Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Ю. В. КРАВЧЕНКО, П. В. БЫЧКОВ

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Линейная алгебра и элементы математического анализа

Практическое пособие
для студентов факультета
психологии и педагогики

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2019

УДК 512.64:517(076)
ББК 22.143я73+22.161я73
К772

Рецензенты:
доктор физико-математических наук В. М. Селькин;
доктор физико-математических наук В. Н. Тютянов

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Кравченко, Ю. В.

К772 Основы высшей математики. Линейная алгебра и элементы математического анализа : практическое пособие / Ю. В. Кравченко, П. В. Бычков ; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2019. – 47 с.
ISBN 978-985-577-538-7

В основу практического пособия положен основной программный материал по основам высшей математики, методическая часть которого представлена оригинальными схемами и таблицами и адаптированными определениями теоретических понятий, а практическая – упражнениями и разноуровневыми заданиями.

Адресовано студентам факультета психологии и педагогики, а также преподавателям, читающим курс высшей математики для гуманитарных специальностей.

УДК 512.64:517(076)
ББК 22.143я73+22.161я73

ISBN 978-985-577-538-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие…………………………………………………………...4

1. Элементы теории множеств…………………………..…………5

2. Матрицы 14

3. Определители. Системы линейных уравнений 19

4. Предел функции.. 24

5. Непрерывность функции 31

6. Производная функции 35

7. Исследование функций и построение графиков 42

Литература 47

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время математика всё шире проникает в повседневную жизнь, всё более внедряется в традиционно далёкие от неё области. Компьютеризация общества, внедрение современных информационных технологий требуют математической грамотности человека на каждом рабочем месте. Это предполагает и конкретные математические знания, и определённый стиль мышления, вырабатываемый математикой. Всё больше специальностей, в том числе и психология, требующих высокого уровня образования, связано с непосредственным применением математики, поэтому дисциплина «Основы высшей математики» для психологов становится профессионально значимым предметом.

Целью дисциплины является овладение студентами основами высшей математики.

Задачами дисциплины являются:

– ознакомление студентов с основами теории множеств и теории вероятностей, с методами дифференциального исчисления и дискретной математики, с основами математического моделирования и финансовых расчётов;

– анализ основных положений изучаемых разделов математики;

– усвоение студентами основных понятий, формул и теорем курса;

– формирование умений и навыков использования математического языка и аппарата при описании социально-гуманитарных явлений и решении прикладных задач.

Дисциплина обязательного компонента «Основы высшей математики» предшествует изучению учебного курса «Статистические методы в психологии», который посвящён вопросам математической статистики, включая современные её разделы, используемые психологической наукой.

Практическое пособие включает в себя необходимый теоретический материал, а также базовые, ключевые понятия.

Авторы благодарят рецензентов, принявших участие в подготовке рукописи к изданию, и будут благодарны всем, кто выскажет свои пожелания и замечания по данному практическому пособию.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Понятие множества

В математике встречаются самые разнообразные множества. Можно говорить о множестве граней многогранника, точек на прямой, множестве натуральных чисел и т. д. Понятие множества относится к числу первоначальных понятий, которые не определяются через другие, более простые. Вместо слова «множество» иногда говорят «совокупность», «собрание» предметов и т. д. Предметы, составляющие данное множество, называются элементами данного множества.

Теория множеств посвящена в основном изучению именно бесконечных множеств. Теория конечных множеств называется иногда комбинаторикой.

Но простейшие свойства множеств, в большинстве случаев в равной мере относятся как к конечным, так и к бесконечным множествам.

Заметим, что в математике допускается к рассмотрению множество, не содержащее элементов – пустое множество. Запись $a \in X$ означает, что a есть элемент множества X.

Определение 1.1.1. Множество B называется *подмножеством* множества A, если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A.

Каждый отдельный элемент множества A образует подмножество, состоящее из этого одного элемента. Кроме того, пустое множество является подмножеством всякого множества.

Подмножество множества A называется *несобственным*, если оно совпадает с множеством A.

Если множество B есть подмножество множества A, то говорим, что В содержится в A и обозначаем $B \subseteq A$. Подмножество B множества A называется *собственным* подмножеством, если B не пусто и не совпадает с A (т. е. имеется элемент множества A, не содержащийся в B).

1.2. Операции над множествами

Пусть A и B – произвольные множества.

Определение 1.2.1. Объединением двух множеств A и B называется множество $C = A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B (рисунок 1.2.1).

Аналогично определяется объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если A_i – произвольные множества, то их объединение $\bigcup_i A_i$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_i.

<u>Определение 1.2.2.</u> Пересечением множеств A и B называется множество $C = A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B (рисунок 1.2.2). Пересечением любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_i называется множество $\bigcap_i A_i$ элементов, принадлежащих каждому из множеств A_i.

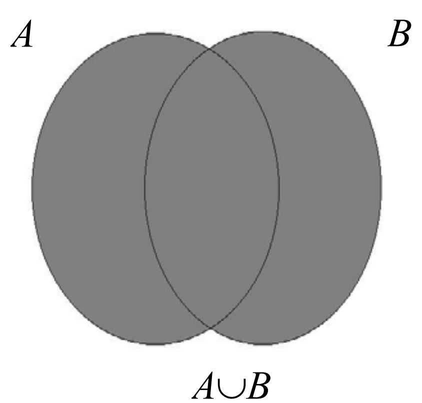


Рисунок 1.2.1

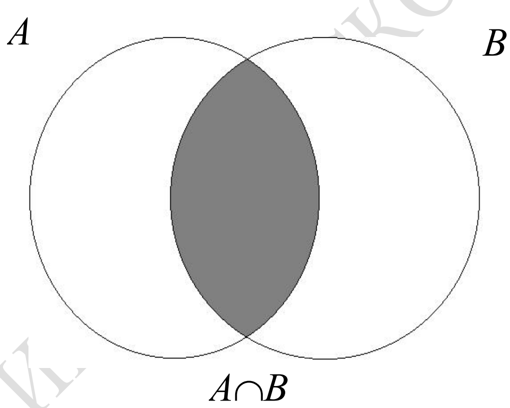


Рисунок 1.2.2

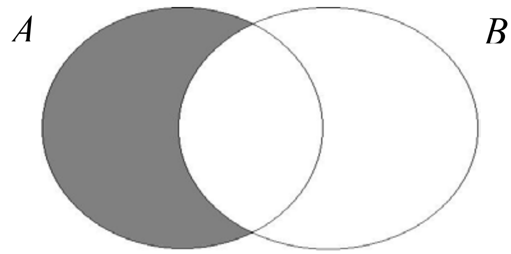
Операции объединения и пересечения множеств по определению коммутативны и ассоциативны, т. е.

$$A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

<u>Определение 1.2.3.</u> Разностью множеств A и B называется множество тех элементов из A, которые не содержатся в B (рисунок 1.2.3).



$A \setminus B$

Рисунок 1.2.3

1.3. Понятие функции. Отображение множеств

Пусть M и N – два произвольных множества.

Определение 1.3.1. Говорят, что на M определена функция f, принимающая значение из N, если каждому элементу $x \in M$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in N$. При этом M называется *областью определения* данной функции, а N – её *областью значений*.

Для множеств произвольной природы вместо термина «функция» часто пользуются термином «отображение», говоря об отображении одного множества в другое.

Если a элемент из M, то соответствующий ему элемент $b = f(a)$ из N называется *образом a* при отображении f. Совокупность всех тех элементов a из M, образом которых является данный элемент $b \in N$, называется *прообразом* (или точнее *полным прообразом*) элемента b и обозначается $f^{-1}(b)$.

Пусть A – некоторое множество из M; совокупность $\{f(a)\colon a \in A\}$ всех элементов вида $f(a)$, где $a \in A$, называется образом A и обозначается $f(A)$. В свою очередь, для каждого множества B из N определяется его полный прообраз $f^{-1}(B)$, а именно: $f^{-1}(B)$ есть совокупность всех тех элементов из M, образы которых принадлежат B.

Определение 1.3.2. Будем говорить, что f есть отображение множества M на множество N, если $f(M) = N$; такое отображение называют *сюръекцией*. В общем случае, т. е. когда $f(M) \subset N$, говорят, что f есть отображение в N. Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из M их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ также различны, то f называется *инъекцией.* Отображение $f\colon M \to N$, которое одновременно является сюръекцией и инъекцией, называется *взаимно однозначным соответствием* между M и N.

1.4. Разбиение на классы. Отношение эквивалентности

В самых различных вопросах встречается разбиение тех или иных множеств на попарно пересекающиеся подмножества. Например, плоскость (рассматриваемую как множество точек) можно разбить на прямые, параллельные оси x, жителей данного города можно разбить на группы по их году рождения и т. д.

Каждый раз, когда некоторое множество M представлено тем или иным способом как сумма попарно непересекающихся подмножеств, мы говорим *о разбиении множества M на классы*.

Обычно приходится иметь дело с разбиениями, построенными на базе того или иного признака, по которому элементы множества M объединяются в классы.

Пусть M – некоторое множество и пусть некоторые из пар (a, b) элементов этого множества являются выделенными. Если (a, b) – выделенная пара, то мы будем говорить, что элемент a связан с b отношением φ, и обозначать это символом $a\varphi b$ или $(a, b) \in \varphi$. Например, если имеется в виду разбиение треугольников на классы равновеликих, то $a\varphi b$ означает «треугольник a имеет ту же площадь, что и треугольник b».

Определение 1.4.1. Отношение φ называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами:

1) рефлексивность: $a\varphi a$ для любого элемента $a \in M$,

2) симметричность: если $a\varphi b$, то $b\varphi a$,

3) транзитивность: если $a\varphi b$ и $b\varphi c$, то $a\varphi c$.

Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы отношение φ (признак!) позволяло разбить множество M на классы.

Понятие эквивалентности является частным случаем более общего понятия *бинарного отношения*.

Прямым (декартовым) произведением множеств $A_1, \ldots, A_n$ называется множество $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$.

Если $A_1 = \ldots = A_n = A$, то множество $A_1 \times \ldots \times A_n$ называется прямой степенью множества А и обозначается через A^n.

Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество R множества $A \times B$. Если $A = B$, то отношение R называется бинарным отношением на A. Вместо $(x, y) \in R$ часто пишут xRy.

Примером бинарного отношения может служить отношение тождества ε: $(a, b) \in \varepsilon$ в том и только том случае, если $a = b$. Иначе говоря, это – отношение, задаваемое диагональю Δ в $M\times M$, т. е. подмножеством пар вида (a, a).

Областью определения бинарного отношения R называется множество $\delta_R = \{x \mid$ *существует* y *такое, что* $(x, y) \in R\}$.

Областью значений бинарного отношения R называется множество $\rho_R = \{x \mid$ *существует* y *такое, что* $(y, x) \in R\}$.

Для бинарных отношений определены обычным образом теоретико-множественные операции объединения, пересечения и т. д. *Дополнением бинарного отношения* R между элементами A и B называется множество $-R = (A\times B)\backslash R$. *Обратным отношением* для бинарного отношения R называется множество $R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$. *Образом множества* X относительно R называется множество $R(X) = \{y \mid$ существует $x\in X$ такое, что $(x, y) \in R\}$. *Произведением отношений* $R_1 \subseteq A\times B$ и $R_2 \subseteq B\times C$ называется отношение $R_1\bullet R_2 = \{(x, y) \mid$ *существует* z *такое, что* $(x, z) \in R_1$ *и* $(z, y) \in R_2\}$.

1.5. Конечные и бесконечные множества

Рассматривая различные множества, мы замечаем, что иногда можно хотя бы примерно указать число элементов в данном множестве. Таковы, например, множество всех вершин некоторого многогранника, множество всех простых чисел, не превосходящих данное число, множество всех молекул воды на Земле и т. д. Каждое из этих множеств содержит конечное, хотя, быть может, и неизвестное нам число элементов. С другой стороны, существуют множества, состоящие из бесконечного числа элементов. Таково, например, множество всех натуральных чисел, множество всех точек на прямой, всех кругов на плоскости и т. д. При этом, говоря, что множество бесконечно, мы имеем в виду, что из него можно извлечь один элемент, два элемента и т. д., причем после каждого шага в этом множестве еще останутся элементы.

Чтобы сравнить между собой два конечных множества, можно, например, сосчитать число элементов в каждом из них и, таким образом, эти два множества сравнить. Но можно поступить иначе: попытаться установить *биекцию*, т. е. взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств, иначе говоря, такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества отвечает один и только один элемент другого, и наоборот.

Заметим теперь, что если первый способ (подсчет числа элементов) годится лишь для сравнения конечных множеств, второй (установление взаимно однозначного соответствия) пригоден и для бесконечных.

1.6. Счетные множества

Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел. Назовем *счетным множеством* всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить со всеми натуральными числами. Иначе говоря, счетное множество – это такое множество, элементы которого можно занумеровать в бесконечную последовательность: $a_1, \dots , a_n, \dots$

Приведем примеры счетных множеств.

1. Множество всех целых чисел. Установим соответствие между всеми целыми и всеми натуральными числами по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \dots , \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \dots . \end{array}$$

2. Множество всех четных положительных чисел. Соответствие очевидно: $n \leftrightarrow 2n$.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством.

Приведём некоторые общие свойства счетных множеств.

1. Всякое подмножество счетного множества конечно или счётно.

2. Сумма любого конечного или счетного множества счетных множеств есть снова счетное множество.

3. Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.

4. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

1.7. Понятие мощности множества

<u>Определение 1.7.1.</u> Два множества M и N называются эквивалентными (обозначение $M \sim N$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Если эквивалентны два конечных множества, то они состоят из одного и того же числа элементов. Если же эквивалентные между собой множества M и N произвольны, то говорят, что M и N имеют одинаковую *мощность*. Таким образом, мощность – это то общее, что есть у любых двух эквивалентных между собой множеств. Для конечных множеств понятие мощности совпадает с привычным понятием числа элементов множества. Мощность множества натуральных чисел (т. е. любого счетного множества) обозначается символом $\aleph_0$ (читается «алеф нуль»). Про множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел отрезка [0, 1], говорят, что они имеют *мощность континуума*. Эта мощность обозначается символом c (или символом $\aleph$).

Вопросы для самоконтроля

1. Определите понятия: множество, элемент множества.
2. Чему посвящена комбинаторика?
3. Дайте определение подмножества.
4. Чем отличаются собственное и несобственное подмножества?
5. Какие операции на множествах вы знаете? Дайте их определения.
6. Интерпретируйте геометрически известные вам операции на множествах.
7. Дайте определение понятия функции.
8. В чем отличие образа от прообраза?
9. Какое отношение является взаимно однозначным соответствием?
10. Когда говорят о разбиении множества на классы?
11. Как понимать фразу «задано отношение на множестве»?
12. Дайте определение отношения эквивалентности.
13. Как определяется декартова степень множества?
14. Что называется бинарным отношением?
15. Чем отличаются область определения от области значения бинарного отношения?
16. Определите понятие дополнения бинарного отношения, обратного отношения, образа и прообраза множеств относительно бинарного отношения, произведения бинарных отношений.
17. Как определяются конечные и бесконечные множества?
18. Как можно сравнивать множества?
19. Какие множества называются счетными и несчетными?
20. Какие множества называются эквивалентными?
21. Разъясните понятие мощности множества.

Практическое занятие. Множество. Операции над множествами

Задания для аудиторной работы

1. Доказать следующие тождества:

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
2) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2. Найти все подмножества множеств: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{x\}$, $\{1, 2\}$.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C \end{cases}$, где A, B, C – данные множества и $B \subseteq A \subseteq C$.

4. Доказать, что $A = B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$.

5. Доказать, что всякое множество есть объединение всех своих подмножеств.

6. Доказать, что если для всех $i \in I$ $A_i \subseteq B$, то $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \subseteq B$

7. Доказать, что $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ есть наименьшее множество, содержащее все множества A_i;

Задания для самостоятельной работы

1. Доказать следующие тождества:

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2. Доказать, что всякое множество есть объединение всех своих одноэлементных подмножеств.

3. Доказать, что если для всех $i \in I$ $B \subseteq A_i$, то $B \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

4. Доказать, что $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ есть наибольшее множество, содержащее все множества A_i.

Практическое занятие. Отношения и функции

Задания для аудиторной работы

1. Доказать что $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2. Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R \bullet R^{-1}$, $R^{-1} \bullet R$ для отношения

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in N \text{ и } x \text{ делит } y\}.$$

3. Доказать, что для любой функции f справедливо равенство

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

4. На множествах N и $N \times N$ определим бинарные отношения R_m и Q следующим образом:

1) $(a, b) \in R_m \Leftrightarrow (a - b)$ делится на m $(m > 0)$;
2) $((a, b), (c, d)) \in Q \Leftrightarrow a + d = b + c$.

Доказать, что R_m и Q являются отношениями эквивалентности.

5. Доказать, что если R_1 и R_2 – эквивалентности на A, то

$$R_1 \bullet R_2 = A^2 \Leftrightarrow R_1 = A^2.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Доказать что $A \times (B \setminus C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$.

2. Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R \bullet R^{-1}$, $R^{-1} \bullet R$ для отношения

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in N \text{ и } y \text{ делит } x\}.$$

3. Доказать, что для любой функции f справедливо равенство

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

4. На множестве $N \times N$ определим бинарное отношение S следующим образом

$$((a, b), (c, d)) \in S \Leftrightarrow (a \cdot d = b \cdot c \text{ и } b \neq 0,\ d \neq 0) \text{ или } (a = c,\ b = 0,\ d = 0).$$

Доказать, что S является отношением эквивалентности.

5. Доказать, что если R_1 и R_2 – эквивалентности на A, то

$R_1 \bullet R_2 = A^2 \Leftrightarrow R_2 \bullet R_1 = A^2$.

2. МАТРИЦЫ

2.1. Матрицы. Основные определения

Определение 2.1.1. *Матрицей* называется система $m \cdot n$ чисел, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов. Числа этой таблицы называются *элементами матрицы*.

Матрицу обозначают:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ составляют i-ю строку ($i = 1, 2, \dots, m$), элементы $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}$ – k-й столбец ($k = 1,2, \dots, n$); a_{ik} – элемент, принадлежащий i-й строке и k-му столбцу матрицы, числа i, k называют *индексами элемента*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей. Обозначим нулевую матрицу буквой O, тогда по определению

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), то есть матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.1.1)$$

Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов). Квадратная матрица первого порядка отождествляется со своим единственным элементом. Выпишем квадратные матрицы первых трех порядков:

$$(a_{11}),\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Будем говорить, что элементы a_{11} , a_{22} , ... ,a_{nn} квадратной матрицы (2.1.1) образуют её *главную диагональ*, а элементы a_{1n} , $a_{2\,n-1}$, ... ,a_{n1} – *побочную диагональ*.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю, то есть матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Обозначим единичную матрицу буквой Е, тогда

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Треугольной матрицей называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.2. Действия над матрицами

Линейные действия над матрицами

Линейными действиями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матриц на число. Сложение и вычитание матриц определяются только для матриц одинаковых размеров.

Определение 2.2.1. *Суммой двух матриц* $A = (a_{ik})_{mn}$, $B = (b_{ik})_{mn}$ называется такая матрица $C = (c_{ik})_{mn}$, что

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \ (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

то есть матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц слагаемых.

Сумма двух матриц A и B обозначается $A + B$.

Пример 2.2.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Под суммой $A + B + C$ трёх матриц A, B, C понимается матрица, полученная в результате последовательного сложения этих матриц, то есть

$$A + B + C = (A + B) + C$$

Аналогично определяется сумма матриц для большего числа слагаемых.

Определение 2.2.2. Разностью $A - B$ двух матриц $A = (a_{ik})_{mn}$, $B = (b_{ik})_{mn}$ называется матрица $D = (d_{ik})_{mn}$, что

$$d_{ik} = a_{ik} - b_{ik} \ (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 2.2.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 7 \\ 3 & 3 & -15 \end{pmatrix}.$$

Определение 2.2.3. *Произведением матрицы* $A = (a_{ik})_{mn}$ *на число* α (или числа α на матрицу A) называется матрица $B = (b_{ik})_{mn}$, для которой

$$b_{ik} = \alpha a_{ik} \; (i = 1, 2, \ldots, m;\; k = 1, 2, \ldots, n),$$

то есть матрица, полученная из данной умножением всех её элементов на число α*. Произведение матрицы* A *на число* α *обозначается* $A\alpha$*, или* αA*.*

Определение 2.2.4. Матрицу $(-1)A$ будем называть матрицей, *противоположной* матрице A, и обозначать $-A$.

Умножение матриц

Это действие определяется для согласованных матриц. Матрица A называется согласованной с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B: матрица A_{mn} согласована с матрицей B_{nl} («ширина» матрицы A равна «высоте» матрицы B). Отметим следующее: 1) из согласованности матрицы A с матрицей B не следует согласованность матрицы B с матрицей A; 2) если A и B – квадратные матрицы одного порядка, то они взаимно согласованы (A согласована с B, B согласована с A).

Определение 2.2.5. *Произведением матрицы* $A_{mn} = (a_{ik})_{mn}$ *на матрицу* $B_{nl} = (b_{ik})_{nl}$ называется такая матрица $C_{ml} = (c_{ik})_{ml}$, для которой

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}\,,\; c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\,,$$

то есть элемент c_{ik} матрицы C_{ml} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A_{mn} на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B_{nl}.

Матрица C_{ml} имеет m строк (как и матрица A_{mn}) и l столбцов (как и матрица B_{nl}). Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

Пример 2.2.3. Даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & -5 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Найти произведение AB*. Можно ли получить произведение* BA*?*

Решение. Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому произведение AB определено. Значит

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot3+3\cdot1+(-1)\cdot9 & 1\cdot4+2\cdot2+3\cdot(-5)+(-1)\cdot(-7) \\ 0\cdot5+4\cdot3+5\cdot1+(-2)\cdot9 & 0\cdot4+4\cdot2+5\cdot(-5)+(-2)\cdot(-7) \\ 7\cdot5+1\cdot3+0\cdot1+(-3)\cdot9 & 7\cdot4+1\cdot2+0\cdot(-5)+(-3)\cdot(-7) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -3 \\ 11 & 51 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не определено, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения понятий «матрица», «элемент матрицы», «индекс элемента».
2. Какая матрица называется нулевой, квадратной?
3. Какие элементы квадратной матрицы образуют главную диагональ, а какие – побочную?
4. Как определяется диагональная, единичная и треугольная матрицы?
5. Какие действия над матрицами называются линейными? Для каких матриц определяются сложение и вычитание?
6. Как определяется сумма двух и более матриц?
7. Как определяются разность двух матриц, произведение матрицы на число, противоположная матрица?
8. Для каких матриц возможна операция умножения матрицы?
9. Дайте определение произведения двух матриц.
10. Какова размерность матрицы, являющейся произведением двух заданных матриц?

Практическое занятие. Матрицы

Задания для аудиторной работы

1. Даны три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти: $A + B$, $A - C$, $A \cdot B$, $B \cdot C$, $|B|$, $|C|$. Определители вычислить двумя способами: 1) непосредственно; 2) разложением по элементам какой-либо строки (столбца).

Задания для самостоятельной работы

1. Даны три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти: $A + B$, $A - C$, $A \cdot B$, $B \cdot C$, $|B|$, $|C|$. Определители вычислить двумя способами: 1) непосредственно; 2) разложением по элементам какой-либо строки (столбца).

3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Определители второго и третьего порядков и их свойства

Определение 3.1.1. *Определителем квадратной матрицы второго порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ то есть } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (3.1.1)$$

Определитель матрицы называют также детерминантом. Для определителя матрицы A употребляются следующие обозначения: $|A|$, Δ, $\det A$, $\det(a_{ik})$.

Определение 3.1.2. *Определителем квадратной матрицы третьего порядка*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \qquad (3.1.2)$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части формулы (3.1.2) представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному и только одному из каждой строки и каждого столбца. Этому произведению приписывается соответствующий знак. Чтобы запомнить, какие произведения следует брать со знаком плюс, какие со знаком минус, полезно правило треугольников.

Определение 3.1.3. *Минором* какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного вычёркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит данный элемент.

Минор элемента a_{ik} обозначим M_{ik}. Например, минором элемента a_{21} определителя (3.1.2) является определитель второго порядка

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad (3.1.3)$$

минором элемента a_{21} определителя (3.1.1) – элемент a_{12} (определитель первого порядка).

Определение 3.1.4. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$.

Например, алгебраическим дополнением элемента a_{21} определителя (3.2.2) является определитель (3.3.3), взятый со знаком минус. Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} будем обозначать через A_{ik}. В соответствии с определением

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Теорема 3.1.1. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

3.2. Определители *n*-го порядка

Перейдём к выяснению понятия определителя любого порядка n, где $n \geq 3$.

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.2.1)$$

Понятие определителя этой матрицы или определителя порядка n введём индуктивно, считая, что уже введено понятие определителя порядка n–1, соответствующего квадратной матрице (n–1)-го порядка.

<u>Определение 3.2.1.</u> Минором элемента a_{ik} матрицы n-ного порядка (3.2.1) называют определитель порядка n–1, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы (3.2.1) в результате вычёркивания i-й строки и k-го столбца. Минор элемента a_{ik} обозначим через M_{ik}. Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} назовём его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$, и обозначим через A_{ik}, то есть $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

<u>Определение 3.2.2.</u> Определителем порядка n, соответствующим матрице (3.2.1), называют число, равное $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \mathrm{M}_{ik}$ и обозначаемое одним из символов

$$\Delta, \ det\ A, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3.3. Системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

<u>Определение 3.3.1.</u> *Системой m линейных уравнений с n неизвестными* $x_1, x_2, \dots, x_n$ (или линейной системой) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

где a_{ik}, b_i – числа. Числа a_{ik} (i = 1, 2, …, m; k = 1, 2, …, n) называются коэффициентами, b_i (i = 1, 2, …, m) – свободными членами.

Определение 3.3.2. Решением линейной системы (3.3.1) называется упорядоченная совокупность n чисел c_1, c_2, …, c_n, подстановка которых вместо x_1, x_2, …, x_n соответственно ($x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, …, $x_n = c_n$) обращает в тождество каждое из уравнений этой системы.

3.4. Решение систем линейных уравнений с помощью определителей

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, …, x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Определителем системы (3.3.1) называется определитель матрицы А, составленной из коэффициентов уравнений этой системы; обозначим его через Δ ($\Delta = det\,A$).

Обозначим через Δ_k определитель, полученный заменой в определителе Δ столбца из коэффициентов при неизвестной x_k столбцом свободных членов системы (3.4.1), то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.4.2)$$

где k – одно из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Теорема 3.4.1. Если определитель системы (3.4.1) отличен от нуля, то система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ и Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определены формулами (3.4.2).

Метод решения системы по правилу, описанному в теореме 3.4.1 называется методом Крамера.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют определителем квадратной матрицы 2-го порядка?
2. Как вычисляют определитель 2-го порядка?
3. Как вычисляют определитель квадратной матрицы 3-го порядка.
4. Как вычисляют определитель 3-го порядка.
5. Каковы свойства определителей?
6. Как определяют минор?
7. Что такое алгебраическое дополнение?
8. Дайте определение системы m линейных уравнений с n неизвестными.
9. Опишите решение систем линейных уравнений с помощью определителей (метод Крамера).

Практическое занятие. Определители. Системы линейных уравнений

Задания для аудиторной работы

1. Решить следующие системы уравнений методом Крамера:

$$1)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases},\quad 2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}.$$

Все определители для системы 1) вычислять непосредственно, а для системы 2) – разложением по элементам какой-либо строки (столбца).

Задания для самостоятельной работы

1. Решить следующие системы уравнений методом Крамера:

$$1)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=1 \end{cases},\quad 2)\ \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-2 \\ x_1+x_2+x_3=-3 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}.$$

Все определители для системы 1) вычислять непосредственно, а для системы 2) – разложением по элементам какой-либо строки (столбца).

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

4.1. Понятие предела функции, его геометрический смысл. Односторонние пределы

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую на некотором интервале, содержащем точку $x = a$.

Определение 4.1.1. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta, \qquad (4.1.1)$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (4.1.2)$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Выясним геометрический смысл этого определения, воспользовавшись графиком функции $y = f(x)$ (рисунок 4.1.1).

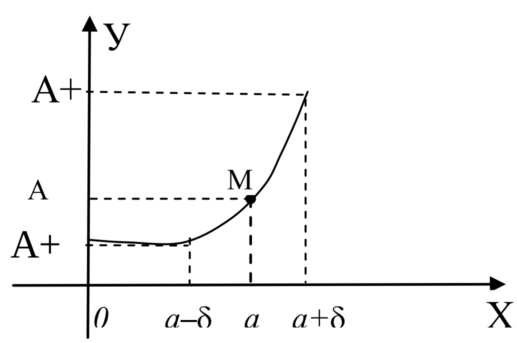


Рисунок 4.1.1

Неравенство (4.1.1) означает, что x отстоит от точки a не далее чем на δ, то есть принадлежит интервалу $(a - \delta,\ a + \delta)$ или δ-окрестности точки a на оси Оx. Неравенство (4.1.2) означает, что значение функции $y = f(x)$ не выходит из интервала $(A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$ оси Оy, то есть принадлежит ε-окрестности точки A этой оси.

Рассмотрим также односторонние пределы функции: *предел слева* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ и *предел справа* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_1$. Они определяются следующим образом. A_1 и A_2 – такие числа, к которым стремится значение функции $f(x)$ при стремлении аргумента x к a слева (справа).

Можно показать, что если односторонние пределы равны (рисунок 4.1.1) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A,$ то предел в точке $x = a$ существует и равен односторонним пределам $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A.$

Из определения предела функции следует, что предел постоянной равен этой постоянной. Если односторонние пределы различны $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+0} f(x),$ то есть $A_1 \neq A_2$, или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции в точке $x = a$.

Сформулируем понятие предела функции, когда x неограниченно возрастает по модулю, то есть $x \to \infty$.

<u>Определение 4.1.2.</u> Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует положительное число N такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Для обозначения предела функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ используется запись.

4.2. Бесконечно малые функции и их свойства

<u>Определение 4.2.1.</u> Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ $(\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0)$.

Бесконечно малую функцию аргумента x обозначают о(x).

Например, функция $y = (x - 3)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 3$, так как $\lim\limits_{x\to 3}(x - 3)^2 = 0$; функция $y = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Свойства бесконечно малых функций выражаются следующими теоремами.

Теорема 4.2.1. Если функция $y = f(x)$ имеет предел b при $x \to a$, то $y(x) = b + o(x)$. Обратное: если $y(x) = b + o(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Теорема 4.2.2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Теорема 4.2.3. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

Следствие 4.2.1. Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Следствие 4.2.2. Произведение бесконечно малой функции на постоянную есть бесконечно малая функция.

4.3. Бесконечно большие функции

Определение 4.3.1. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если для любого положительного числа N можно найти такое число $\delta > 0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > N$.

Условно говорят, что предел бесконечно большой функции равен бесконечности, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

Если функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to \infty$, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Примером бесконечно большой функции является функция $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ — бесконечно большая при $x \to 2$.

Замечание 4.3.1. Если функция $y = f(x)$ стремится к нулю при $x \to a$ (или $x \to \infty$) и не обращается в нуль, то функция $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}$ стремится к бесконечности.

4.4. Основные теоремы о пределах функций

Теорема 4.4.1. Функция $y = f(x)$ не может иметь более одного предела при $x \to a$.

Доказательство. Предположим противное, пусть функция $y = f(x)$ при $x \to a$ имеет два предела b_1 и b_2: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2$, причём $b_1 \neq b_2$.

Согласно теореме 4.2.1 из этих равенств следует, что $y = b_1 + o_1(x)$, $y = b_2 + o_2(x)$. Поэтому $b_1 - b_2 = o_2(x) - o_1(x)$. Последнее равенство невозможно, так как в левой части стоит постоянная, отличная от нуля, а в правой – бесконечно малая функция. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 4.4.2. Если каждая из функций $y(x)$ и $z(x)$ имеет предел при $x \to a$, то сумма, разность и произведение этих функций также имеют пределы, причём

$$\lim_{x\to a}(y(x) \pm z(x)) = \lim_{x\to a} y(x) \pm \lim_{x\to a} z(x), \tag{4.4.3}$$

$$\lim_{x\to a}(y(x) \cdot z(x)) = \lim_{x\to a} y(x) \cdot \lim_{x\to a} z(x). \tag{4.4.4}$$

Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to a} z(x) \neq 0$, то и частное $\frac{y(x)}{z(x)}$ имеет предел, причём

$$\lim_{x\to a}\frac{y(x)}{z(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} y(x)}{\lim\limits_{x\to a} z(x)}. \tag{4.4.5}$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} y(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} z(x) = c$, тогда на основании теоремы 4.2.1 $y(x) = b + o_1(x)$, $z(x) = c + o_2(x)$. Тогда получаем $y(x) \pm z(x) = (b \pm c) + (o_1(x) \pm o_2(x))$, где $b \pm c$ – постоянная, а $o_1(x) \pm o_2(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$.

Согласно теореме 4.2.1 из последнего равенства следует, что

$$\lim_{x\to a}(y(x) \pm z(x)) = b \pm c = \lim_{x\to a} y(x) \pm \lim_{x\to a} z(x).$$

Поскольку

$y(x)\cdot z(x) = (b + o_1(x))(c + o_2(x)) = bc + (b\cdot o_2(x) + c\cdot o_1(x) + o_1(x)\cdot o_2(x))$, где bc – постоянная, $o_3(x) = b\cdot o_2(x) + c\cdot o_1(x) + o_1(x)\cdot o_2(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, то на основании теоремы 4.2.1 получаем

$$\lim_{x\to a}(y(x)\cdot z(x)) = bc = \lim_{x\to a} y(x)\cdot \lim_{x\to a} z(x).$$

Предположив, что $\lim_{x\to a} z(x) = c \neq 0$, составим разность

$$\frac{y(x)}{z(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b + o_1(x)}{c + o_2(x)} - \frac{b}{c} = \frac{co_1(x) - bo_2(x)}{c(c + o_2(x))}.$$

Обозначив $v(x) = \dfrac{1}{c(c + o_2(x))}$, $o_3(x) = c\cdot o_1(x) - b\cdot o_2(x)$, получим

$$\frac{y(x)}{Z(x)} - \frac{b}{c} = v(x)\cdot o_3(x),\ \lim_{x\to a}(v(x)\cdot o_3(x)) = 0,$$

так как $v(x)$ – ограниченная функция, а $o_3(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$. Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\frac{y(x)}{z(x)} = \frac{b}{c} = \frac{\lim\limits_{x\to a} y(x)}{\lim\limits_{x\to a} z(x)}.$$

Теорема доказана.

Следствие 4.4.1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}(c\cdot y(x)) = c\cdot \lim_{x\to a} y(x).$$

Следствие 4.4.2. Если $\lim\limits_{x\to a} y(x) = b$ и m – натуральное число, то

$$\lim_{x\to a}(y(x)^{m}) = (\lim_{x\to a} y(x))^{m},$$

в частности,

$$\lim_{x\to a}(x^m) = (\lim_{x\to a} x)^m = a^m.$$

Теорема 4.4.3. Пусть три функции $u = u(x)$, $y = y(x)$, $v = v(x)$ определены в некотором промежутке, содержащим точку a. Если для любого x из этого промежутка выполняются неравенства $u(x) \le y(x) \le v(x)$ и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют одинаковые пределы при $x \to a$, то функция $y = y(x)$ имеет тот же предел при $x \to a$.

Теорема 4.4.4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором промежутке, содержащим точку a. Если при $x \to a$ функция $y = f(x)$ имеет положительный (отрицательный) предел, то найдётся δ-окрестность точки a такая, что для всех x из этой окрестности функция положительна (отрицательна).

Теорема 4.4.5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ определены в некоторой δ-окрестности точки a, для всех x из этой окрестности, $x \ne a$, выполняется неравенство $u(x) < v(x)$ и функции имеют пределы при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x) \le \lim\limits_{x\to a} v(x)$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = c$. Требуется доказать, что $b \le c$. Предположим противное, то есть $b > c$.

В силу условия и теоремы 4.4.2 функция $v(x) - u(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x\to a}(v(x) - u(x)) = c - b$, $c - b < 0$, ибо $b > c$.

На основании теоремы 4.4.4 найдётся δ-окрестность точки a, для всех точек которой $(x \ne a)$ $v(x) - u(x) < 0$, или $v(x) < u(x)$, что противоречит условию. Следовательно, $b \le c$, то есть $\lim\limits_{x\to a} u(x) \le \lim\limits_{x\to a} v(x)$. Теорема доказана.

4.5. Два замечательных предела

При решении практических задач часто используются следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение предела функции.
2. В чем заключается геометрический смысл предела функции?

3. Как определяются односторонние пределы?

4. Как связаны односторонние пределы с пределом функции? Интерпретируйте ваши рассуждения рисунками.

5. Сформулируйте определение предела функции, когда $x \to \infty$.

6. Какие функции называются бесконечно малыми? Приведите примеры.

7. Какие свойства бесконечно малых функций вы знаете?

8. Дайте определение бесконечно больших функций. Приведите примеры.

9. Сколько пределов может иметь функция? Докажите утверждение.

10. Сформулируйте и докажите теорему о сумме (разности), произведении и частном двух функций.

11. Какие следствия можно получить из теоремы о сумме (разности), произведении и частном двух функций?

12. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака неравенства при предельном переходе.

13. Напишите два замечательных предела.

Практическое занятие. Понятие предела. Односторонние пределы. Нахождение пределов

Задания для аудиторной работы

1. Доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2+1}=\dfrac{2}{3}$.

2. Доказать, что предела $\lim\limits_{x\to a} f(\mathrm{x})$ не существует:

1) $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$, $a > 0$, $x = 0$; 2) $f(x) = \begin{cases} 2-x, \text{если } x \le 2 \\ 2x-1, \text{если } x > 2 \end{cases}$, $x = 2$.

3. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+8x-7)$; 2) ; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

2. Доказать, что предела $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}$ не существует.

3. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6}{3x^2+2x-4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^4+n}-\sqrt{n}}$.

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

5.1. Непрерывность функции в точке

Определение 5.1.1. Функция $y = f(x)$, определённая на интервале (a, b), называется непрерывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (то есть предел функции равен её значению при предельном значении аргумента).

Так как равенство в определении равносильно $\lim\limits_{x-x_0\to 0}(f(x)-f(x_0))=0$, то функция непрерывна в точке, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Теорема 5.1.1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то также непрерывны в этой точке их сумма $f(x) + \varphi(x)$, разность $f(x)-\varphi(x)$, произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$, а также частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при условии, что $\varphi(x) \neq 0$.

Следствие 5.1.1. Целая рациональная функция $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ непрерывна при всех x.

Следствие 5.1.2. Дробно рациональная функция

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$$

непрерывна при всех x, для которых знаменатель не обращается в нуль.

Теорема 5.1.2. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $F(x)=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

5.2. Точки разрыва функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую на интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$.

Определение 5.2.1. Точка x_0 называется точкой разрыва данной функции, если в ней функция определена, но не является непрерывной, или не определена в этой точке.

Если x_0 – точка разрыва функции $f(x)$ и существуют конечные пределы $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то она называется *точкой разрыва первого рода*.

Величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке x_0 и $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, тогда x_0 называется *точкой устранимого разрыва*. Это название оправдано тем, что если доопределить такую функцию (если она не была определена в точке x_0), положив $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то получится функция, непрерывная в точке x_0.

Например, для функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ точка $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва.

Если x_0 – точка разрыва и, по крайней мере, один из пределов $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ является бесконечным или не существует, то x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

Например: 1) точка $x_0 = 0$ – точка разрыва второго рода для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, поскольку $f(x_0 - 0) = -\infty$, $f(x_0 + 0) = +\infty$; 2) так как $f(x_0 + 0) = +\infty$, то точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва второго рода для функции $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$.

5.3. Непрерывность функции на промежутке

Определение 5.3.1. Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Если функция определена при $x = a$ и при этом $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(a)$,

то говорят, что *f(x)* в точке *a* непрерывна справа. Аналогично, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(\mathrm{b})$, то говорят, что в точке *b* эта функция непрерывна слева.

Определение 5.3.2. Функция называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой его точке (в точке *a* непрерывна справа, в точке *b* – непрерывна слева).

Наибольшим значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется такое её значение $f(x_1)$, что $f(x) \le f(x_1)$ для всех $x \in [a, b]$.

Наименьшим значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется такое её значение $f(x_2)$, что $f(x) \ge f(x_2)$ для всех $x \in [a, b]$.

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом важных свойств, которые выражаются следующими теоремами.

Теорема 5.3.1. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на нём своего наименьшего значения *m* и наибольшего значения *M*, то есть существуют такие точки x_1 и x_2 этого отрезка, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$.

Теорема 5.3.2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$, то каково бы ни было число *C*, заключённое между *A* и *B*, найдётся точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = C$.

Геометрический смысл теоремы иллюстрируется на рисунке 5.3.1. Всякая прямая $y = C$, где $A < C < B$ (или $A > C > B$), пересекает график функции $y = f(x)$.

Следствие 5.3.1. Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке найдётся хотя бы одна точка, в которой функция обращается в нуль.

Геометрический смысл следствия иллюстрируется на рисунке 5.3.2.

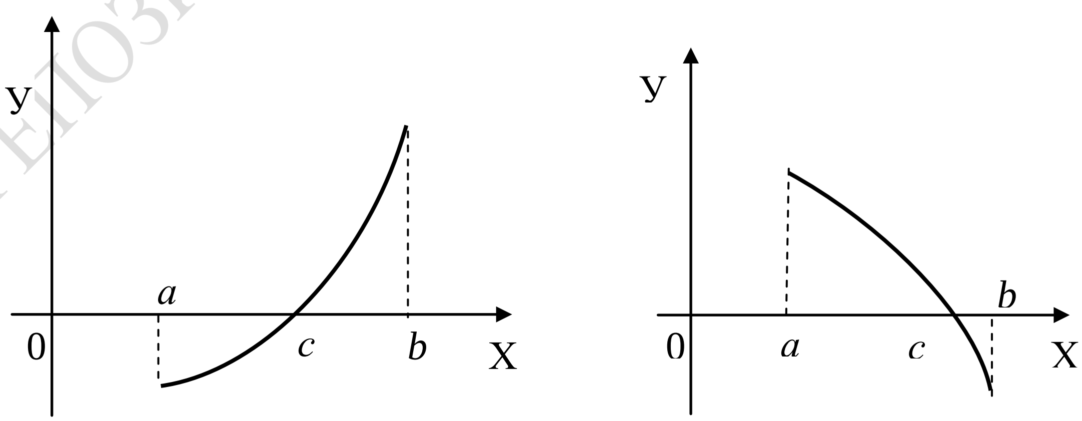


Рисунок 5.3.1

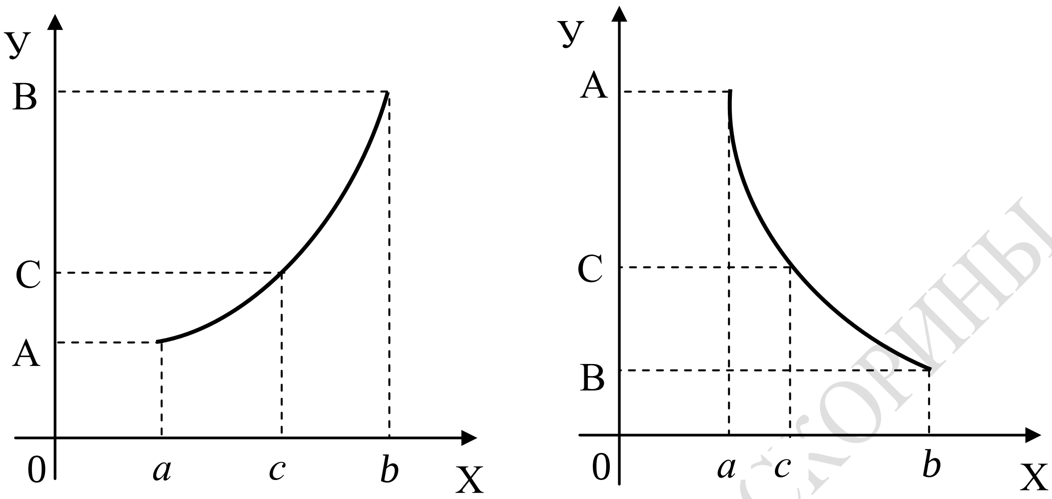


Рисунок 5.3.2

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется непрерывной в точке?

2. Приведите еще одно эквивалентное определение через приращение функции и аргументов.

3. Что можно сказать о сумме, разности, произведении и частном двух непрерывных функций?

4. При каких значениях аргумента целая рациональная и дробно-рациональная функции непрерывны?

5. Когда сложная функция непрерывна в точке?

6. Что называется точкой разрыва функций?

7. Какие точки называются точками разрыва первого рода?

8. Какая величина называется скачком функции?

9. Разъясните понятия «точка устранимого разрыва». Приведите примеры.

10. Какие точки называются точками разрыва второго рода? Приведите примеры.

11. Разъясните понятия: «непрерывность на интервале», «непрерывность справа», «непрерывность слева», «непрерывность на отрезке».

12. Дайте определение наибольшего и наименьшего значения функций.

13. Сформулируйте теорему о связи непрерывности на отрезке с наибольшим и наименьшим значениями функции. Разъясните ее на рисунке.

14. Сформулируйте теорему о связи непрерывности функций на отрезке с отрезком значений функций. Проиллюстрируйте ее геометрический смысл на рисунке.

15. Приведите следствие из вышеуказанной теоремы и его геометрическую интерпретацию.

Практическое занятие. Непрерывность функции

Задания для аудиторной работы

1. Исследовать на непрерывность следующие функции:

1) $y = x^3$; 2) $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$; 3) $y=\begin{cases}-1, \text{ если } x<3\\ 1, \text{ если } x>3\end{cases}$; 4) $y=\dfrac{|x-2|}{x-2}$;

5) $y=\begin{cases}x, \text{ если } x<1\\ 0, \text{ если } x=1\\ x^3, \text{ если } x>1\end{cases}$; 6) $y=2^{\frac{1}{x}}$;

Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать на непрерывность следующие функции:

1) $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x-3}}}{x-3}$; 2) $y=\left(1+\dfrac{1}{2-x}\right)^x$; 3) $y = \operatorname{tg}x$.

6. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

6.1. Понятие производной, её геометрический и физический смысл

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную в интервале (a, b). Пусть $x_0 \in (a,b)$ и $x \in (a, b)$, тогда приращение функции в точке x_0 выражается формулой $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 6.1.1. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ или } y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной: производная от данной функции в точке равна тангенсу угла между осью Ох и касательной к графику этой функции в соответствующей точке (рисунок 6.1.1):

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

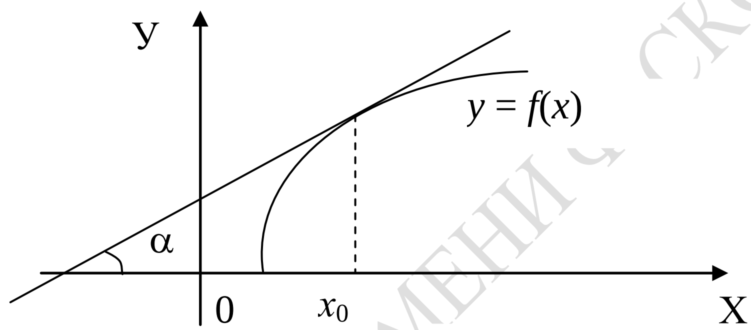


Рисунок 6.1.1

Уравнение касательной к линии $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Физический смысл производной: производная от пути по времени равна скорости прямолинейного движения точки: $x'(t_0) = v$.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется *дифференцируемой* в данной точке. Функция, имеющая производную в каждой точке данного промежутка, называется дифференцируемой в этом промежутке. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции выражается следующей теоремой.

Теорема 6.1.1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то есть существует предел $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = y'(x_0) \cdot 0 = 0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.
Теорема доказана.

6.2. Основные правила дифференцирования

Теорема 6.2.1. Производная суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных этих функций.

Доказательство. Пусть $y = u(x) \pm v(x)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Поскольку $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Следовательно,

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Теорема доказана.

Теорема 6.2.2. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению первой функции на производную второй плюс произведение второй функции на производную первой:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Доказательство. Пусть $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Так как $\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$. Согласно теореме 4.1.1 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. Тогда получаем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right) =$$

$$= u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = u' \cdot v + u \cdot v' + u' \cdot 0 = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Теорема доказана.

Следствие 6.2.1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(c\cdot v)' = c\cdot v'.$$

Теорема 6.2.3. Производная частного двух дифференцируемых функций определяется формулой

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Доказательство. Если $y = \frac{u}{v}$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, причём $v(x) \neq 0$, то

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'v - v'u}{v^2},$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$. Теорема доказана.

Если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ – взаимно-обратные функции и $y'_x \neq 0$, то

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Действительно, так как $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$,

откуда и следует, что $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

6.3. Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию $y = f(\varphi(x)) \equiv \mathrm{F}(x)$, где $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$; в этом случае u называют промежуточным аргументом, x – независимой переменной.

Теорема 6.3.1. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ существует и равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Доказательство. В соответствии с условием и по определению производной

$$y'_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u},\ u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$, то

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x.$$

Теорема доказана.

6.4. Некоторые приложения производной

Теорема 6.4.1. (Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную хотя бы в интервале (a, b), то в этом интервале найдется, по крайней мере, одна точка c такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\ (a < c < b).$$

При исследовании функций может появиться необходимость нахождения предела дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, числитель и знаменатель которой при $x \to a$ стремятся к нулю или бесконечности. Нахождение таких пределов называют раскрытием неопределённостей соответствующего вида. Основой его является правило Лопиталя, выражаемое следующей теоремой.

Теорема 6.4.2. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $x = a$, обращаются в нуль в этой точке и существует предел отношения $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$, то существует предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение производной функции.
2. Каков геометрический и физический смысл производной функции?
3. Приведите уравнение касательной к линии.
4. Какова зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью? Докажите утверждение.
5. Сформулируйте и докажите основные правила дифференцирования.
6. По какому правилу находится производная сложной функции? Докажите утверждения.
7. Сформулируйте теорему Лагранжа.
8. В каких ситуациях применяется правило Лопиталя? Сформулируйте его.

Практическое занятие. Производная функции

Задания для аудиторной работы

1. Пользуясь определением производной, найти производные функций:

1) $y = c$, 2) $y = x$, 3) $y = x^2$, 4) $y=\sqrt{x}$, 5) $y = \sin x$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на указанном отрезке:

1) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, 2) $y=\dfrac{1}{\cos x}$, $x \in [-1,1]$.

3. Найти максимум и минимум функции:

$$1)\ y=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x},\ 2)\ y = e^{x} + e^{-x},\ 3)\ y = \cos 2x - 2\sin x.$$

4. Найти угол наклона касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 5$ в точке, абсцисса которой $x = 0,5$.

5. В какой точке касательная к параболе $y = -x^2 + 2x - 3$ наклонена к оси Оx под углом 0^0?

6. Написать уравнение касательной к кривой $y=\frac{1}{x}+x+\ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Задания для самостоятельной работы

1. Пользуясь определением производной, найти производные функций:

$$1)\ y = x^3,\ 2)\ y=\sqrt[3]{x},\ 3)\ y = \cos x.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на указанном отрезке:

$$1)\ y = \operatorname{tg} x - x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right],\ 2)\ y = e^{2x} + e^{-2x},\ x \in [-2, 1].$$

3. Найти максимум и минимум функций: 1) $y = x\cdot\ln x$, 2) $y = x^2\cdot e^{-2x}$.

4. Найти угол наклона касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 5$ в точке, абсцисса которой $x = 1,5$.

5. В какой точке касательная к параболе $y = -x^2 + 2x - 3$ наклонена к оси Оx под углом 45^0?

6. Написать уравнение касательной к кривой $y=\frac{1}{x}\cdot 2^{\frac{x}{x-2}}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

7.1. Признаки постоянства, возрастания и убывания функций

Теорема 7.1.1. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в интервале (a, b). Для того чтобы функция $f(x)$ была постоянной в интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ в этом интервале.

Доказательство. Необходимость условия очевидна: если $f(x) = \text{const}$, то $f'(x) = 0$.

Докажем достаточность, то есть если $f'(x) = 0$ в интервале (a, b), то $f(x) = \text{const}$.

Возьмём в интервале любые два значения x_1 и x $(x_1 \neq x)$ и применим формулу Лагранжа:

$$f(x) - f(x_1) = (x - x_1)f'(c)$$

(точка c лежит между x_1 и x).

Отсюда, так как $f'(x) = 0$, то $f(x) = f(x_1)$ при любых значениях $x \in (a, b)$, то есть $f(x) = \text{const}$ в интервале (a, b). Теорема доказана.

Теорема 7.1.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и имеет на нём конечную производную, тогда:

1) если $f'(x) > 0$ на интервале (a, b), то функция возрастает в этом интервале;
2) если $f'(x) < 0$ на интервале (a, b), то функция убывает в этом интервале.

Доказательство. 1) Возьмём в интервале (a, b) любые два значения x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$ и применим теорему Лагранжа, получим

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \quad (x_1 < c < x_2).$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$ и по условию $f'(c) > 0$ $(c \in (a, b))$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то есть $f(x_2) > f(x_1)$. Это и означает, что функция возрастает на интервале (a, b).

Для случая 2) теорема доказывается аналогично.

Теорема доказана.

7.2. Максимум и минимум функции. Необходимое условие экстремума

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум* $f(x_0)$, если в некоторой окрестности этой точки (при $x \neq x_0$) выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *минимум* $f(x_0)$, если в некоторой окрестности этой точки (при $x \neq x_0$) выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Максимум и минимум функции называются *экстремумами функции*. Точка, в которой функция имеет минимум или максимум, называется *точкой экстремума функции*.

Необходимое условие экстремума даёт следующая теорема.

Теорема 7.2.1. Если функция $f(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет экстремум и в этой точке существует конечная производная, то она равна нулю.

7.3. Достаточное условие экстремума

Теорема 7.3.1. Если в точке $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ равна нулю и меняет знак при переходе через точку, то x_0 является точкой экстремума, причём: 1) x_0 – точка максимума, если знак меняется с плюса на минус; 2) x_0 – точка минимума, если знак меняется с минуса на плюс.

Достаточное условие экстремума можно выразить также с помощью второй производной.

Теорема 7.3.2. Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x_0 является точкой экстремума, причём: 1) x_0 – точка минимума, если $f''(x_0) > 0$; 2) x_0 – точка максимума, если $f''(x_0) < 0$.

7.4. Направление выпуклости, точки перегиба

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*вогнутым вверх*) в данном промежутке, если он целиком расположен выше касательной в его произвольной точке (рисунок 7.4.1). График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* (*вогнутым вниз*) в данном промежутке, если он целиком расположен ниже касательной в его произвольной точке (рисунок 7.4.2).

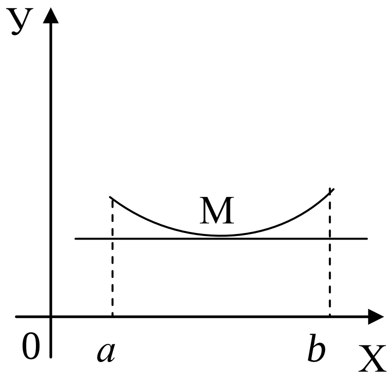


Рисунок 7.4.1

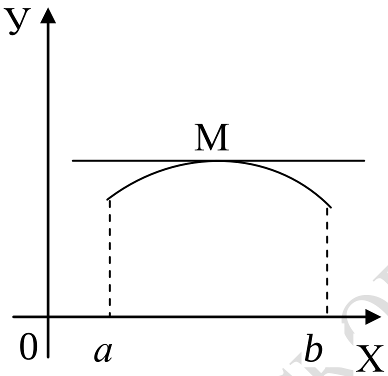


Рисунок 7.4.2

Теорема 7.4.1. Если вторая производная функции $y = f(x)$ в данном промежутке положительна, то график её является выпуклым вниз в этом промежутке; если $f''(x) < 0$, то график функции является выпуклым вверх в соответствующем промежутке.

Определение 7.4.1. *Точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$ называется такая его точка M_0 (рисунок 7.4.3), в которой выпуклость меняется на вогнутость (по отношению к одному и тому же направлению: вверх или вниз).

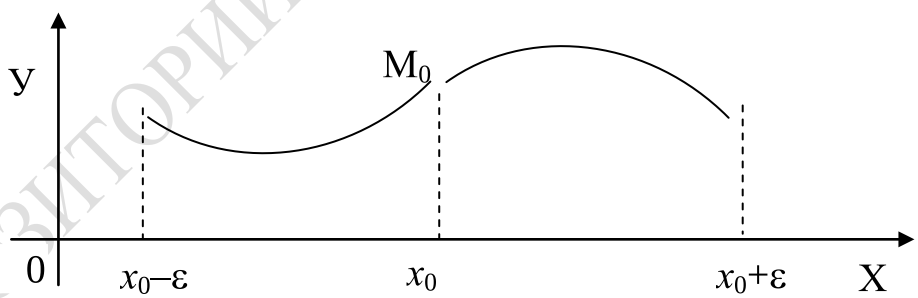


Рисунок 7.4.3

Теорема 7.4.2. Если в точке $x = x_0$ вторая производная функции $y = f(x)$ обращается в нуль и меняет знак при переходе через неё, то M_0 *(x_0, y_0)* – точка перегиба графика этой функции.

7.5. Асимптоты

Определение 7.5.1. *Асимптота* – это прямая, к которой неограниченно приближается данная линия, когда её точка неограниченно удаляется от начала координат.

Определение 7.5.2. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ является бесконечным.

Например, прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота графика функции $y=\dfrac{6}{x-2}$, так как $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{6}{x-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{6}{x-2}=+\infty$.

Определение 7.5.3. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если эта функция представима в виде $f(x) = kx + b + o(x)$, где $\lim\limits_{x\to\infty} o(x) = 0$.

Теорема 7.5.1. График функции $y = f(x)$ имеет при $x \to \infty$ наклонную асимптоту $y = kx + b$ тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b.$$

7.6. Схема исследования функций

Исследование функций и построение их графиков можно проводить по представленной ниже схеме.

1. Найти область определения функции, её точки разрыва.
2. Изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения.
3. Найти точки экстремумов, промежутки возрастания и убывания функции.
4. Вычислить значения экстремумов, построить соответствующие точки.
5. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика с координатными осями.
7. Найти асимптоты графика функции.

Порядок исследования иногда целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите: а) необходимое и достаточное условие того, что функция является постоянной; б) признак возрастания (убывания) функции.
2. Дайте определение максимума и минимума функции. Проиллюстрируйте это на рисунке.
3. Определите понятие экстремума функции и сформулируйте необходимое условие экстремума функции.
4. Сформулируйте достаточное условие экстремума функции.
5. Как связаны экстремум функции и вторая производная этой функции?
6. Определите понятие выпуклости (вогнутости) графика функции. Проиллюстрируйте это на рисунке.
7. Сформулируйте достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции.
8. Что называется точкой перегиба? Сформулируйте достаточное условие существования точек перегиба.

Практическое занятие. Исследование функций и построение графиков

Задания для аудиторной работы

Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить её график:

1) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; 2) $y = x^3 - 3x + 2$.

Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить её график:

1) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; 2) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихолетов, И. И. Высшая математика, теория вероятности и математическая статистика / И. И Лихолетов. – Минск : Вышэйшая школа, 1976. – 569 с.

2. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии / П. С. Александров. – М. : Наука, 1968. – 912 с.

3. Александров, Л. Д. Геометрия / Л. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. – М. : Наука, 1990. – 672 с.

4. Погорелов, А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1983. – 288 с.

5. Гусак, А. А. Высшая математика: в 2 ч. Ч. 2 / А. А. Гусак. – Минск : Университетское, 1984. – 383 с.

6. Бугров, Я. С. Высшая математика. Диффренциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1988. – 432 с.

7. Глаголев, А. А. Курс высшей математики / А. А. Глаголев, Т. В. Солнцева. – М. : Высшая школа, 1971. – 656 с.

8. Лобоцкая, Н. Л. Основы высшей математики / Н. Л. Лобоцкая. – Минск : Вышэйшая школа, 1978. – 352 с.

9. Прохоров, Ю. В. Математический энциклопедический словарь / Ю. В.Прохоров. – М. : Сов. Энциклопедия, 1988. – 847 с.

10. Теория выбора и принятия решений / И. М. Макаров [и др.]. – М. : Наука, 1982. – 328 с.

11. Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – М. : Наука, 1984. – 256 с.

12. Апатенок, Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейнман. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 192 с.

13. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1971. Ч.1 – 648 с.; Ч. 2, 1973. – 464 с.

14. Фридман, Л. П. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Л. П. Фридман. – М. : Просвещение, 1983. – 160 с.

Производственно-практическое издание

Кравченко Юрий Владимирович,
Бычков Павел Владимирович

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Линейная алгебра и элементы математического анализа

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 03.05.2019. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 298.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.