. Скорость бризера, вообще говоря, зависит от отношения τ_s / τ_p . При τ_s / τ_p , близком к критическому значению, бризер переходит в свое вырожденное состояние в виде пары нерасщепляющихся 2π - и (-2π) -импульсов. Когда величина τ_s / τ_p превышает критическое значение ($(\tau_s / \tau_p)_c \approx 6$) те же самые входные импульсы эволюционируют в 2π - и 0π -импульсы, состоящий из 2π - и (-2π) -импульсов различной амплитуды (рис. 3). Скорости движения этих составляющих различны и разность их скоростей быстро растет с увеличением (τ_s / τ_p) .

Таким образом, можно утверждать, что два входных импульса с аномальными значениями площадей действительно эволюционируют в три солитона.

Из выражения (4) теоремы площадей следует, что если исходный импульс имел площадь в интервале $(2n-1)\pi < \Theta(0) < (2n+1)\pi$, то по мере распространения он изменяет свою форму таким образом, что $\Theta(x) \rightarrow 2\pi n$ при $x \rightarrow \infty$. Поскольку стационарный импульс имеет $\Theta_{st} = 2\pi$, можно заключить, что рассматриваемый исходный импульс разбивается на n 2π -импульсов. Таким обра-

зом, теорема площадей служит естественным критерием для оценки числа солитонов в задачах СИП. Полученные здесь результаты, однако, показывают, что это не всегда так, поскольку теорема площадей не чувствительна к форме импульса. Следует отметить в этой связи [15], где нарушение теоремы площадей связано с комплексностью решений уравнений СИП при отказе от требования точного резонанса. В нашем случае все величины в (5) действительны, так что здесь имеется новый пример недостаточности теоремы площадей для оценки числа солитонов.

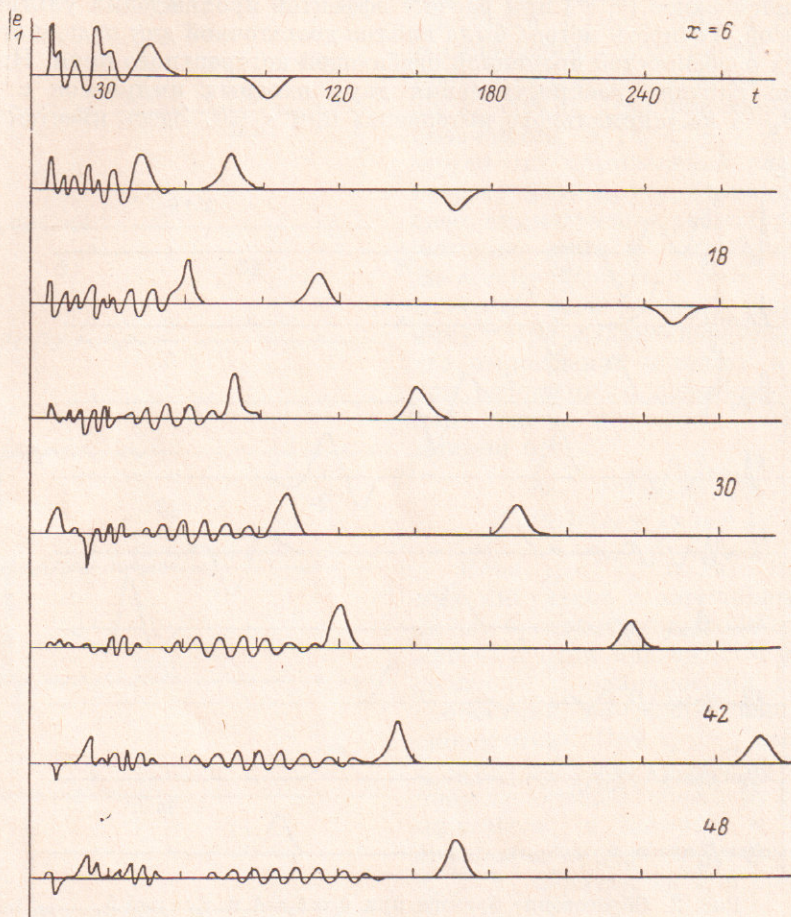


Рис. 3. Образование трех 2π -импульсов. $\theta_1 = \theta_2 = 4$, $\tau_s / \tau_p = 6.2$.

При $0 < (\tau_s / \tau_p) < (\tau_s / \tau_p)_c$ образуются 2π -импульс и бризер, представляющий собой «связанное состояние» двух солитонов. При $(\tau_s / \tau_p) \geq (\tau_s / \tau_p)_c$ вместо бризера возникает пара солитон—антисолитон, которые имеют различные скорости распространения, а при $\tau_s = 0$ из начального импульса развиваются столько 2π -импульсов, сколько их требуется по теореме площадей (в данном случае — один). Незначительное сглаживание фронтов исходных импульсов качественную картину не меняет, изменяется лишь значение τ_{sc} и сужается интервал аномальных площадей. Более подробное исследование влияния крутизны фронтов УКИ не проводилось, но можно думать, что аномальность эволюции солитонов пропадает, когда время нарастания (и затухания) УКИ — длительность фронта — достигает конечной доли τ_p .

В заключение следует обратить внимание на обнаруженный в расчетах эволюции двух прямоугольных импульсов нелинейный сигнал — псевдоэхо, предшествующий солитонам (рис. 3). Скорость распространения этого сигнала меньше скорости света в среде, форма огибающей заметно не меняется. Известно, что только солитоны остаются от первоначального достаточно сильного УКИ, все остальное должно исчезать за счет дисперсионного расплывания.

Такая же судьба ждет и сигнал псевдоэха, по время его жизни значительно больше линейных сигналов, остающихся на месте первоначальных прямоугольных импульсов.

Литература

- [1] Солитоны / Под ред. Р. Булафа, Ф. Кодри. М., 1983.
- [2] Лэм Д.ж. Л. Введение в теорию солитонов. М., 1983.
- [3] Теория солитонов: метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова. М., 1980.
- [4] McCall S. L., Hahn E. L. — Phys. Rev., 1969, v. 183, N 2, p. 457—485.
- [5] Lamb G. L. — Phys. Rev. A, 1974, v. 9, N 1, p. 422—430.
- [6] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C. — J. Math. Phys., 1974, v. 15, N 11, p. 1852—1858.
- [7] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. — Stud. Appl. Math., 1974, v. 53, N 1, p. 219—270.
- [8] Kaup D. J., Scaccia L. R. — JOSA, 1980, v. 70, N 2, p. 224—230.
- [9] Kaup D. J. — Phys. Rev. A, 1977, v. 16, N 2, p. 704—719.
- [10] Захаров С. М., Манькин Э. А. — ЖЭТФ, 1982, т. 82, № 2, с. 379—405.
- [11] Hopf F. A., Lamb G. L., Rhodes C. K., Scully M. O. — Phys. Rev. A, 1971, v. 3, N 2, p. 758—766.
- [12] Елютин С. О., Маймистов А. И., Манькин Э. А. — Опт. и спектр., 1981, т. 50, в. 2, с. 354—361.
- [13] Iseugi A., Lamb W. E. — Phys. Rev., 1969, v. 185, N 2, p. 517—545.
- [14] Захаров С. М., Манькин Э. А. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1973, т. 37, № 10, с. 2179—2184.
- [15] Андреев В. А. — Квант. электрон., 1983, т. 10, № 10, с. 2045—2048.

Поступило в Редакцию 29 декабря 1984 г.
