Таблица 4 − Решение задачи с использованием весовых коэффициентов

№ опыта	Y1	Y2	Y3	F(Y)M
1	0,25	3,06	0,24	4,74
4	0,34	2,25	0,24	4,47
6	0,30	2,38	0,29	4,38

Оценка полученных данных позволяет заключить, что оптимальным при заданных условиях будет вариант № 1, оптимальные управляемые параметры для редуктора.

Следует отметить, что ввод вышеупомянутых весовых коэффициентов увеличивает субъективность выбора оптимального варианта и её можно понизить, если конструктор, обладая дополнительной информацией, может расположить критерии по степени их важности.

Вывод: Представленная методика позволяет выбрать оптимальные параметры двухступенчатого цилиндрического редуктора на раннем этапе проектирования с/х техники.

Литература

1. Соболь, И. М. Выборы оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И. М. Соболь, Р. Б. Статников. – М.: Наука, 1985. – 107 с.

2. Максимей, И. В. Имитационное моделирование на ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988.

В.В. Диндиков (УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель)

Науч. рук. **Г.Ю. Тюменков**, к.ф.-м.н., доцент

ПОИСК ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА ДЕЙСТВИЯ

Задача о движении трех тел под действием гравитационного взаимодействия очень давно интересовала многих ученых, так как за кажущейся простотой обнаруживается очень сложная проблема. Известно, что общая задача трех тел не имеет аналитического решения, поэтому часто изучаются частные случаи, например ограниченная задача трех тел. Особый интерес представляют поиск периодических орбит. Первые точные периодические решения для тел равной массы были найдены Леонардом Эйлером в 1767 г. и Луи Лагранжем в 1772 г. Дальнейшее исследования задачи трех тел стало возможно с развитием вычислительных технологий в XX веке.

В 90-х годах XIX века Анри Пуанкаре предложил принцип наименьшего действия для нахождения периодических орбит. Первый кто использовал и развил эти принципы был Мур [3]. Мур рассмотрел обобщенный потенциал взаимодействия между телами $V \propto r^{\alpha}$. Ньютоновскому потенциалу соответствует $\alpha = -1$. Он показал, что периодические орбиты соответствуют минимуму функционала действия

$$A = \int_0^T (K - V)dt, \tag{1}$$

где K и V – кинетическая и потенциальные энергии системы N тел, T – совокупный период обращения компонентов системы.

Для системы n тел с массами m_j, обозначим z_j положение j-го тела в момент времени t. Тогда для n тел с траекториями $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)$, $0 \le t \le 2\pi$, запишем функционал действия в виде [1]:

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\sum_j \frac{m_j}{2} \left|\dot{z}_j\right|^2 + \sum_{j,k;k<j} \frac{m_j m_k}{\left|z_j - z_k\right|} \right) dt. \tag{2}$$

Для нахождения периодических орбит используем разложение траекторий в ряды Фурье

$$z_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt}, \qquad \text{где } \gamma_k \in X. \tag{3}$$

Траектории для плоской задачи будут содержать компоненты $z_j(t) = (x_j(t), y_j(t))$, и $\gamma_k = (\alpha_k, \beta_k)$, которые представимы в виде рядов

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^c \cos(kt) + a_k^s \sin(kt)) \\ y(t) &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^c \cos(kt) + b_k^s \sin(kt)) \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} &a_0 = \alpha_0, \qquad a_k^c = \alpha_k + \alpha_{-k}, \qquad a_k^s = \beta_{-k} - \beta_k, \\ &b_0 = \beta_0, \qquad b_k^c = \beta_k + \beta_{-k}, \qquad b_k^s = \alpha_k - \alpha_{-k}, \end{aligned}$$

Будем рассматривать движение трех тел равной массы в плоскости. Так как функционал действия в пространстве параметров a_0, a_k^c, a_k^s, b_0, b_k^c, b_k^s имеет множество локальных минимумов, то существует множество периодических орбит трех тел.

Для нахождение минимума воспользуемся системой компьютерной алгебры Mathematica. На рисунках представлены примеры полученных орбит.

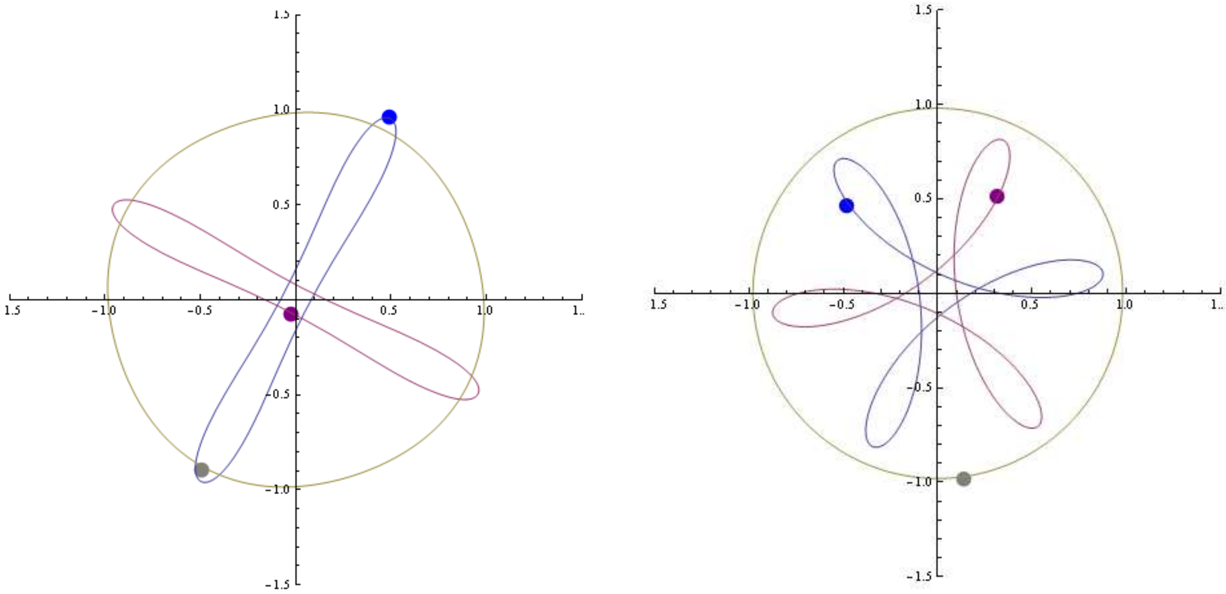

Рисунок 1 – Орбита «Ducati» и орбита Хилла

Большой интерес представляют орбиты, в которых все три тела движутся по одной замкнутой орбите – они имеют название «хореографии». Ярким примером такой хореографии является ее простейший тип – орбита «восьмерка».

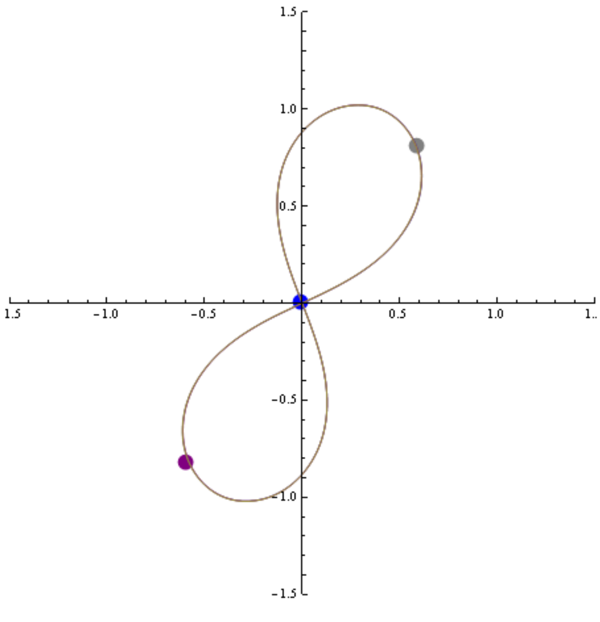

Рисунок 2 – Орбита «восьмерка»

Проверить существование полученных орбит можно с помощью численного интегрирования уравнений задачи трех тел [4]:

$$m_j \ddot{z}_j^{\alpha} = \sum_{k:k\neq j} m_j m_k \frac{z_j^{\alpha} - z_k^{\beta}}{\left|z_j - z_k\right|^3}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2. \qquad (5)$$

Для примера возьмем орбиту «восьмерка». Начальные значения скоростей и координат возьмем из орбиты, изображенной на рисунке 2. Для нахождения минимума функционала действия можно ограничиться 10-ю членами ряда Фурье, что определяется вычислительными возможностями компьютера. Полученные значения начальных значений скоростей и координат имеют приближенный характер. Таким образом, при численном интегрировании уравнений задачи трех тел, имеем орбиту, близкую к «восьмерке». Как видно из рисунка 3, в области устойчивого движения по «восьмерке» существуют орбиты, на некотором интервале времени близкие к «восьмерке». Этот факт был доказан Муром в работе [3].

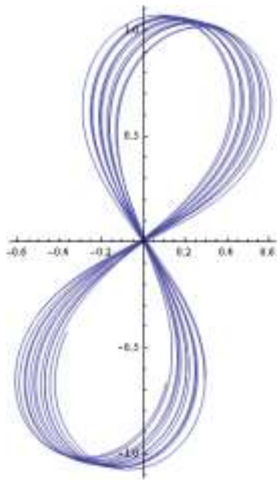

Рисунок 3 – Иллюстрация численной проверки существования «восьмерки»

Метод минимизации функционала действия, впервые реализованный Муром [3], в последнее годы активно развивается и используется для поиска периодических орбит в задаче n тел. Этот метод оказался очень мощным и позволил построить много новых семейств периодических орбит. Особый интерес представляют периодические орбиты типа «хореографий», когда все тела движутся друг за другом по одной замкнутой кривой.

Таким образом в работе проиллюстрировано использование метода минимизации функционала действия для нахождения периодических решений в общей задаче трех тел.

Литература

1. Vanderbei, R. J. New orbits for the n-body problem / R. J. Vanderbei // Annals of the New York Academy of Sciences. – 2004. – V. 1017. – P. 422–430.
2. Орлов, В. В. Периодические орбиты в задаче N тел / В. В. Орлов, А. В. Рубинов, А. И. Мартынов // Физика Космоса. – Екатеринбург: УГУ, – 2010. – 108–121 с.
3. Moore, C. Braids in classical dynamics / C. Moore // Phys. Rev. Lett. – 1993. – V. 70. – P. 3675–3683.
4. Рой, А. Движение по орбитам / А. Рой – М.: Мир, 1981. – 545 с.

В.В. Диндиков (УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель)
Науч. рук. **Г.Ю. Тюменков**, к.ф.-м.н., доцент

ИЗУЧЕНИЕ НОВОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ В ОБЩЕЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Первые периодические орбиты в общей задаче трех тел были аналитически получены Леонардом Эйлером и Луи Лагранжем. Более того, Лагранж показал, что других периодических орбит аналитически получить не возможно. Однако с начала XX века получили развитие численные методы изучения общей задачи трех тел. Можно отметить исследования предельных случаев, таких как ограниченная задача, прямолинейная и равнобедренная задачи трех тел. В них также численно найдены периодические орбиты.

В 90-х годах прошлого века Муром впервые был использован метод минимизации функционала действия [3], предложенный Пуанкаре еще в конце XIX века. Результатом исследования была орбита «восьмерка», относящаяся к новому типу орбит в задаче трех тел с равными массами – «хореографиям». Мур также предложил топологический метод классификации орбит.

Для наглядного представления орбит N он использует диаграммы, изображающие «косы» из N «прядей», которые строятся в трехмерном пространстве при движении N тел на плоскости. Диаграммы показывают на протяжении одного периода для каждого из тел изменение одной из пространственных координат (ось абсцисс) со временем (ось ординат), а также то, какая из «прядей» при их пересечении проходит выше (с учетом второй координаты).