

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Практическое пособие

для студентов специальностей
6-05-0533-01 «Физика»,
6-05-0533-04 «Компьютерная физика»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2024

УДК 535.33:539.18:539.19(076)
ББК 22.344.3я73+22.36я73
Ф505

Авторы:

В. Ф. Шолох, Ю. В. Никитюк,
А. Л. Самофалов, А. А. Шамына

Рецензенты:

доктор физико-математических наук В. В. Андреев,
кандидат технических наук Д. В. Прокопенко

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Физические приложения тензорного анализа : практическое пособие / В. Ф. Шолох [и др.] ; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2024. – 47 с.
ISBN 978-985-32-0035-5

В пособии приведены задачи различного уровня сложности, предназначенные для проведения практических занятий и формирования индивидуальных заданий исследовательского характера по дисциплине «Основы векторного и тензорного анализа». Три темы пособия позволяют сформировать представления о тензоре как физической величине, о полевых и материальных тензорах.

Адресовано студентам первого курса специальностей 6-05-0533-01 «Физика», 6-05-0533-04 «Компьютерная физика».

УДК 535.33:539.18:539.19(076)
ББК 22.344.3я73+22.36я73

ISBN 978-985-32-0035-5

© Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
1. Тензор моментов инерции.....	5
2. Тензор деформаций и тензор напряжений.....	10
3. Материальные тензоры второго ранга.....	23
4. Ответы и рекомендации к задачам.....	41
Литература.....	47

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практическое пособие является частью практикума по дисциплине «Основы векторного и тензорного анализа». Его цели – сформировать у студентов представление о тензорном характере физических величин и применении тензоров для описания физических свойств вещества, а также выработать навыки использования тензорного исчисления при решении прикладных физических задач.

Пособие адресовано студентам первых курсов физических специальностей университетов. Поэтому при подготовке материалов авторы сознательно ограничились рассмотрением тензоров второго ранга. В пользу такого ограничения, на наш взгляд, свидетельствуют следующие обстоятельства. Во-первых, тензоры второго ранга имеют матричное представление, а с понятием матрицы студенты уже знакомы. Во-вторых, характеристические и указательные поверхности таких тензоров являются поверхностями второго порядка и также знакомы студентам. В-третьих, багаж знаний по физике у студентов первых курсов весьма небогат. В связи с этим, даже рассматривая только тензоры второго ранга, в пособии не затрагиваются весьма интересные вопросы оптики анизотропных сред, тензоры поля и квадрупольного момента в электродинамике и другие. Подавляющее большинство рассматриваемых в издании примеров и предлагаемых задач относятся к механике и электричеству.

Для удобства пользователя в начале каждой темы приводится теоретическая справка, содержащая основные физические и математические сведения необходимые для решения предлагаемых задач. Наряду с традиционным индексным методом в пособии уделено внимание и ковариантным методам тензорного исчисления, разработанным Ф. И. Федоровым и доказавшим свою высокую эффективность при решении задач кристаллофизики.

Примеры и задачи, приведенные в пособии, должны сформировать и закрепить у студентов представление о многокомпонентности тензоров, научить применять законы преобразования их компонент, видеть «геометрическую картинку» физического явления и влияние на него свойств симметрии. Все это крайне важно для осознанного усвоения материала.

1. ТЕНЗОР МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Основные понятия

Тензор моментов инерции, или кратко *тензор инерции*, системы материальных точек имеет вид

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum m_k x_k y_k & -\sum m_k x_k z_k \\ -\sum m_k y_k x_k & \sum m_k (x_k^2 + z_k^2) & -\sum m_k y_k z_k \\ -\sum m_k z_k x_k & -\sum m_k z_k y_k & \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

В выражении (1.1), при вычислении компонент тензора I_{ij} , суммирование выполняется по всем точкам системы. Поэтому при вычислении тензора инерции твердого тела суммирование должно быть заменено интегрированием и выражения для компонент I_{ij} принимают вид

$$I_{ij} = \int (x_s^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm, \quad (1.2)$$

где интегрирование выполняется по объему тела. Как обычно, по немым индексам s предполагается суммирование от 1 до 3.

Тензор моментов инерции характеризует инертные свойства тела при его вращении. В частности, в системе центра масс его компоненты определяют кинетическую энергию тела вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$:

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j. \quad (1.3)$$

Диагональные компоненты I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} описывают моменты инерции тела при его вращении вокруг соответствующих координатных осей. Их принято называть *осевыми*. Недиagonальные компоненты I_{ij} ($i \neq j$) называют *центробежными* моментами инерции тела. Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси, направление которой в выбранной системе координат задано единичным вектором \vec{n} , равен (см. задачу 1 в примерах решения задач):

$$I_{\vec{n}} = I_{ij} n_i n_j. \quad (1.4)$$

Будучи симметричным, тензор инерции может быть приведен к системе главных осей $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$. В этой системе все центробежные моменты инерции равны нулю и тензор инерции имеет диагональный вид. При этом диагональные компоненты тензора инерции, которые называют *главными моментами инерции*, равны его собственным значениям.

В зависимости от кратности собственных значений тензора инерции твердые тела принято разделять на три вида:

- шаровые волчки ($\hat{I}_{11} = \hat{I}_{22} = \hat{I}_{33}$);
- симметричные волчки ($\hat{I}_{11} = \hat{I}_{22} \neq \hat{I}_{33}$);
- асимметричные волчки ($\hat{I}_{11} \neq \hat{I}_{22} \neq \hat{I}_{33}$).

Особым случаем симметричного волчка является тело, у которого $\hat{I}_{33} = 0$. Такое тело, получившее название *ротатор*, имеет только две вращательные степени свободы.

В заключение отметим, что нахождение главных осей тензора инерции существенно упрощается, если твердое тело обладает той или иной симметрией.

Примеры решения задач

Задача 1. Выразить момент инерции тела I_n относительно оси NN' , проходящей через центр инерции тела и направленной вдоль единичного вектора \vec{n} , через компоненты тензора инерции.

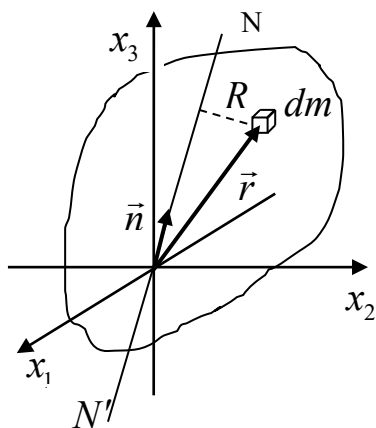


Рисунок 1.1

Решение. Разобьем данное тело на элементарные части массой dm (рисунок 1.1). Момент инерции элементарной массы dm относительно оси $N'N$ равен $dI_n = R^2 dm$. Учитывая, что квадрат расстояния от массы dm до оси вращения $N'N$

$$R^2 = [\vec{n}\vec{r}]^2,$$

где \vec{r} – радиус-вектор массы dm , после интегрирования по всему телу имеем

$$I_n = \int [\vec{n}\vec{r}]^2 dm. \quad (1.5)$$

Преобразуем правую часть выражения (1.5) с помощью свойств псевдотензора Леви–Чивита

$$I_n = \int [\vec{n}\vec{r}]^2 dm = \int e_{ijk} n_j r_k e_{ips} n_p r_s dm = \int (\delta_{jp} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kp}) r_k r_s n_j n_p dm = \\ = \int (r_s^2 \delta_{jp} - r_j r_p) n_j n_p dm.$$

Так как направляющие косинусы n_i единичного вектора \vec{n} не зависят от переменной интегрирования, то они могут быть вынесены за знак интеграла. Тогда, учитывая формулу (1.2), приходим к окончательному результату:

$$I_n = \int (r_s^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dm n_i n_j = I_{ij} n_i n_j,$$

где I_{ij} – тензор инерции в системе координат, начало которой совпадает с центром масс данного тела.

Задача 2. Для данной системы материальных точек, расположенных в вершинах $\triangle ABD$ (рисунок 1.2), найти: а) тензор инерции в системе координат, начало которой совпадает с центром масс данной системы точек; б) систему главных осей и главные моменты инерции; в) моменты инерции относительно осей проходящих через центр масс и вершины треугольника.

Решение. Радиус-вектор центра масс C данной системы материальных точек в системе координат, показанной на рисунке 1.2 (ось z перпендикулярна плоскости рисунка):

$$\vec{R}_C = \frac{m\vec{r}_A + m\vec{r}_B + 2m\vec{r}_D}{4m} = \frac{2ma\vec{i} + 4ma\vec{j} - 2ma\vec{i}}{4m} = a\vec{j}.$$

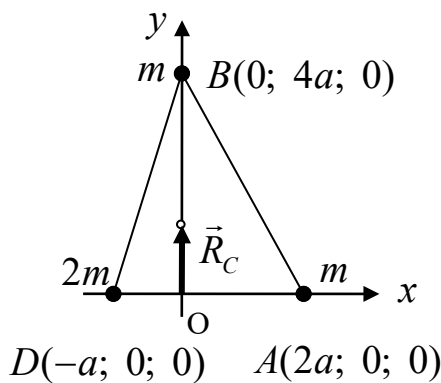


Рисунок 1.2

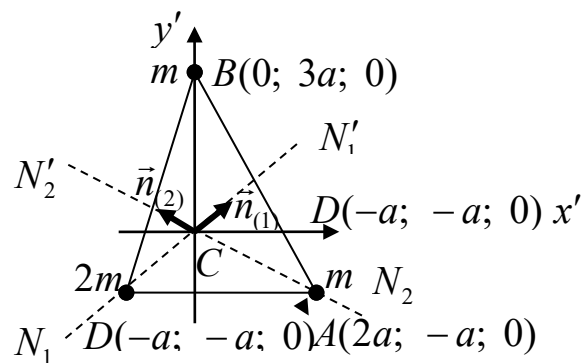


Рисунок 1.3

В системе центра масс $x'y'z'$ (рисунок 1.3) координаты вершин треугольника, в которых расположены материальные точки, равны: $A(2a; -a; 0)$, $B(0; 3a; 0)$, $D(-a; -a; 0)$. Тогда компоненты тензора инерции в выбранной C -системе:

$$\begin{aligned} I_{x'x'} &= \sum m_k (y_k'^2 + z_k'^2) = m(-a)^2 + m(3a)^2 + 2m(-a)^2 = 12ma^2, \\ I_{y'y'} &= \sum m_k (x_k'^2 + z_k'^2) = m(2a)^2 + 2m(-a)^2 = 6ma^2, \\ I_{z'z'} &= \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) = m((2a)^2 + (-a)^2) + m(3a)^2 + 2m((-a)^2 + (-a)^2) = 18ma^2, \\ I_{x'y'} &= -\sum m_k x_k' y_k' = -m2a(-a) - 2m(-a)(-a) = 0, \quad I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0. \end{aligned}$$

Так как в системе $x'y'z'$ тензор инерции имеет диагональный вид, то оси этой системы координат будут главными осями инерции: $\hat{x} = x'$; $\hat{y} = y'$; $\hat{z} = z' = z$, а сама система является системой главных осей.

Для определения моментов инерции относительно осей N_1N_1' и N_2N_2' воспользуемся формулой (1.4). Единичные векторы соответствующих осей $\vec{n}_{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right)$ и $\vec{n}_{(2)} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right)$.

Следовательно,

$$I_{N_1N_1'} = I_{ij} n_{(1)i} n_{(1)j} = I_{x'x'} n_{(1)x'}^2 + I_{y'y'} n_{(1)y'}^2 + I_{z'z'} n_{(1)z'}^2 = 9ma^2;$$

$$I_{N_2N_2'} = I_{ij} n_{(2)i} n_{(2)j} = I_{x'x'} n_{(2)x'}^2 + I_{y'y'} n_{(2)y'}^2 + I_{z'z'} n_{(2)z'}^2 = \frac{54}{5} ma^2.$$

Ось проходящая через вершину B и центр масс C совпадает с главной осью инерции $\hat{y} = y'$. Следовательно момент инерции относительно этой оси равен $\hat{I}_{y'y'} = 6ma^2$.

Задачи

1.1. В вершинах квадрата со стороной $2a$ расположены точечные массы m и M (рисунок 1.4). Найти компоненты тензора инерции относительно:

а) осей x_1, x_2, x_3 ; б) осей x_1' и x_2' , совпадающих с диагоналями квадрата, и оси x_3 . Указать главные оси инерции.

1.2. Найти главные оси инерции и главные моменты инерции следующих систем материальных точек относительно их центра масс: а) массы m и $2m$ расположены в вершинах ромба со стороной $2a$ и углом $\phi = 60^\circ$ (рисунок 1.5); б) массы m и $2m$ расположены в вершинах прямоугольного треугольника с катетами $2a$ и $4a$ (рисунок 1.6).

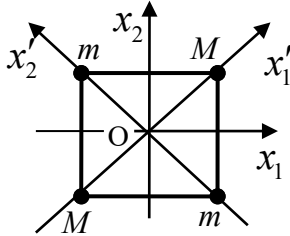


Рисунок 1.4

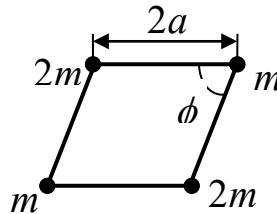


Рисунок 1.5

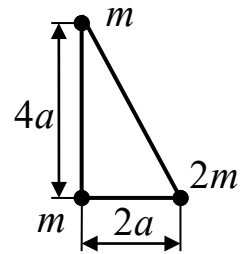


Рисунок 1.6

1.3. Найти тензор инерции для следующих однородных сплошных тел, считая, что ось вращения проходит через их центры масс, а масса тела равна m : а) тонкого стержня длиной l ; б) диска радиусом R ; в) прямоугольной пластинки со сторонами a и b ; г) шара радиусом R ; д) круглого цилиндра радиусом R и высотой h .

1.4. Найти главные моменты инерции следующих однородных тел, содержащих полости: а) шара радиусом R_1 с шаровой полостью радиусом R_2 ; б) полого толстостенного цилиндра с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) и высотой h ; в) круглой пластины радиусом R , внутри которой вырезан квадрат с длиной стороны равной R . Считать, что центр полости совпадает с центром массы тела и масса тела с полостью равна m .

1.5. При каком соотношении между радиусом основания R однородного кругового конуса и его высотой h эллипсоид инерции, построенный для точки совпадающей с вершиной конуса, обратится в сферу?

1.6. Показать, что при переходе от точки O , совпадающей с центром масс тела, к точке O' компоненты тензора инерции I_{ij} преобразуются по закону

$$I'_{ij} = I_{ij} + m(\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j),$$

где m – масса тела;

\vec{a} – вектор, определяющий положение точки O относительно точки O' .

1.7. Выразить кинетическую энергию тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, через компоненты тензора инерции.

1.8. Найти кинетическую энергию и момент импульса однородного прямоугольного параллелепипеда с ребрами a , b и c и массой m , вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг: а) одной из своих пространственных диагоналей; б) диагонали грани размером $a \times b$.

1.9. Найти кинетическую энергию и момент импульса однородного конуса радиусом R и высотой h , вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг одной из своих образующих. Масса конуса m .

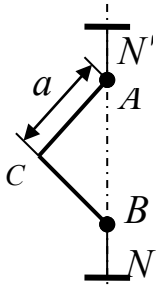


Рисунок 1.7

1.10. Относительно точки C главные моменты инерции тонкого стержня ABC , согнутого под прямым углом (рисунок 1.7), равны: $\hat{I}_{11} = \hat{I}_{22} = \frac{1}{2} \hat{I}_{33} = \frac{1}{3} ma^2$. Найти период малых крутильных колебаний стержня, закрепленного в точках A и B , вокруг вертикальной оси NN' . Модуль кручения подвеса равен f .

2. ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ И ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Основные понятия

Под действием приложенных сил твердое тело деформируется. В результате деформации все точки тела, вообще говоря, смещаются и занимают новые положения. Смещение точки $M(\vec{r})$ в новое положение $M'(\vec{r}')$ определяется вектором смещения

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}.$$

Так как координаты x_i' смещенной точки M' являются функциями координат x_i той же точки до смещения, то вектор смещения является функцией координат x_i : $\vec{u} = \vec{u}(x_i)$. Векторы смещения, заданные в каждой точке тела, образуют векторное поле смещений. В случае однородных деформаций они являются линейными функциями координат точки.

Для описания деформаций существенны не абсолютные смещения точек тела, а смещение его точек относительно друг друга. Относительное смещение двух бесконечно близких точек среды $M(x_i)$ и $N(x_i + dx_i)$ равно

$$d\bar{u} = \bar{u}(x_i + dx_i) - \bar{u}(x_i)$$

или, в проекциях на оси выбранной системы координат

$$du_i = u_i(x_j + dx_j) - u_i(x_j) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j. \quad (2.1)$$

Девять коэффициентов $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ системы уравнений (2.1) образуют

тензор второго ранга – *тензор малых смещений*. В общем случае этот тензор несимметричен и может быть представлен в виде суммы симметричного u_{ij} и антисимметричного ω_{ij} тензоров:

$$e_{ij} = u_{ij} + \omega_{ij}. \quad (2.2)$$

Антисимметричная часть ω_{ij} тензора малых смещений описывает вращение тела как целого вокруг неподвижной оси без смещения его точек относительно друг друга. Ее называют *тензором вращений*.

Симметричная часть

$$u_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

описывает изменение квадрата расстояния между точками $M(x_i)$ и $N(x_i + dx_i)$ под действием приложенных к телу сил, то есть характеризует изменение элемента длины деформируемого тела. Именно она является *тензором деформаций*.

Диагональные компоненты u_{11} , u_{22} , u_{33} являются относительными деформациями сжатия или растяжения элементов единичной длины вдоль осей выбранной системы координат. Деформации растяжения принято считать положительными, а деформации сжатия – отрицательными. Недиagonальные компоненты u_{ij} ($i \neq j$) определяют деформации сдвига в соответствующих координатных плоскостях. Их удвоенное значение равно изменению γ угла между двумя элементами расположенными до деформации параллельно осям координат x_i и x_j :

$$2u_{ij} = \gamma. \quad (2.4)$$

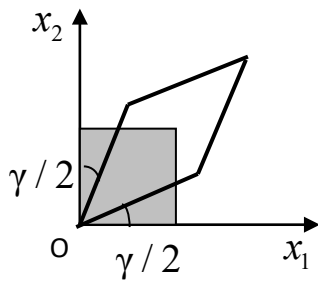


Рисунок 2.1

Деформации сдвига считаются положительными, если в результате деформации угол между линейными элементами, выделенными в недеформированном теле параллельно соответствующим координатным осям, уменьшается. На рисунке 2.1, в качестве примера, показаны углы соответствующие положительным сдвиговым деформациям u_{12} и u_{21} в плоскости координатных осей x_1 и x_2 .

Тензор деформаций симметричный. Следовательно, его можно привести к системе главных осей, в которой он принимает диагональный вид. Физически это означает, что в каждой точке тела можно выбрать такую систему координат $\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$, в которой деформация тела сводится только к растяжениям и сжатиям вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, а деформации сдвига равны нулю.

Тензору u_{ij} ставится в соответствие тензорная поверхность – поверхность деформаций, уравнение которой в системе главных осей имеет вид

$$\hat{u}_{11}\hat{x}_1^2 + \hat{u}_{22}\hat{x}_2^2 + \hat{u}_{33}\hat{x}_3^2 = 1. \quad (2.5)$$

Однако, для наглядного представления деформаций тела вместо тензорной поверхности, вид которой определяется собственными значениями тензора u_{ij} , удобно пользоваться *эллипсоидом деформаций*.

(Смотрите примеры решения задач: задача 1).

В результате деформации, приводящей к смещению точек тела из положения равновесия, в теле возникают внутренние силы, стремящиеся вернуть тело в исходное состояние, получившие название *внутренние напряжения*. В связи с этим состояние деформированного тела принято называть *напряженным состоянием*.

Однородное напряженное состояние упруго деформированного тела в его некоторой точке $M(\vec{r})$ на произвольно ориентированной

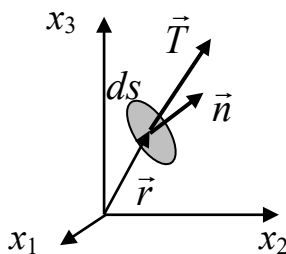


Рисунок 2.2

площадке площадью ds с внешней нормалью \vec{n} характеризуется вектором напряжения $\vec{T} = \frac{d\vec{F}}{ds}$

(рисунок 2.2). Так как векторы \vec{T} и \vec{n} неколлинеарны, то в произвольно выбранной декартовой системе координат $x_1x_2x_3$ компоненты напряжения \vec{T} являются линейными функциями

компонент нормали \vec{n} :

$$T_i = t_{ij} n_j. \quad (2.6)$$

Девять коэффициентов t_{ij} системы (2.6) образуют *тензор напряжений*.

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Тензор напряжений – симметричный тензор второго ранга. Для его задания в данной точке тела $M(\vec{r})$ достаточно знать напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку и ортогональных осям выбранной системы координат. В этом случае диагональные компоненты t_{ii} тензора напряжений являются растягивающими (сжимающими) напряжениями вдоль соответствующих координатных осей и определяют нормальные составляющие напряжений на соответствующих площадках. Недиагональные компоненты t_{ij} ($i \neq j$) являются сдвиговыми (касательными) напряжениями, лежащими в плоскостях тех площадок, на которые они действуют (рисунок 2.3).

Знаки компонент тензора напряжений выбирают согласно правилу принятому в теории упругости. Нормальные напряжения t_{ii} считаются положительными, если они соответствуют напряжениям растяжения, и отрицательными, если они соответствуют напряжениям сжатия. За положительные направления касательных напряжений принимают направления координатных осей, если внешняя нормаль к площадке совпадает с

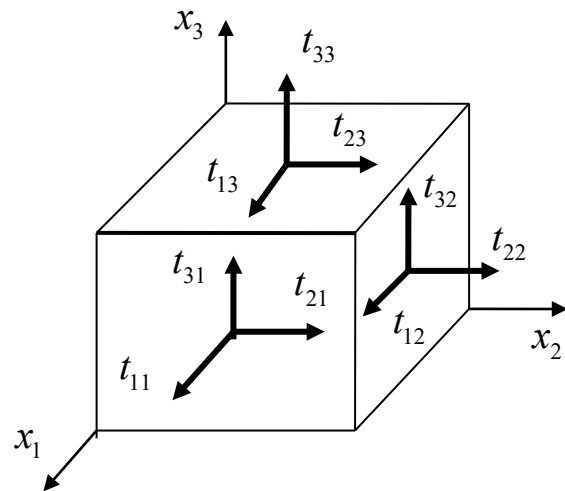


Рисунок 2.3

положительным направлением соответствующей оси координат. Если внешняя нормаль к площадке направлена противоположно направлению оси координат, то положительные касательные напряжения направлены противоположно положительным направлениям соответствующих осей координат. Положительные напряжения на трех из шести граней прямоугольного параллелепипеда показаны на рисунке 2.3.

Будучи симметричным, тензор напряжений может быть приведен к системе главных осей, в которой он принимает диагональный вид. Следовательно, на площадках, перпендикулярных главным осям \hat{x}_1 , \hat{x}_2 и \hat{x}_3 , касательные напряжения отсутствуют. Нормальные напряжения определяются собственными значениями тензора напряжений.

Тензорная поверхность, соответствующая тензору напряжений (2.7), называется *поверхностью напряжений*. Ее уравнение

$$t_{ij}x_i x_j = 1. \quad (2.8)$$

В системе главных осей уравнение (2.8) упрощается и принимает вид

$$\hat{t}_{11}\hat{x}_1^2 + \hat{t}_{22}\hat{x}_2^2 + \hat{t}_{33}\hat{x}_3^2 = 1. \quad (2.9)$$

Поверхность напряжений позволяет путем простых построений определить вектор напряжения \vec{T} на площадке $ds\vec{n}$. Пример такого построения в системе главных осей, в случае когда все собственные значения тензора напряжений положительны, показан на рисунке 2.4.

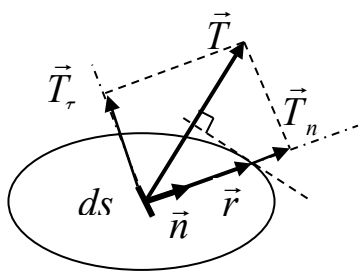


Рисунок 2.4

Величина, обратная квадрату модуля вектора \vec{r} на рисунке 2.4, определяет нормальное напряжение на площадке $d\vec{s}$, которое может

быть вычислено по формуле

$$T_n = t_{ij}n_i n_j. \quad (2.10)$$

В изотропной среде, в случае малых деформаций, компоненты тензора напряжений t_{ij} выражаются через компоненты тензора деформаций u_{ij} соотношением (закон Гука):

$$t_{ij} = ku_{mn}\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{mn}\delta_{ij}\right), \quad (2.11)$$

где скалярные величины k и μ называются *модулем всестороннего сжатия* и *модулем сдвига* соответственно.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти поверхность, в которую переходит сфера единичного радиуса, выделенная в недеформированном теле, после деформации этого тела.

Решение. Уравнение сферы единичного радиуса

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \quad (2.12)$$

Пусть $\vec{r}(x_i)$ – радиус-вектор некоторой точки $M(x_i)$ на поверхности этой сферы, которая в результате деформации смещается в положение $M'(x'_i)$. Обозначив через $\Delta\vec{r}(x_i)$ вектор смещения точки $M(x_i)$, для радиус-вектора точки $M'(x'_i)$ можем записать $\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ или, в проекциях на оси системы координат,

$$x'_i = x_i + \Delta x_i = x_i(1 + u_{ii}), \quad (2.13)$$

где u_{ii} – диагональные компоненты тензора деформаций.

Разрешив уравнения (2.13) относительно x_i и подставив полученные результаты в уравнение (2.12), получим уравнение искомой поверхности

$$\frac{x_1'^2}{(1 + u_{11})^2} + \frac{x_2'^2}{(1 + u_{22})^2} + \frac{x_3'^2}{(1 + u_{33})^2} = 1. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) является уравнением эллипсоида, получившего название эллипсоида деформаций или эллипсоида Ламе.

Задача 2. Поле смещений точек упругого образца, возникающее при его деформации, имеет вид

$$\vec{u} = Ax_3\vec{e}_2 + Ax_2\vec{e}_3,$$

где A – постоянная;

\vec{e}_i – орты декартовой системы координат.

Найти положение частиц среды, которые до деформации составляли:

а) круг с границей $x_2^2 + x_3^2 = 1$ в плоскости $x_1 = 0$; б) бесконечно малый куб, ребра которого лежат на осях координат и имеют длину $dx_i = da$.

Для случаев а) и б) нарисовать деформированные области, полагая $A = 0,5$.

Решение. Отличными от нуля компонентами тензора смещений $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ являются только компоненты $e_{23} = e_{32} = A$, то есть тензор смещений симметричный. Следовательно, тензор деформаций совпадает с тензором смещений и имеет вид

$$[u_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

свидетельствующий, что в системе координат x_1, x_2, x_3 образец испытывает только деформацию сдвига:

а) так как данная область является сечением сферы единичного радиуса плоскостью $x_1 = 0$, то для отыскания ее конфигурации после деформации удобно воспользоваться уравнением эллипсоида деформаций (см. формулу (2.14) задачи 1). Приводя тензор деформаций (2.15) к системе главных осей, в которой деформации выглядят только как деформации сжатий и растяжений, находим, что его главные значения: $\lambda_{(1)} = \hat{u}_{11} = 0$, $\lambda_{(2)} = \hat{u}_{22} = A$, $\lambda_{(3)} = \hat{u}_{33} = -A$. Соответствующие им единичные собственные векторы, задающие направления главных осей \hat{x}_i : $\vec{n}^{(1)} = \vec{e}_1$, $\vec{n}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3$, $\vec{n}^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3$. Тогда уравнение эллипсоида деформации:

$$\frac{\hat{x}_1^2}{(1+\hat{u}_{11})^2} + \frac{\hat{x}_2^2}{(1+\hat{u}_{22})^2} + \frac{\hat{x}_3^2}{(1+\hat{u}_{33})^2} = \frac{\hat{x}_1^2}{1} + \frac{\hat{x}_2^2}{(1+A)^2} + \frac{\hat{x}_3^2}{(1-A)^2} = 1. \quad (2.16)$$

Полагая в (2.16) $\hat{x}_1 = x_1 = 0$ и $A = 0,5$, получаем уравнение эллипса

$$\frac{\hat{x}_2^2}{2,25} + \frac{\hat{x}_3^2}{0,25} = 1,$$

в который деформировался круг единичного радиуса (рисунок 2.5);

б) для отыскания области, в которую деформируется данный куб, запишем координаты точек среды после деформации

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2 + u_2 = x_2 + Ax_3, \quad x'_3 = x_3 + u_3 = x_3 + Ax_2. \quad (2.17)$$

Из (2.17) видно, что ребра, параллельные оси x_1 , не деформируются. На ребрах параллельных оси x_2 частицы перемещаются в направлении оси x_3 пропорционально их расстоянию от начала координат.

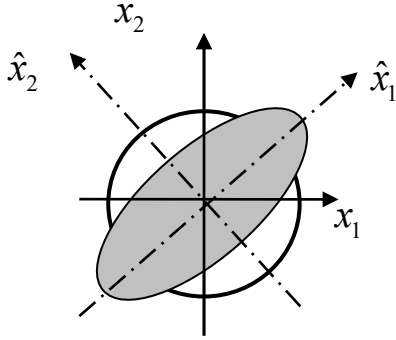


Рисунок 2.5

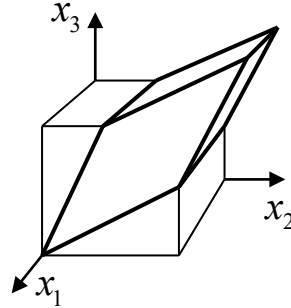


Рисунок 2.6

Частицы, принадлежащие ребрам параллельным оси x_3 , испытывают аналогичные смещения в направлении оси x_2 . Начальное и деформированное положение куба показаны на рисунке 2.6.

Замечание. Недиагональные компоненты тензора деформаций u_{23} и u_{32} определяют угол γ между новыми положениями ребер параллельных осям x_2 и x_3 и положениями этих ребер до деформации. При $A = 0,5$ угол $\gamma = 0,5 \text{ рад} = 28,6^\circ$. С другой стороны, как ясно из рисунка 2.6 и уравнений (2.17), $\text{tg}\gamma = 0,5$ и $\gamma = 26,6^\circ$. Полученное расхождение объясняется тем, что относительные деформации смещения $\hat{u}_{22} = |\hat{u}_{33}| = 50\%$, конечно, не являются малыми.

Задача 3. В декартовой системе координат $x_1x_2x_3$ тензор напряжений упругого образца в точке M имеет вид

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}.$$

Найти систему координат, в которой данное напряженное состояние можно рассматривать только как систему сжатий и растяжений. Записать уравнение тензорной поверхности тензора t_{ij} в старой и новой системах координат.

Решение. Напряжения, возникающие при деформациях приводящих только к сжатиям и растяжениям, описываются диагональными компонентами тензора t_{ij} . Следовательно, задача сводится к приведению тензора напряжений к диагональному виду, то есть решению системы уравнений

$$t_{ij}n_j^{(k)} = \lambda_{(k)}n_i^{(k)}, \quad (2.18)$$

определяющей собственные значения $\lambda_{(k)}$ и собственные векторы $\vec{n}^{(k)}$ данного тензора.

Уравнение для вычисления собственных значений следует из требования равенства нулю определителя системы (2.18):

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0.$$

Главные напряжения являются корнями этого уравнения: $\hat{t}_{11} = \lambda_{(1)} = -2$; $\hat{t}_{22} = \lambda_{(2)} = 1$; $\hat{t}_{33} = \lambda_{(3)} = 4$.

Теперь найдем собственные векторы $\vec{n}^{(k)}$, определяющие направления главных осей \hat{x}_1 , \hat{x}_2 и \hat{x}_3 тензора t_{ij} , относительно осей исходной системы координат $x_1x_2x_3$. Пусть $\vec{n}^{(1)}$ – единичный вектор оси \hat{x}_1 , отвечающий собственному значению $\lambda_{(1)} = -2$. Для отыскания направляющих косинусов $n_i^{(1)}$ этой оси, после подстановки в систему линейных уравнений (2.18) значения $\lambda_{(1)} = -2$ и компонент тензора t_{ij} , имеем:

$$\left. \begin{aligned} 5n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} &= 0 \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} &= 0 \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.19)$$

Отсюда следует, что $n_1^{(1)} = 0$, $n_2^{(1)} = -n_3^{(1)}$. Тогда, учитывая, что $n_i^{(1)}n_i^{(1)} = 1$, находим $n_1^{(1)} = 0$; $n_2^{(1)} = -n_3^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть $\vec{n}^{(1)} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Подставив в систему (2.18) значение $\lambda_{(2)} = 1$, аналогично изложенному выше, приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2n_1^{(2)} + n_2^{(2)} + n_3^{(2)} &= 0 \\ n_1^{(2)} - n_2^{(2)} + 2n_3^{(2)} &= 0 \\ n_1^{(2)} + 2n_2^{(2)} - n_3^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.20)$$

позволяющей найти направляющие косинусы главной оси \hat{x}_2 . Так как первое уравнение системы (2.20) получается сложением двух оставшихся уравнений, то из трех уравнений системы (2.20) независимыми являются только два. Выберем в качестве их два последних уравнения системы (2.20)

$$\left. \begin{aligned} n_1^{(2)} - n_2^{(2)} + 2n_3^{(2)} &= 0 \\ n_1^{(2)} + 2n_2^{(2)} - n_3^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.21)$$

Система (2.21) является незамкнутой. Следовательно, одно из неизвестных может быть выбрано произвольно. Полагая, например, $n_1^{(2)} = 1$, находим, что $n_2^{(2)} = n_3^{(2)} = -1$. Тогда единичный главный вектор $\vec{n}^{(2)}$, задающий направление оси \hat{x}_2 , равен

$$\vec{n}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Единичный вектор $\vec{n}^{(3)}$, задающий направление оси \hat{x}_3 , найдем из условия ортогональности главных осей

$$\vec{n}^{(3)} = [\vec{n}^{(1)}\vec{n}^{(2)}] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}, \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k} \right] = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат $x_1x_2x_3$.

Согласно формуле (2.8), уравнение тензорной поверхности тензора t_{ij} в данной системе координат:

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1. \quad (2.22)$$

В системе главных осей уравнение поверхности (2.22) принимает канонический вид

$$-2\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 4\hat{x}_3^2 = 1,$$

то есть тензорная поверхность является однополостным гиперболоидом, ориентированным вдоль оси \hat{x}_1 .

Задача 4. Прямоугольный брусок длиной $a = 10$ см, шириной $b = 4$ см и высотой $c = 2$ см растянут силой $P = 10$ Н, приложенной вдоль его длины. При этом длина бруса увеличилась на 22 мкм, а ширина и толщина сократились соответственно на 4 и 1 мкм. Найти тензор деформаций и объемную плотность свободной энергии, запасенной в образце.

Решение. При малых деформациях объемная плотность свободной энергии, запасенной в образце, равна

$$F = \frac{1}{2} u_{ij} t_{ij}. \quad (2.23)$$

Для вычисления компонент тензоров деформаций u_{ij} и напряжений t_{ij} свяжем с бруском систему декартовых координат, направив оси x_1 , x_2 и x_3 вдоль ребер a , b и c соответственно. Так как образец подвержен только одноосному растяжению силой приложенной вдоль оси x_1 , то отличными от нуля являются только диагональные компоненты тензора деформаций и компонента t_{11} тензора напряжений:

$$u_{11} = \frac{\Delta x_1}{a} = 2,2 \cdot 10^{-4}; \quad u_{22} = \frac{\Delta x_2}{b} = -1,0 \cdot 10^{-4}; \quad u_{33} = \frac{\Delta x_3}{c} = -0,5 \cdot 10^{-4};$$

$$t_{11} = \frac{P}{bc} = 1,25 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2,$$

где знак «минус» свидетельствует об уменьшении размеров образца вдоль осей x_2 и x_3 . Плотность свободной энергии, согласно

$$(2.23), \quad F = \frac{1}{2} u_{11} t_{11} = 1,375 \text{ Дж/м}^3.$$

Задачи

2.1. При малой деформации упругого образца, имеющего форму куба со стороной 1 см, его точки получают смещения:

$$\begin{aligned}u_1 &= (4x_1 + 3x_2 - 5x_3) \cdot 10^{-4} \text{ см}, \\u_2 &= (7x_1 - 13x_2 + 4x_3) \cdot 10^{-4} \text{ см}, \\u_3 &= (9x_1 - 2x_2 + 4x_3) \cdot 10^{-4} \text{ см}.\end{aligned}$$

Найти изменение углов между ребрами образца и изменение его объема при деформации.

2.2. В некоторой точке упруго деформированного образца задан тензор деформаций

$$[u_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}.$$

Определить относительное удлинение ε образца в направлении вектора $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3$ и изменение угла β между направлениями

вектора \vec{a} и вектора $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3$. Выяснить, являются векторы \vec{a} и \vec{b} собственными векторами данного тензора или нет.

2.3. Установить геометрический смысл главных инвариантов тензора малых деформаций.

2.4. Тензор деформации упругого образца равен

$$[u_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Найти поверхность, в которую переходит сфера единичного радиуса после деформации, описываемой данным тензором. Как изменится результат, если u_{33} будет равно нулю?

2.5. Показать, что поле перемещений $u_1 = Ax_1 + 3x_2$, $u_2 = 3x_1 - Bx_2$, $u_3 = 5$ точек упруго деформированной среды соответствует состоянию плоской деформации. Указать плоскость деформации. Найти связь между коэффициентами A и B , при которой деформация будет изохорической ($\Delta V = 0$).

2.6. Напряженное состояние образца описывается тензором

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot 10^2 \text{ Н/см}^2.$$

Найти систему координат, в которой данное напряженное состояние можно рассматривать только как систему сжатий и растяжений.

2.7. В некоторой точке упругого тела тензор напряжений

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & t_{22} & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^2 \text{ Н/см}^2,$$

в котором компонента t_{22} не указана. Определить t_{22} так, чтобы вектор напряжения на некоторой площадке в этой точке был равен нулю. Найти вектор нормали \vec{n} к этой свободной от напряжения площадке.

2.8. Напряженное состояние кристалла задается тензором напряжений, имеющим вид

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Найти нормальное t_n и касательное t_τ напряжения, действующие на плоскость, нормаль к которой лежит в плоскости X_1X_2 и образует угол α с осью X_1 .

2.9. Определить вид тензорных поверхностей тензора напряжений t_{ij} в точке O для следующих состояний напряжения:

а) всестороннее равномерное растяжение (сжатие): $t_{11} = t_{22} = t_{33} = t$, $t_{12} = t_{13} = t_{23} = 0$; б) одноосное растяжение (сжатие): $t_{11} = t$, $t_{22} = t_{33} = t_{12} = t_{13} = t_{23} = 0$; в) простой сдвиг: $t_{12} = t_{21} = \tau$, $t_{11} = t_{22} = t_{33} = t_{13} = t_{23} = 0$; г) плоское напряженное состояние: $t_{11} = t_{22} = t$, $t_{12} = t_{21} = \tau$, $t_{33} = t_{31} = t_{23} = 0$.

2.10. Прямоугольный брусок с размерами $l \times b \times h = 10 \times 4 \times 2 \text{ см}^3$, вырезанный из кристалла, растянут силой 10 Н, приложенной вдоль его длины. Длина бруска при этом увеличилась на $\Delta l = 22 \text{ мкм}$, а ширина b и толщина h сократились на 4 и 1 мкм соответственно. Определить компоненты тензоров напряжения и деформации, полагая, что ребра бруска l , b и h соответственно параллельны координатным осям x_1 , x_2 и x_3 .

2.11. Доказать, что тензор деформаций может быть представлен в виде $u_{ij} = u_{ij}^{\text{ш}} + u_{ij}^{\text{д}}$, где шаровой тензор $u_{ij}^{\text{ш}}$ описывает всестороннее сжатие, а тензор $u_{ij}^{\text{д}}$, который принято называть *девиатором*, определяет только деформацию сдвига.

2.12. Компоненты тензора напряжений и тензора малых деформаций в изотропной среде связаны законом Гука (2.11). Выразить компоненты тензора деформаций u_{ij} через компоненты тензора напряжений t_{ij} .

2.13. Используя результат задачи 2.12, найти тензоры деформаций для напряженных состояний образца заданных в задаче 2.9.

2.14. Упругий образец размерами $5 \times 5 \times 2 \text{ см}^3$ сжат силой 10 Н, приложенной к граням размерами $5 \times 2 \text{ см}^3$, и растянут тем же усилием, действующим на две другие грани тех же размеров. В результате ребра образца длиной 5 см изменили свою длину на 2 мкм. Найти объемную плотность свободной энергии, запасенной в образце.

3. МАТЕРИАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ ВТОРОГО РАНГА

Основные понятия

Во многих случаях одни и те же физические свойства одного и того же вещества проявляются в различных направлениях по-разному. О таких веществах принято говорить, что они обладают *анизотропией*. Анизотропия вещества обусловлена особенностями его внутреннего строения, которое, как естественно ожидать, налагает определенные ограничения на число независимых компонент тензоров, описывающих соответствующие свойства. В связи с этим обстоятельством такие тензоры принято называть *материальными*. Наиболее ярко анизотропия физических свойств проявляется в кристаллах, внутренняя структура которых упорядочена, то есть обладает определенными свойствами симметрии.

Элементами симметрии кристаллов являются: поворотные оси симметрии n -го порядка L_n ($n = 1, 2, 3, 4, 6$), плоскости симметрии P , центр симметрии C , инверсионные или зеркально-поворотные оси n -го порядка L_n ($n = 3, 4, 6$). Математически элементы симметрии описываются соответствующими матрицами (или операторами):

$$L_n = \vec{c} \cdot \vec{c} - \sin \phi_n \vec{c}^\times + \cos \phi_n (1 - \vec{c} \cdot \vec{c}), \quad (3.1)$$

где \vec{c} – единичный вектор оси вращения;

$$\phi_n = \frac{2\pi}{n} - \text{элементарный угол поворота};$$

1 – единичная матрица;

$\vec{c} \cdot \vec{c}$ – диада;

$$P = 1 - 2\vec{c}' \cdot \vec{c}', \quad (3.2)$$

где \vec{c}' – единичный вектор нормали к плоскости;

$$C = -1. \quad (3.3)$$

Элементы симметрии взаимодействуют друг с другом (см. задачу 1). Полный набор элементов симметрии данного кристалла, образующий его точечную группу симметрии, называется видом симметрии кристалла или классом. Все встречающиеся в природе кристаллы относятся к одному из 32 классов.

Для описания физических свойств кристаллов, а также для аналитического представления их элементов симметрии в кристаллах выбираются ортогональные оси X_1, X_2, X_3 , образующие правую ортонормированную систему координат. Такую систему координат называют *кристаллофизической*. Ориентация осей этой системы координат относительно элементов симметрии кристалла может быть различной. Например, ось L_2 кристаллов класса 2 можно совместить с любой из кристаллофизических осей X_i . Естественно, что в каждом из этих случаев соответствующие компоненты материального тензора будут отличаться (см. задачу 2). Для устранения возникающей таким образом неоднозначности вида материального тензора в кристаллофизике приняты правила *стандартной установки* кристаллов [4, 5].

Материальные тензоры второго ранга описывают широкий круг физических свойств кристаллов. Так электрические свойства описываются тензорами удельного сопротивления ρ и проводимости σ , диэлектрические и магнитные свойства – тензорами диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостей, тепловые свойства – тензором коэффициентов теплового расширения α и тензором теплопроводности λ .

Примерами записи физических законов с использованием вышеупомянутых тензоров могут служить:

– закон Ома

$$j_i = \sigma_{ik} E_k; \quad (3.4)$$

– уравнение Фурье для теплопроводности

$$q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}; \quad (3.5)$$

– тепловое расширение кристалла

$$u_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T, \quad (3.6)$$

где u_{ij} – компоненты тензора механических деформаций.

Используя различные физические соображения, можно показать, что материальные тензоры второго ранга являются симметричными. Следовательно, их всегда можно привести к системе главных осей $\hat{X}_1 \hat{X}_2 \hat{X}_3$, играющей исключительно важную роль при решении задач. В системе главных осей тензоры имеют диагональный вид.

При решении задач также весьма эффективными являются инвариантные представления тензоров второго ранга, введенные Ф. И. Федоровым [6] (см. задачу 5).

Как отмечалось выше, анизотропия кристаллов проявляется в зависимости их свойств от направления. Пусть некоторое физическое свойство кристалла, характеризующееся величиной a , описывается в выбранной кристаллофизической системе координат тензором второго ранга с компонентами a_{ij} . Роль величины a могут играть тензоры: диэлектрической проницаемости ϵ , удельной проводимости σ , теплопроводности λ и другие. Тогда значение величины a в направлении единичного вектора \vec{n} вычисляется по формуле

$$a_{\vec{n}} = a_{ij} n_i n_j, \quad (3.7)$$

где n_i – компоненты вектора \vec{n} в той же системе координат.

Например, если роль тензора a играет тензор удельной проводимости σ , то формула (3.7) определяет величину удельной проводимости кристалла в направлении \vec{n} .

Выражению (3.7) можно придать геометрическую интерпретацию, весьма удобную для наглядного представления зависимости рассматриваемого свойства от симметрии и анизотропии кристалла. Для этого из начала системы координат в направлении вектора \vec{n} откладывают численное значение величины $a_{\vec{n}}$. Полученное таким образом геометрическое место точек образует поверхность в трехмерном пространстве арифметизированном кристаллофизической системой координат, которую называют *указательной поверхностью* тензора a . Для приведенного выше примера тензора a получим указательную поверхность тензора удельной проводимости σ .

Части указательной поверхности, отвечающие отрицательным значениям $a_{\vec{n}}$, появление которых возможно, если среди собственных значений тензора a имеются отрицательные, строятся аналогичным образом, но окрашиваются в темный цвет, в отличие от положительных, светлых частей поверхности (см. задачу 8).

Кроме указательных поверхностей для наглядного представления связи симметрии кристалла с анизотропией его свойств используют *характеристические поверхности*. Характеристические поверхности тензоров второго ранга являются поверхностями второго порядка. Уравнение характеристической поверхности тензора a , заданного в кристаллофизической системе координат (с учетом правила немых индексов),

$$a_{ij}X_iX_j = 1. \quad (3.8)$$

Наиболее простой вид уравнение (3.8) принимает в системе главных осей тензора a :

$$\lambda_{(1)}X_1^2 + \lambda_{(2)}X_2^2 + \lambda_{(3)}X_3^2 = 1, \quad (3.9)$$

где $\lambda_{(i)}$ – главные значения тензора a .

Если собственные значения $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$ и $\lambda_{(3)}$ положительные, то характеристическая поверхность представляет собой эллипсоид и его вырожденные формы (эллипсоид вращения и сферу). В случае, когда два из собственных значений положительны, а одно отрицательно, характеристическая поверхность является однополостным гиперболоидом. Если два главных значения тензора a отрицательны, а одно положительно, то поверхность (3.9) – двуполостный гиперболоид.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти матричное представление операции симметрии, действие которой эквивалентно действию двух осей второго порядка, пересекающихся под углом $\phi = 45^\circ$.

Решение. Пусть оси L_2' и L_2'' лежат в плоскости XOY и пересекаются в начале системы координат (рисунок 3.1). Совместим ось L_2' с осью OX . Тогда, соответствующие осям вращения, единичные векторы равны

$$\vec{c}' = \vec{i} \quad \text{и} \quad \vec{c}'' = \cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j}. \quad (3.10)$$

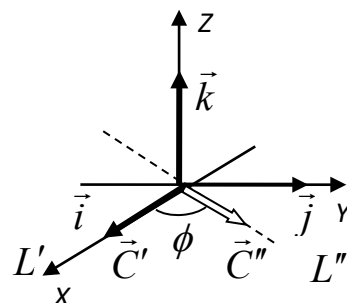


Рисунок 3.1

Учитывая, что для поворотной оси второго порядка выражение (3.1) принимает вид

$$L_2 = 2\vec{c} \cdot \vec{c} - 1,$$

для оператора, описывающего эквивалентное действие осей L_2' и L_2'' , имеем

$$L_2'' L_2' = (2\vec{c}'' \cdot \vec{c}'' - 1)(2\vec{c}' \cdot \vec{c}' - 1). \quad (3.11)$$

Подставляя выражения (3.10) в формулу (3.11) для искомой матрицы, получаем

$$\begin{aligned} L_2'' L_2' &= (2\vec{c}'' \cdot \vec{c}'' - 1)(2\vec{c}' \cdot \vec{c}' - 1) = 4(\vec{c}'' \cdot \vec{c}') \vec{c}'' \cdot \vec{c}' - 2\vec{c}'' \cdot \vec{c}'' - 2\vec{c}' \cdot \vec{c}' + 1 = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) \cdot \vec{i} - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) - 2\vec{i} \cdot \vec{i} + 1 = \\ &= 1 + \vec{j} \cdot \vec{i} - \vec{i} \cdot \vec{j} - \vec{i} \cdot \vec{i} - \vec{j} \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - (3.12) \\ &\quad - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат (3.12) с матрицей вращения вокруг оси Z

$$U_Z^\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

убеждаемся, что действие двух данных поворотных осей симметрии эквивалентно вращению вокруг оси Z на угол $\alpha = 270^\circ$.

Задача 2. Найти вид симметричного тензора T второго ранга, описывающего физические свойства кристаллов класса 2, если: а) ось L_2 совпадает с осью X_2 кристаллофизической системы координат (стандартная установка); б) ось L_2 направлена вдоль оси X_3 .

Решение. Кристаллы класса 2 имеют только один элемент симметрии – поворотную ось второго порядка

$$L_2 = \vec{c} \cdot \vec{c} + \cos\phi(1 - \vec{c} \cdot \vec{c}), \quad (3.13)$$

в результате вращения вокруг которой на угол ϕ равный π или 2π над кристаллом будет выполнено тождественное преобразование. Следовательно, должно выполняться условие

$$T' = T. \quad (3.14)$$

При $\phi = 2\pi$ оператор (3.13) имеет вид единичной матрицы, поэтому для ответа на вопрос задачи достаточно рассмотреть поведение компонент тензора T только при повороте на угол $\phi = \pi$. В этом случае оператор

$$L_2 = 2\vec{c} \cdot \vec{c} - 1. \quad (3.15)$$

а) положив $\vec{c} = \vec{e}_2$ – орту оси X_2 кристаллофизической системы координат, для матрицы поворота согласно (3.15) получаем

$$U_{X_2}^\pi = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Закон преобразования компонент тензора T

$$T'_{ij} = U_{in} U_{jm} T_{nm}.$$

Тогда для компонент первой строки тензора T имеем

$$\begin{aligned} T'_{11} &= U_{1n} U_{1m} T_{nm} = U_{1n} (U_{11} T_{n1} + U_{12} T_{n2} + U_{13} T_{n3}) = -U_{1n} T_{n1} = T_{11}, \\ T'_{12} &= U_{1n} U_{2m} T_{nm} = U_{1n} (U_{21} T_{n1} + U_{22} T_{n2} + U_{23} T_{n3}) = U_{1n} T_{n2} = -T_{12}, \\ T'_{13} &= U_{1n} U_{3m} T_{nm} = U_{1n} (U_{31} T_{n1} + U_{32} T_{n2} + U_{33} T_{n3}) = -U_{1n} T_{n3} = T_{13}. \end{aligned}$$

Подстановка найденных значений в условие (3.14) приводит к равенствам: $T_{11} = T_{11}$; $-T_{12} = T_{12}$; $T_{13} = T_{13}$, из которых следует, что элементы первой строки тензора T равны $T_{1i} = (T_{11}; 0; T_{13})$. Повторяя вычисления, аналогичные приведенным выше, для элементов второй и третьей строк с учетом симметрии тензора T получаем: $T_{2i} = (0; T_{22}; 0)$; $T_{3i} = (T_{13}; 0; T_{33})$. Следовательно, в *стандартной* установке тензор T имеет вид

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & 0 \\ T_{13} & 0 & T_{33} \end{bmatrix}; \quad (3.16)$$

б) положив $\vec{c} = \vec{e}_3$ – орту оси X_3 кристаллофизической системы координат, для матрицы поворота согласно (3.15) получаем

$$U_{X_3}^\pi = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Повторяя рассуждения пункта *a)*, приходим к выводу, что в этой установке тензор T имеет вид

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Задача 3. Найти величину удельного сопротивления кварца в направлении биссектрисы угла между осями симметрии: а) третьего и второго порядков; б) второго порядка.

Решение. Кристалл кварца относится к классу 32. Формула симметрии $L_3 3L_2$ говорит о наличии у кристалла поворотной оси L_3 третьего порядка и трех поворотных осей L_2 второго порядка, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси L_3 . В стандартной установке ось X_3 кристаллофизической системы координат совмещают с осью L_3 , а ось X_1 с одной из осей L_2 . В этом случае ось X_2 совпадает с биссектрисой угла между двумя оставшимися осями второго порядка (рисунок 3.2).

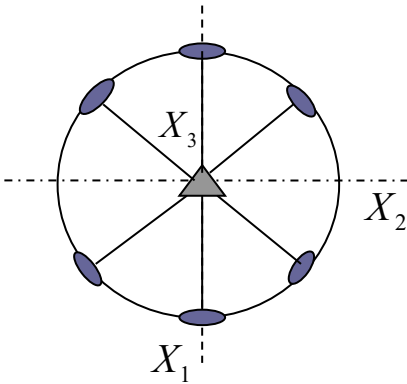


Рисунок 3.2

В выбранной системе координат $X_1 X_2 X_3$ тензор удельного сопротивления кристалла кварца равен

$$[\rho_{ij}] = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{14} \text{ Ом}\cdot\text{см}.$$

Вид тензора $[\rho_{ij}]$ свидетельствует о том, что оси кристаллофизической системы координат в стандартной установке совпадают с главными осями этого тензора, а сам тензор является одноосным.

а) единичный вектор биссектрисы угла между осями L_2 и L_3 равен (рисунок 3.3) $\vec{n} = \cos 45^\circ \vec{e}_1 + \cos 45^\circ \vec{e}_3$.

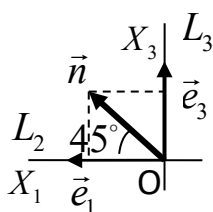


Рисунок 3.3

Тогда удельное сопротивление кристалла в направлении вектора \vec{n}

$$\begin{aligned} \rho_{\vec{n}} &= \rho_{ij} n_i n_j = \rho_1 \hat{n}_1 \hat{n}_1 + \rho_2 \hat{n}_2 \hat{n}_2 + \rho_3 \hat{n}_3 \hat{n}_3 = \\ &= \left(200 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot 10^{14} \text{ Ом}\cdot\text{см}; \end{aligned}$$

б) так как данный кристалл одноосный, то во всех направлениях в плоскости $\hat{X}_1 O \hat{X}_2$

\hat{X}_3 тензора ρ , значение удельной проводимости одинаково и равно $\rho = 200 \cdot 10^{14}$ Ом·см.

Задача 4. Используя граничные условия для векторов поля, найти напряженность поля \vec{E} в анизотропной пластинке, помещенной в однородное внешнее электрическое поле с напряженностью \vec{E}_0 . Тензор диэлектрической проницаемости пластинки ϵ_{ij} . Угол между вектором \vec{E}_0 и нормалью \vec{n} к границе раздела равен ϑ_0 .

Решение. Разложим векторы напряженности \vec{E}_0 и \vec{E} на тангенциальные и нормальные составляющие (рисунок 3.4):

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0\tau} + \vec{E}_{0n}; \quad \vec{E} = \vec{E}_\tau + \vec{E}_n. \quad (3.18)$$

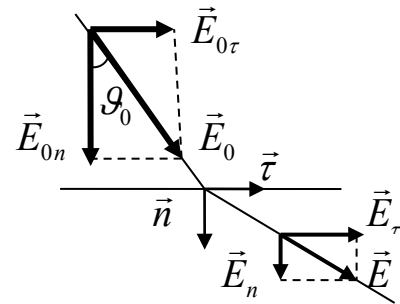


Рисунок 3.4

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих вектора напряженности на границе раздела следует

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0\tau}. \quad (3.19)$$

Тогда для нормальной составляющей вектора напряженности в среде можем записать

$$\vec{E}_n = \vec{E}_{0n} + A\vec{n}, \quad (3.20)$$

где A – постоянная, подлежащая определению.

Для определения A используем условие непрерывности нормальной составляющей индукции \vec{D} электрического поля

$$\vec{n}\vec{D} = \vec{n}\vec{D}_0. \quad (3.21)$$

Учитывая, что внутри пластинки $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ и вне ее $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$ и соотношения (3.18)–(3.20), перепишем условие (3.21) в виде

$$\vec{n}\epsilon(\vec{E}_0 + A\vec{n}) = \vec{n}\vec{E}_0. \quad (3.22)$$

Из уравнения (3.22) для постоянной A получаем

$$A = \frac{\vec{n}\vec{E}_0 - \vec{n}\varepsilon\vec{E}_0}{\vec{n}\varepsilon\vec{n}} = \frac{(\delta_{ij} - \varepsilon_{ij})n_i E_{0j}}{\varepsilon_{ks} n_k n_s}. \quad (3.23)$$

Следовательно, напряженность \vec{E} поля в пластинке

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{\vec{n}(1 - \varepsilon)\vec{E}_0}{\vec{n}\varepsilon\vec{n}} \vec{n} = \vec{E}_0 + \frac{(\delta_{ij} - \varepsilon_{ij})n_i E_{0j}}{\varepsilon_{ks} n_k n_s} \vec{n}. \quad (3.24)$$

Задача 5. Получить инвариантные представления симметричного тензора a второго ранга [6].

Решение. Пусть \hat{e}_1 , \hat{e}_2 и \hat{e}_3 – собственные векторы тензора a , а $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$ и $\lambda_{(3)}$ – отвечающие им собственные значения, удовлетворяющие условию $\lambda_{(1)} < \lambda_{(2)} < \lambda_{(3)}$. Разложив тензор a по диадному базису в системе главных осей, получаем

$$a = \lambda_{(1)} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 + \lambda_{(2)} \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 + \lambda_{(3)} \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3, \quad (3.25)$$

где $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i$ – диады, построенные из собственных векторов a .

Добавляя и вычитая в правой части формулы (3.25) выражение

$$\lambda_{(2)} (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 + \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3)$$

и учитывая, что $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1$, перепишем (3.25) в виде

$$a = \lambda_{(2)} + (\lambda_{(3)} - \lambda_{(2)}) \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 - (\lambda_{(2)} - \lambda_{(1)}) \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1. \quad (3.26)$$

Теперь, домножив и разделив два последних слагаемых в выражении (3.26) на разность $\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}$, будем иметь

$$a = \lambda_{(2)} + (\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}) \left\{ \frac{\lambda_{(3)} - \lambda_{(2)}}{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}} \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 - \frac{\lambda_{(2)} - \lambda_{(1)}}{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 \right\}. \quad (3.27)$$

Введем единичные векторы

$$\vec{c}_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{(2)} - \lambda_{(1)}}{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}}} \hat{e}_1 + \sqrt{\frac{\lambda_{(3)} - \lambda_{(2)}}{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}}} \hat{e}_3 \quad \text{и} \quad \vec{c}_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_{(2)} - \lambda_{(1)}}{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}}} \hat{e}_1 + \sqrt{\frac{\lambda_{(3)} - \lambda_{(2)}}{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}}} \hat{e}_3 \quad (3.28)$$

и построим из них диаду

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_{(2)} - \lambda_{(1)}}{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}} & 0 & \frac{\sqrt{(\lambda_{(2)} - \lambda_{(1)})(\lambda_{(3)} - \lambda_{(2)})}}{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{(\lambda_{(2)} - \lambda_{(1)})(\lambda_{(3)} - \lambda_{(2)})}}{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}} & 0 & \frac{\lambda_{(3)} - \lambda_{(2)}}{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Вычислив симметричную часть диады (3.29), равную

$$\frac{1}{2}(\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 + \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1),$$

можно убедиться, что она совпадает с фигурной скобкой выражения (3.27). Следовательно, тензор a представим в инвариантном виде

$$a = \lambda_{(2)} + \frac{\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}}{2} (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 + \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1). \quad (3.30)$$

Единичные векторы \vec{c}_1 и \vec{c}_2 , определенные выражениями (3.28), задают два выделенных направления, которые называют осями тензора a (не путать с главными осями!). Поэтому такие тензоры принято называть *двуосными*.

При выполнении условия $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} \neq \lambda_{(3)}$ векторы \vec{c}_1 и \vec{c}_2 равны и совпадают с единичным вектором \hat{e}_3 . Это означает, что две оси двуосного тензора вырождаются в одну, определяемую единичным вектором \vec{c} , совпадающим с собственным вектором тензора a , отвечающим некрайнему собственному значению этого тензора.

В этом случае выражение (3.30) принимает вид

$$a = \lambda_{(1)} + (\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}) \vec{c} \cdot \vec{c}. \quad (3.31)$$

Тензоры вида (3.31) называют *одноосными*.

Задача 6. Как следует вырезать пластинку из арагонита, чтобы ее тепловое расширение в направлениях, перпендикулярных ее толщине, было одинаково? Коэффициенты теплового расширения арагонита в системе его главных осей равны: $\alpha_1 = 35 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_3 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Решение. Кристаллы арагонита CaCO_3 относятся к классу mmm – центросимметричному классу ромбической сингонии. Их формула симметрии $3L_23PC$ свидетельствует о наличии у них трех взаимноперпендикулярных осей симметрии второго порядка, которые в стандартной установке совпадают с главными осями тензора коэффициентов теплового расширения α . Все главные значения тензора α различны, следовательно он является двуосным. Учитывая, что его собственные значения удовлетворяют условию $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$, запишем его инвариантное представление. Согласно формуле (3.30) задачи 5, имеем

$$\alpha = \alpha_2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 + \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1). \quad (3.32)$$

Единичные векторы осей тензора (3.32) равны

$$\vec{c}_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3}} \hat{e}_1 + \sqrt{\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}} \hat{e}_3 = \pm \sqrt{\frac{35 - 17}{35 - 10}} \hat{e}_1 + \sqrt{\frac{17 - 10}{35 - 10}} \hat{e}_3 = \pm \cos 32^\circ \hat{e}_1 + \cos 58^\circ \hat{e}_3.$$

Знаки «+» и «-» перед радикалом относятся к векторам \vec{c}_1 и \vec{c}_2 соответственно.

Вычислим коэффициенты теплового расширения кристалла в направлениях нормали \vec{n} , перпендикулярной вектору \vec{c}_1 или \vec{c}_2

$$\alpha_n = \vec{n} \alpha \vec{n} = \vec{n} \alpha_2 \vec{n} + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} (\vec{n} \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 \vec{n} + \vec{n} \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 \vec{n}) = \alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

Так как для всех этих направлений коэффициент теплового расширения одинаков, то пластинку надо вырезать перпендикулярно оси \vec{c}_1 или оси \vec{c}_2 , ориентируя толщину пластинки вдоль этих осей. Коэффициент теплового расширения толщины пластинки в этих случаях равен

$$\alpha_{\vec{c}_{1,2}} = \vec{c}_1 \alpha \vec{c}_1 = \vec{c}_2 \alpha \vec{c}_2 = \alpha_2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} (\vec{c}_2 \vec{c}_1 + \vec{c}_1 \vec{c}_2) = \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_3) \vec{c}_1 \vec{c}_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3.$$

Подставляя численные значения, получаем $\alpha_{\vec{c}_{1,2}} = 28 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Задача 7. Постройте сечение указательной поверхности тензора коэффициентов теплового расширения α сегнетовой соли плоскостью $\hat{X}_1 O \hat{X}_3$ и определите в этой плоскости направления, в которых кристалл не испытывает теплового расширения. Найдите векторы \vec{c}_1 и \vec{c}_2 осей тензора α и укажите плоскости, в которых тепловое расширение кристалла во всех направлениях, принадлежащих этим плоскостям, одинаково. Сделайте чертеж.

Значения главных коэффициентов теплового расширения сегнетовой соли в стандартной установке: $\alpha_1 = 58,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 35,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_3 = -136,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Решение. В системе главных осей тензора α уравнение его указательной поверхности (см. формулу (3.7)) имеет вид

$$\hat{\alpha}_{\vec{n}} = \alpha_1 n_1^2 + \alpha_2 n_2^2 + \alpha_3 n_3^2 = \alpha_1 \cos^2 \alpha + \alpha_2 \cos^2 \beta + \alpha_3 \cos^2 \gamma, \quad (3.33)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ – направляющие косинусы единичного вектора \vec{n} в системе главных осей.

Полагая в выражении (3.33) угол $\beta = 90^\circ$, получим уравнение, определяющее сечение поверхности (3.33) плоскостью $\hat{X}_1 O \hat{X}_3$, которое, учитывая что $\alpha + \gamma = 90^\circ$, запишем в виде

$$\hat{\alpha}_{\vec{n}} = \alpha_1 \cos^2 \alpha + \alpha_3 \sin^2 \alpha. \quad (3.34)$$

Подставив в (3.34) численные значения коэффициентов α_1 и α_2 , вычисляем $\hat{\alpha}_{\vec{n}}$ для различных ориентаций вектора \vec{n} относительно оси \hat{X}_1 . Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения коэффициента теплового расширения $\hat{\alpha}_{\vec{n}}$ для различных ориентаций вектора \vec{n} относительно оси \hat{X}_1

α°	0	5	10	15	20	25	30
$\hat{\alpha}_{\vec{n}}, 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	58,3	56,8	52,4	45,3	35,5	23,6	9,7
α°	35	40	45	60	70	80	90
$\hat{\alpha}_{\vec{n}}, 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	-5,7	-22,0	-38,9	-87,5	-113,3	-130,2	-136,1

Используя данные таблицы, строим требуемое сечение указательной поверхности (рисунок 3.5). Области сечения, отвечающие отрицательным значениям $\hat{\alpha}_{\bar{n}}$, окрашиваем в темный цвет.

Определим направления, в которых тепловое расширение кристалла отсутствует. Условие, определяющее искомые направления, следует из (3.33) при $\hat{\alpha}_{\bar{n}} = 0$ и для плоскости $\hat{X}_1 O \hat{X}_3$ принимает вид

$$\alpha_1 \cos^2 \alpha + \alpha_3 \sin^2 \alpha = 0. \quad (3.35)$$

Решая уравнение (3.35), получаем

$$\alpha = \arctg \left(\pm \sqrt{\frac{58,3}{136,1}} \right) = \pm 33,2^\circ. \quad (3.36)$$

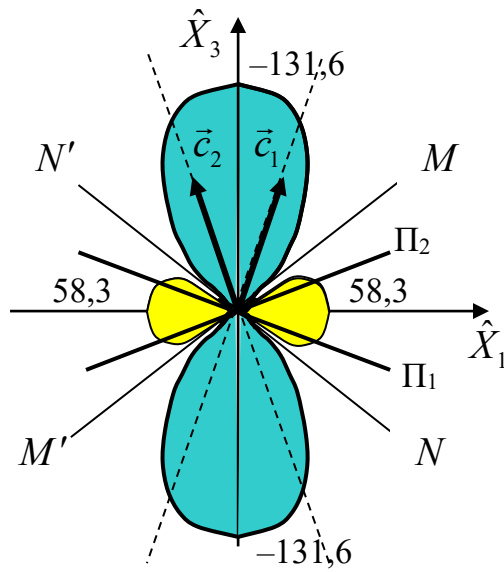


Рисунок 3.5

Следовательно, данный кристалл имеет множество требуемых направлений, образующих в пространстве двухполостной эллиптический конус с осью, совпадающей с осью \hat{X}_3 системы главных осей тензора α . Углы образующих MM' и NN' (рисунок 3.5) этого конуса, лежащих в плоскости $\hat{X}_1 O \hat{X}_3$, с осью \hat{X}_1 определяются равенством (3.36).

Единичные векторы осей тензора α равны

$$\bar{c}_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3}} \hat{e}_1 + \sqrt{\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}} \hat{e}_3 = \pm \cos 70^\circ \hat{e}_1 + \cos 20^\circ \hat{e}_3.$$

Знаки «+» и «-» перед радикалом относятся к векторам \bar{c}_1 и \bar{c}_2 соответственно.

Плоскости, в которых тепловое расширение кристалла во всех направлениях, принадлежащих этим плоскостям, одинаково, перпендикулярны векторам \bar{c}_1 и \bar{c}_2 осей тензора. На рисунке 3.5 следы сечений этих плоскостей координатной плоскостью $\hat{X}_1 O \hat{X}_3$ изображены прямыми Π_1 и Π_2 .

Задачи

3.1. Найти матричное представление операции симметрии, действие которой эквивалентно действию двух осей второго порядка, пересекающихся под углом: а) 90° ; б) 60° . Какому элементу симметрии соответствует эта операция?

3.2. Две плоскости симметрии пересекаются под углом: а) 90° ; б) 45° ; в) 30° . Найти равнодействующий им элемент симметрии и получить его матричное представление.

3.3. Найти элемент симметрии, эквивалентный действию четырех пересекающихся плоскостей симметрии, образующих друг с другом угол $\frac{\pi}{4}$.

3.4. Найти вид тензора диэлектрической проницаемости одноосного кристалла:

а) в системе координат, повернутой относительно кристаллофизической системы на угол 30° вокруг оси X_1 против часовой стрелки;

б) в системе координат, повернутой относительно кристаллофизической системы на угол 30° вокруг оси X_1 по часовой стрелке;

в) в системе координат, повернутой вокруг оси X_3 кристаллофизической системы координат на угол 60° по и против часовой стрелки.

Объяснить полученные результаты.

3.5. Найти величину и направление плотности тока \vec{j} в ортогональной системе координат $X_1X_2X_3$, возникающего в тонкой анизотропной пластинке под действием внешнего электрического поля напряженностью $E = 150$ В/см, приложенного в направлении $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

Тензор удельной проводимости пластинки в данной системе координат

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 \\ -2 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 25 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$$

3.6. Тензор удельной проводимости σ_{ij} некоторого кристалла в ортогональной системе координат $X_1X_2X_3$ имеет вид

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$$

В каких направлениях относительно системы координат, в которой задан тензор σ_{ij} , направление плотности тока будет совпадать с направлением приложенного электрического поля?

3.7. Найти удельное сопротивление кристалла, описанного в задаче 3.6, в направлении $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ относительно системы координат, в которой задан тензор его удельной проводимости.

3.8. По кристаллу, описанному в задаче 3.6, в направлении $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ проходит электрический ток плотностью $j = 15 \cdot 10^{-5} \text{ А/см}^2$.

Определить количество теплоты, выделяющейся в единице объема кристалла за единицу времени.

3.9. Используя результаты задачи 4 (см. примеры решения задач), найти изменение направления силовых линий вектора напряженности электрического поля при переходе из вакуума в анизотропный диэлектрик.

3.10. Используя результаты задачи 4 (см. примеры решения задач), найти коэффициент A для пластинки из моноклинного кристалла в случаях, когда ось L_2 параллельна вектору: а) \vec{n} ; б) $\vec{\tau}$; в) $[\vec{n}\vec{\tau}]$.

Тензор диэлектрической проницаемости кристалла в стандартной установке ($L_2 \parallel X_2$)

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{13} & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

3.11. Пластинка, описанная в задаче 4, изготовлена из одноосного кристалла, тензор диэлектрической проницаемости которого $\epsilon = \epsilon_1 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)\vec{c} \cdot \vec{c}$. Выяснить, при какой ориентации оси \vec{c} вектор индукции \vec{D} электрического поля в пластинке лежит в плоскости векторов \vec{n} и \vec{E}_0 .

3.12. В плоский конденсатор вставлена кристаллическая пластинка площадью $1,0 \times 2,5 \text{ см}^2$ и толщиной $0,4 \text{ см}$, вырезанная так, что нормаль к ее поверхности составляет с главными осями тензора диэлектрической проницаемости

$$[\hat{\epsilon}_{ij}] = \begin{bmatrix} 9,8 & 0 & 0 \\ 0 & 7,7 & 0 \\ 0 & 0 & 6,6 \end{bmatrix}$$

углы $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. Найти емкость полученного конденсатора.

3.13. Для изготовления плоского конденсатора с максимальной емкостью из моноклинного кристалла, тензор диэлектрической проницаемости которого в ортогональной системе координат $X_1 X_2 X_3$

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 5 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix},$$

требовалось вырезать пластинку фиксированных размеров. При записи тензора ϵ_{ij} вместо компоненты $\epsilon_{33} = 30$ ошибочно было записано $\epsilon_{33} = 20$. На сколько процентов максимальная емкость полученного в результате описки конденсатора отличается от требуемой?

Как была вырезана пластинка для его изготовления? Как правильно следовало вырезать требуемую пластинку?

3.14. Между пластинами плоского конденсатора находится диэлектрик. В системе координат $x_1 x_2 x_3$, ось x_1 которой перпендикулярна пластинам конденсатора, тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Напряженность электрического поля в конденсаторе направлена по оси x_1 и равна \vec{E} . Найти: а) тензор поляризуемости χ_{ij} диэлектрика; б) вектор поляризации \vec{P} диэлектрика и вектор индукции \vec{D} поля в диэлектрике; в) углы, образованные векторами \vec{P} и \vec{D} с вектором \vec{E} .

3.15. На примере тензора диэлектрической проницаемости показать, что сечения тензорной поверхности двусосного тензора плоскостями, перпендикулярными его осям, являются окружностями. Найти радиусы этих окружностей.

3.16. Значения компонент тензора коэффициентов теплового расширения сегнетовой соли в системе главных осей $\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3$ равны: $\alpha_1 = 58,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_2 = 35,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_3 = -136,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Записать уравнение тензорной поверхности данного тензора. Построить сечения этой поверхности координатными плоскостями $\hat{X}_1O\hat{X}_3$ и $\hat{X}_1O\hat{X}_2$. В указанных плоскостях установить направления, в которых данный кристалл не испытывает теплового расширения. Определить оси \vec{c}_1 и \vec{c}_2 данного тензора и найти нормированные векторы \vec{c}^1 и \vec{c}^2 базиса взаимного базису $\vec{c}_1\vec{c}_2\vec{c}_3$. Установить геометрический смысл полученных векторов и условия ортогональности векторов взаимных базисов. Сделать чертеж.

3.17. Тензор коэффициентов теплового расширения для кристаллов моноклинной сигонии в кристаллофизической системе координат в стандартной установке имеет вид

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

При какой связи между его недиагональной компонентой α_{13} и диагональными компонентами кристалл не будет изменять свои размеры вдоль одной из главных осей тензора $[\alpha_{ij}]$? Определить направление этой оси относительно заданной кристаллофизической системы координат. Какой вид будут иметь в этом случае указательная и характеристическая поверхности тензора $[\alpha_{ij}]$? Возможна или нет физическая реализация этого случая?

4. ОТВЕТЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ К ЗАДАЧАМ

1. Тензор моментов инерции

$$1.1. a) [I_{ij}] = \begin{bmatrix} 2a^2(m+M) & 2a^2(m-M) & 0 \\ 2a^2(m-M) & 2a^2(m+M) & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{bmatrix};$$

$$б) [I'_{ij}] = \begin{bmatrix} 4a^2m & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2M & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{bmatrix}.$$

Главные оси инерции совпадают с осями штрихованной системы координат.

1.2. а) $\hat{I}_{11} = 4ma^2$; $\hat{I}_{22} = 6ma^2$; $\hat{I}_{33} = 10ma^2$. Главные оси инерции \hat{x}_1 и \hat{x}_2 совпадают с диагоналями ромба;

б) центр масс C расположен на биссектрисе прямого угла на расстоянии $a\sqrt{2}$ от его вершины. $\hat{I}_{11} = 4(2 + \sqrt{2})ma^2$; $\hat{I}_{22} = 4(2 - \sqrt{2})ma^2$; $\hat{I}_{33} = 16ma^2$. Единичные векторы главных осей \hat{x}_1 и \hat{x}_2 равны $\vec{n}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(1; 1-\sqrt{2}; 0)$ и $\vec{n}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(\sqrt{2}-1; 1; 0)$.

В обоих случаях ось \hat{x}_3 перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через центр масс.

$$1.3. a) \hat{I}_{11} = \hat{I}_{22} = \frac{ml^2}{12}, \hat{I}_{33} = 0 \text{ (}\hat{x}_3 \text{ – ось стержня);}$$

$$б) \hat{I}_{11} = \hat{I}_{22} = \frac{mR^2}{4}, \hat{I}_{33} = \frac{mR^2}{2} \text{ (}\hat{x}_3 \text{ – ось диска);}$$

в) $\hat{I}_{11} = \frac{mb^2}{12}$, $\hat{I}_{22} = \frac{ma^2}{12}$, $\hat{I}_{33} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$ (ось \hat{x}_3 перпендикулярна плоскости пластины; оси \hat{x}_1 и \hat{x}_2 параллельны ее сторонам a и b соответственно);

$$г) \hat{I}_{11} = \hat{I}_{22} = \hat{I}_{33} = \frac{2}{5}mR^2;$$

$$\delta) \hat{I}_{11} = \hat{I}_{22} = \frac{m}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \hat{I}_{33} = \frac{mR^2}{2} \quad (\hat{x}_3 - \text{ось цилиндра}).$$

$$1.4. a) \hat{I}_{11} = \hat{I}_{22} = \hat{I}_{33} = \frac{2}{5} m \frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3};$$

$$б) \hat{I}_{11} = \hat{I}_{22} = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{4} + \frac{mh^2}{12}, \hat{I}_{33} = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2};$$

$$в) \hat{I}_{11} = \hat{I}_{22} = \frac{1}{2} \hat{I}_{33} = \frac{(3\pi - 1)mR^2}{12(\pi - 1)}.$$

$$1.5. R = 2h.$$

1.6. Привести доказательство к задаче.

$$1.7. T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

$$1.8. a) \vec{L} = \frac{m\omega}{12} \left(\frac{a(b^2 + c^2)\vec{i} + b(a^2 + c^2)\vec{j} + c(a^2 + b^2)\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right),$$

$$T = \frac{m\omega^2}{12} \left(\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right);$$

$$б) T = \frac{m\omega^2}{12} \left(\frac{2a^2c^2 + a^2b^2 + 2b^2c^2}{a^2 + b^2} \right),$$

$$\vec{L} = \frac{m\omega}{3\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\left(\frac{b^2}{4} + c^2 \right) a\vec{i} + \left(\frac{a^2}{4} + c^2 \right) b\vec{j} \right).$$

$$1.9. T = \frac{3mR^2\omega^2}{20(R^2 + h^2)} \left(\frac{R^2}{2} + 3h^2 \right); \vec{L} = \frac{3m\omega R}{5\sqrt{R^2 + h^2}} \left(\left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right) \vec{\tau} + \frac{Rh}{2} \vec{k} \right),$$

где $\vec{\tau}$ – любой единичный вектор в плоскости перпендикулярной оси конуса, вдоль которой направлена ось z .

$$1.10. T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{NN'}}{f}} = 2\pi a \sqrt{\frac{m}{6f}}.$$

2. Тензор деформаций и тензор напряжений

2.1. $2u_{12} = 10 \cdot 10^{-4} = 3,43'$; $2u_{13} = 4 \cdot 10^{-4} = 1,36'$; $2u_{23} = 2 \cdot 10^{-4} = 0,68'$ – изменение углов между ребрами, параллельными осям x_1 и x_2 , x_1 и x_3 ,

x_2 и x_3 соответственно. $\frac{\Delta V}{V} = -5 \cdot 10^{-4}$.

2.2. $\varepsilon = u_{ij} a_i a_j = 6$; $\Delta\beta = 0$. Вектора \vec{a} и \vec{b} – собственные вектора днного тензора.

2.3. $I_1 = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$ – относительное изменение объема;

$I_2 = \frac{\Delta a \Delta b}{ab} + \frac{\Delta a \Delta c}{ac} + \frac{\Delta b \Delta c}{bc}$ и $I_3 = \frac{\Delta a \Delta b \Delta c}{abc}$ – соответственно сумма отношения площадей боковых граней и отношение объемов для параллелепипедов со сторонами Δa , Δb , Δc и a , b , c .

2.4. Эллипсоид с полуосями: а) 1,002; 0,996; 1,010;

б) 1,002; 0,996; 1,000.

2.5. $A=B$.

2.6. Повернуть исходную систему координат на угол $\phi = \frac{\pi}{4}$ вокруг оси x_3 против часовой стрелки.

2.7. $t_{22} = 1 \cdot 10^2$ Н/см²; $\vec{n} = \frac{(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)}{\sqrt{6}}$.

2.8. $t_n = t_{11} \cos^2 \alpha + t_{22} \sin^2 \alpha + t_{12} \sin 2\alpha$; $t_\tau = \frac{1}{2}(t_{22} - t_{11}) \sin 2\alpha + t_{12} \cos 2\alpha$.

2.9. а) сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \pm \frac{c}{t}$ ($c^2 = \text{const}$);

б) две плоскости $x_1^2 = \pm \frac{c^2}{t}$, перпендикулярные к линии действия напряжения;

в) гиперболический цилиндр $2x_1 x_2 = \pm \frac{c^2}{\tau}$ с образующей параллельной оси x_3 ;

г) $tx_1^2 + 2tx_1 x_2 + tx_2^2 = \pm c^2$ – цилиндрическая поверхность с образующей параллельной оси нулевого напряжения и направляющей в виде кривой второго порядка.

2.10. $t_{11} = 1,25$ Н/см²; $u_{11} = 2,2 \cdot 10^{-4}$, $u_{22} = -1,0 \cdot 10^{-4}$, $u_{33} = -0,50 \cdot 10^{-4}$.

2.11. Следует из условия $u_{nn}^n = 0$ и очевидного тождества

$$u_{ij} = \frac{1}{3} u_{nn} \delta_{ij} + (u_{ij} - \frac{1}{3} u_{nn} \delta_{ij}) = u_{ij}^m + u_{ij}^n.$$

2.12. $u_{ij} = \frac{1}{9k} t_{nn} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(t_{ij} - \frac{1}{3} t_{nn} \delta_{ij} \right)$. *Рекомендация:* найти след t_{nn}

тензора напряжений и подставить в (2.11).

2.13. Отличны от нуля следующие компоненты:

a) $u_{11} = u_{22} = u_{33} = \frac{t}{3k}$;

б) $u_{11} = \frac{t}{9k} + \frac{t}{3\mu}$, $u_{22} = u_{33} = \frac{t}{9k} - \frac{t}{6\mu}$;

в) $u_{12} = u_{21} = \frac{\tau}{2\mu}$;

г) $u_{11} = u_{22} = \frac{2t}{9k} + \frac{t}{6\mu}$, $u_{33} = \frac{2t}{9k} - \frac{t}{3\mu}$, $u_{12} = u_{21} = \frac{\tau}{2\mu}$.

2.14. $F = 0,4$ Дж/м³. *Рекомендация:* смотри задачу 4 в примерах решения задач.

3. Материальные тензоры второго ранга

3.1. a) $U_Z^{180^\circ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $U_Z^{240^\circ} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.2. a) L_2 ;

б) L_4 ;

в) L_6 .

3.3. Ось L_2 совпадающая с линией пересечения плоскостей.

$$3.4. [\varepsilon'_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{4} & \pm(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \pm(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_3}{4} \end{bmatrix}.$$

Знаки «+» и «-» у недиагональных компонент относятся к случаям а) и б) соответственно. В случае в) тензор не изменяется.

$$3.5. j = 18,5 \cdot 10^{-5} \text{ А/см}^2. \vec{n} = (\cos 66^\circ; \cos 37^\circ; \cos 63^\circ).$$

3.6. В направлениях главных осей тензора проводимости определяемых векторами $\hat{e}_1 = \vec{e}_1$, $\hat{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_3$, $\hat{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$.

$$3.7. \rho = 1,7 \cdot 10^6 \text{ Ом}\cdot\text{см}.$$

$$3.8. q = \rho_{ik} j_i j_k = j^2 \rho_{ik} n_i n_k = 18 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/см}^3 \cdot \text{с}.$$

$$3.9. \sin \Delta \vartheta = \frac{|A|}{E} \sin \vartheta_0.$$

$$3.10. a) \frac{1 - \varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}} E_{0n};$$

$$б) \frac{1 - \varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}} E_{0n};$$

$$в) \frac{1 - \varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}} E_{0n} - \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} E_{0\tau}.$$

3.11. Ось \vec{c} лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $[\vec{n}\vec{\tau}]$ или параллельна ему. *Рекомендация:* вычислить компоненты вектора \vec{D} для случаев: $\vec{c}\vec{n} = 0$; $\vec{c}\vec{\tau} = 0$; $\vec{c}[\vec{n}\vec{\tau}] = 0$.

$$3.12. C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ij} n_i n_j S}{d} = 4,1 \text{ пкФ}.$$

3.13. Меньше на 24,6 %. Перпендикулярно нормали $\vec{n} = (\cos 63,5^\circ; \cos 22,5^\circ; 0)$. Перпендикулярно оси X_3 .

$$3.14. a) [\chi_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$б) \vec{P} = 2\varepsilon_0 E(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \vec{D} = \varepsilon_0 E(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2);$$

$$в) \angle \vec{P}\vec{E} = 45^\circ, \angle \vec{D}\vec{E} = 33,7^\circ.$$

3.15. Рекомендация: вычислить значения диэлектрической проницаемости в направлениях перпендикулярных осей тензора.

3.16. $\vec{c}_{1,2} = \pm \cos 70^\circ \hat{e}_1 + \cos 20^\circ \hat{e}_3$, $\vec{c}^{1,2} = \pm \cos 20^\circ \hat{e}_1 + \cos 70^\circ \hat{e}_3$.

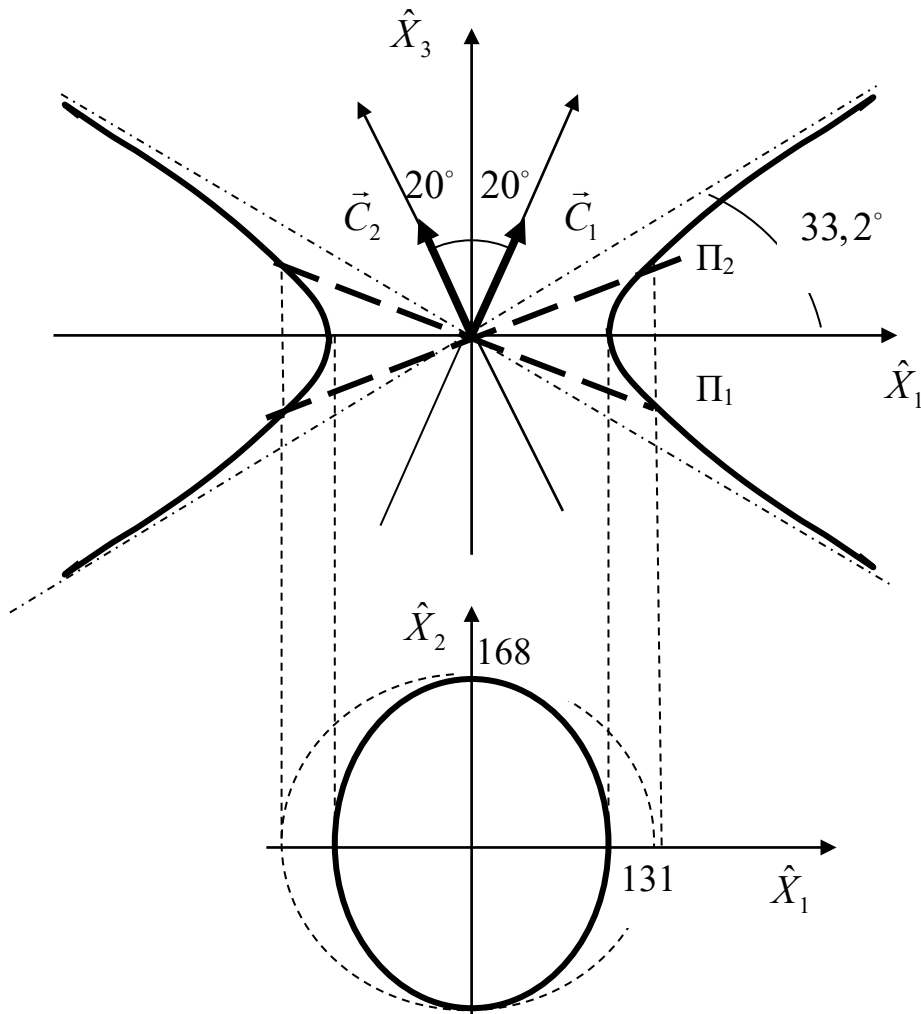


Рисунок 4.1

3.17. $\alpha_{13} = \pm \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{33}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. Теоретическая физика. Механика. – 208 с.
2. Ландау, Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1987. – Т. 7. Теоретическая физика. Теория упругости. – 246 с.
3. Сиротин, Ю. И. Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. – М. : Наука, 1975. – 680 с.
4. Шаскольская, М. П. Кристаллография / М. П. Шаскольская. – М. : Высшая школа, 1976. – 392 с.
5. Переломова, Н. В. Задачник по кристаллофизике / Н. В. Переломова, М. М. Тагиева. – М. : Наука, 1982. – 288 с.
6. Федоров, Ф. И. Оптика анизотропных сред / Ф. И. Федоров. – Минск : Изд. АН БССР, 1958. – 380 с.
7. Математические методы решения физических задач / В. В. Харитонов [и др.] ; под ред. В. В. Харитонова. – Минск : Высшэйшая школа, 1991. – 256 с.

Производственно-практическое издание

**Шолох Владимир Федорович,
Никитюк Юрий Валерьевич,
Самофалов Андрей Леонидович,
Шамына Антон Александрович**

**ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА**

Практическое пособие

Редактор Е. С. Балашова
Корректор В. В. Калугина

Подписано в печать 02.05.2024. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 3,05.
Тираж 10 экз. Заказ 277.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.