УДК 530.1; 539.12

В.В.Андреев[1], К.С.Бабич[1], Е.С.Чеботарева[2]

КРИТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ КУЛОНОВСКОГО ПАРАМЕТРА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЕ

[1] *Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, ул. Советская, 104, 246019 Гомель, Беларусь*
vik.andreev@gsu.by
[2] *ГОУ ВПО Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского, филиал в г. Новозыбкове, РФ*

В квантовых системах с кулоновским потенциалом $V(r) = -\alpha / r, (\alpha > 0)$ имеется критическое значение параметра α, при котором не существует дискретного энергетического спектра. В работе [1] (см. также ссылки в [2]) было показано, что и релятивистское обобщение уравнения Шредингера – бесспиновое уравнение Солпитера

$$H\Phi_n = \left[\sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2} + V(r)\right]\Phi_n = E_n \Phi_\mathrm{n}, \qquad (1)$$

будет также иметь критическое значение. В данной работе предложена методика оценки критических значений на основе решения уравнения (1) вариационным и численным методом.

В вариационном подходе решение уравнения (1) сводится к задаче на собственные значения (СЗ) с использованием разложения исходной волновой функции (ВФ) Ф по некоторому полному набору состояний пробных ВФ Ψ_k:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left\langle \Psi_k \,|\, \hat{H} \,|\, \Psi_{k'} \right\rangle \equiv \sum_k a_k \left\langle H \right\rangle_{k,k'} = \hat{E}_n \, a_{k'} \qquad (2)$$

Элементы матрицы $\langle H \rangle_{n,n'}$, после вычисления угловой части с помощью пробных ВФ представляют интегралы вида

$$\begin{aligned} \left\langle H \right\rangle_{nn'} &= \int_0^\infty \tilde{\psi}^*_{n\ell}(k)[\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}]\tilde{\psi}_{n'\ell}(k) k^2 dk + \\ &+ \int_0^\infty \psi^*_{n\ell}(r) V(r) \psi_{n'\ell}(r) r^2 dr, \qquad r = |\vec{r}|, k = |\vec{k}|. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь $\tilde{\psi}_{nl}(k)$ – фурье-образ ВФ $\psi_{nl}(r)$.

Решение уравнения (1) также можно проводить численным методом. Применяя разработанную нами методику численных расчетов, можно, используя квадратурные формулы для полуспектрального метода Чебышева [3], свести интегральное уравнение (1) к задаче на СЗ: $H_{ji}\tilde{\psi}_i(k) = \varepsilon \tilde{\psi}_i(k)$. Матрица в левой части при этом имеет вид

$$H_{ji} = \sum_{i=1}^{N} \left(W_{ji} + \left[\sqrt{k_j^2 + m_1^2} + \sqrt{k_j^2 + m_2^2}\right] \delta_{ji} \right), \qquad (4)$$

где W_{ji} — матрица, связанная с потенциальной частью в (1).

Используя вариационный либо численный метод для уравнения (1) с кулоновским потенциалом приходим к задаче на СЗ

$$Det\|H(\alpha, \beta) - I \times E\| = 0, \qquad (5)$$

Производя переход к безразмерным переменным посредством соотношений: $\langle H\rangle \to \beta\langle \widetilde{H}\rangle$ и $E \to \beta\widetilde{E}$ задача (5) переходит в решение уравнения

$$Det\left\|\left\langle \widetilde{H}(\alpha, m/\beta)\right\rangle - I\times\widetilde{E}\right\| = 0\,, \tag{6}$$

поскольку $\beta \neq 0$.

Критическому значению кулоновского параметра $\alpha = \alpha_{crit.}$ соответствует предельный переход при $\beta \to \infty$ [2]. Выполняя предельный переход $\beta \to \infty$ в (6) приходим к уравнению

$$Det\left\|\left\langle \widetilde{H}(\alpha_{crit.},0)\right\rangle\right\| = Det\left\|\left\langle \widetilde{T}((m/\beta)=0) + \widetilde{V}(\alpha_{crit.})\right\rangle\right\| = 0\,, \tag{7}$$

где

$$\left\langle \widetilde{H}\right\rangle_{n,n'} = 2\int_0^\infty \widetilde{\psi}^C_{n\ell}(\widetilde{k})\widetilde{\psi}^C_{n'\ell}(\widetilde{k})\widetilde{k}^3 d\widetilde{k} - \alpha_{crit}\int_0^\infty \psi^C_{nl}(\widetilde{r})\psi^C_{n'\ell}(\widetilde{r})\widetilde{r}\, d\widetilde{r} \tag{8}$$

с безразмерными волновыми функциями

$$\psi^C_{n\ell}(\tilde{r}) = \sqrt{\frac{8n!}{(n+2\ell+2)!}}\,(2\tilde{r})^\ell e^{-\tilde{r}} L_n^{2\ell+2}(2\tilde{r})\ .$$

В итоге, уравнение (7) с матричными элементами (8) определяет набор n критических значений α_{crit} для n уровней энергии E.

Для простейшего случая $n = \ell = 0,\ n' = 0$ верхняя граница α_{crit} может быть легко рассчитана аналитически. Полученное значение $\alpha_{crit} = 16/(3\pi)$ совпадает с результатом работы [2], что косвенно подтверждает правильность методики.

Численное решение системы (7) для $n = n' = 30$ приводят к тому, что оценка для критического значения при этом равна

$$\alpha_{crit} \le 1{,}09\,,$$

что согласуется с оценкой $\alpha_{crit} \le 1$, полученной в работе [4].

[1] Herbst, I. Spectral Theory of the operator / I.Herbst // Commun.Math.Phys. - 1977. - Vol. 53. - P. 285-294.
[2] Lucha, W. Relativistic Coulomb problem: Energy levels at the critical coupling constant analytically / W.Lucha, F.F.Schoberl // Phys.Lett. - 1996. - Vol. B387. - P. 573-576.
[3] Андреев, В. В. Решение интегральных уравнений для квантовых двухчастичных систем с корнельским потенциалом в импульсном пространстве/ В. В. Андреев, К. С.Бабич// Весці НАН Б. Сер.фіз.-мат. навук. – 2011.-№ 3, С.54-59.
[4] Martin, A. Semirelativistic stability and critical mass of a system of spinless bosons in gravitational interaction/A.Martin, S.M.Roy //Phys.Lett.- 1989. - Vol. B233.-P.407-412.