Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (102), 2017

Математика

УДК 512.542

Роль критических групп в изучении строения конечных групп

И.В. Близнец, В.Н. Семенчук, В.М. Селькин, В.Н. Копачёв

Найдены новые характеризации критических групп (групп Шмидта, минимальных несверхразрешимых групп). Исследуется строение конечных групп по заданным свойствам критических подгрупп.
Ключевые слова: группа, критическая группа, группа Шмидта, формация, насыщенная формация.

New characterizations of critical groups (Schmidt groups, minimal non-supersolvable groups) have been found. The structure of finite groups with given properties of critical of subgroups is studied.
Keywords: group, critical group, Schmidt group, formation, saturated formation.

Введение Напомним, что минимальной не $\mathfrak{F}$-группой (критической группой) называется группа, не принадлежащая некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$.

Важность изучения таких групп следует из того факта, что любая группа не принадлежащая $\mathfrak{F}$ содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-подгруппу.

Начало изучения таких групп восходит к работе Миллера-Морена [1]. В данной работе были изучены минимальные неабелевы группы. В настоящее время такие группы называют группами Миллера-Морена.

Следующий важный шаг в данном направлении был сделан О.Ю. Шмидтом, который в работе [2] изучил минимальные ненильпотентные группы (группы Шмидта).

В 1954 г. Хупперт [3], а затем Дерк [4] изучили минимальные несверхразрешимые группы. В 1979 г. В.Н. Семенчук в работе [5] описал строение разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной насыщенной наследственной формации $\mathfrak{F}$. Впервые на возможность изучения строения конечных групп с помощью критических подгрупп обратил внимание С.А. Чунихин в работе [6]. Именно развитию данного направления и посвящена настоящая работа. В работе, в частности, исследуется влияние внешних свойств групп Шмидта и минимальных несверхразрешимых групп на строение конечных групп.

Предварительные результаты. Необходимые определения и обозначения можно найти в [9]. Напомним некоторые из них. Пусть P – множество всех простых чисел. Если $p \in P$ и $\pi \subseteq P$, то $\pi' = P \setminus \pi$ и $p' = P \setminus \{p\}$;

$\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G;

pd-группа – группа G, у которой $p \in \pi(G)$;

G_p –силовская p-подгруппа группы G;

$< H, K >$ – подгруппа, порожденная подгруппами H и K;

$\pi(X)$ – множество всех простых делителей порядков всех групп из X;

Формация $\mathfrak{F}$ – класс групп, замкнутых относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если она замкнута относительно фраттиниевых расширений.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп и G – группа, то:

$G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-абнормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ – формацию всех нильпотентных групп.

$\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$ – произведение формаций $\mathfrak{F}, \mathfrak{X}$.

$\mathfrak{N}^n$ – формация всех разрешимых групп с нильпотентной длиной равной n.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая непустая формация. Подгруппа H группы G называется:

$\mathfrak{F}$-субнормальной, если существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H,$$

такая, что для любого $i \geq 1$ подгруппа H_i $\mathfrak{F}$-нормальна в H_{i-1}.

В следующих леммах приводятся известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, которые сыграли важную роль при доказательстве основных результатов данной работы.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда:

1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;

2) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, K – подгруппа группы G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в K;

3) если H_1 и H_2 $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы G, то $H_1 \cap H_2$ – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа G;

4) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в K, а K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;

5) если все композиционные факторы группы G принадлежат формации $\mathfrak{F}$, то каждая субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной;

6) если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то H^x $\mathfrak{F}$-субнормальна в G для любых $x \in G$.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H – подгруппа группы G, N – нормальная подгруппа из G. Тогда:

1) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N;

2) если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G.

Основные результаты. Говорят, что некоторое множество подгрупп $\mathfrak{M}$ конечной группы G образует решетку, если $A \cap B \in \mathfrak{M}$, $<A, B> \in \mathfrak{M}$ для любых двух подгрупп A и B из $\mathfrak{M}$. Согласно классической теореме Виландта [7], множество всех субнормальных подгрупп в любой конечной группе образует решетку. Естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности.

Если $\mathfrak{F}$ – класс всех нильпотентных групп, то в каждой разрешимой группе G множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп совпадает с множеством всех субнормальных подгрупп группы G. Однако для произвольной группы это не так.

Будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством, если в любой конечной группе множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует решетку.

Примерами формаций с решеточным свойством являются формации всех нильпотентных, всех p-разложимых групп.

Кегель [8] и Л.А. Шеметков [9] поставили задачу о нахождении новых формаций $\mathfrak{F}$, у которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует решетку.

Данная задача была полностью решена для насыщенных наследственных формаций в работах [10], [11]. При доказательстве теорем 1 и 2 важную роль сыграли следующие леммы.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, обладающая решеточным свойством. Тогда любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G содержится среди групп следующих типов:

1) $|G|=p$ – простое число, $p \notin \pi(F)$;

2) G – группа Шмидта;

3) $G/\Phi(G)$ – такая монолитическая группа с неабелевым монолитом $N/\Phi(G)$, что G/N – циклическая примарная группа и $N/\Phi(G)=(G/\Phi(G))^{\mathfrak{F}}$.

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация. Тогда любая группа $G-F(G)H$, где H – $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$.

В следующей теореме получена новая характеризация критических групп.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Если в группе G существует максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа M, у которой все максимальные подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальные, то G – бипримарная группа Миллера-Морена.

Следствие 1. Если в группе G существует ненормальная максимальная подгруппа M, у которой все максимальные подгруппы субнормальны в G, то G – бипримарная группа Миллера-Морена.

Следствие 2. Если в группе G существует максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа M, где $\mathfrak{F}$ – формация всех p-разложимых групп. Если все максимальные подгруппы из M $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, то G – бипримарная группа Миллера-Морена.

Важную роль при изучении строения конечных групп играют критические группы. Эта роль проиллюстрирована на следующих теоремах.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация содержащая все нильпотентные группы с решеточным свойством, у которой все минимальные не $\mathfrak{F}$-группы разрешимы. Если в группе G все минимальные не $\mathfrak{F}$-подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – формация всех нильпотентных групп, то из теоремы 2 получаем

Следствие 1. Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то $G/F(G)$ – нильпотентная группа.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, R – подгруппа, порожденная всеми минимальными не $\mathfrak{F}$-группами группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $G=RH$, где $H \in \mathfrak{F}$;

2) если максимальная подгруппа M группы G перестановочна со всеми минимальными не $\mathfrak{F}$-подгруппами из G, то $M/M_G \in \mathfrak{F}$;

3) если $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация и все минимальные не $\mathfrak{F}$-группы из G разрешимы и перестановочны со всеми силовскими подгруппами из G, то G разрешима;

4) если все минимальные не $\mathfrak{F}$-группы группы G разрешимы и субнормальны в G, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

Следствие 1. Если в группе G все подгруппы Шмидта перестановочны со всеми силовскими подгруппами из G, то G – разрешимая группа.

В работе [12] были полностью описаны конечные группы, у которых все подгруппы Шмидта субнормальны. Отсюда возникает следующая задача.

Задача 1. Получить описание конечных групп, у которых все подгруппы Шмидта перестановочны со всеми силовскими подгруппами.

Следствие 2. Если в группе G все минимальные несверхразрешимые подгруппы субнормальны, $G/F(G)$ – сверхразрешимая группа.

Задача 2. Получить описание конечных групп, у которых все минимальные несверхразрешимые подгруппы субнормальны.

Следствие 3. Если в группе G все минимальные несверхразрешимые подгруппы перестановочные со всеми силовскими подгруппами G, то G – разрешимая группа.

Задача 3. Получить описание конечных групп G, у которых все минимальные несверхразрешимые подгруппы перестановочны со всеми силовскимии подгруппами из G.

Обозначим через $\mathfrak{U}$ – формацию всех сверхразрешимых групп.

Теорема 4. Пусть в разрешимой группе G существует максимальная подгруппа M непримарного индекса и любая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Тогда G – минимальная несверхразрешимая группа.

Литература

1. Miller, G.A. Nonabelian groups in which every subgroup is abelian / G.A. Miller, H.C. Moreno // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – V. 4. – P. 398–404.

2. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Мат. сб. – 1924. – Т. 31, № 3. – С. 366–372.

3. Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlichen Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – V. 60. – P. 409–434.

4. Doerk, K. Minimal nicht Uberauflosbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math.Z. – 1966. – V. 91. – P. 198–205.

5. Семенчук, В.Н. Минимальные не F-группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.

6. Семенчук, В.Н. Конечные группы с системой минимальных не F-подгрупп / В.Н. Семенчук // Подгрупповое строение конечных групп: Тр. / Ин-т математики АН БССР. – Минск : Наука и техника, 1981. – С. 138–149.

7. Wielandt, H. Uber den Normalisator der subnormalen Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1958. – V. 69, № 8. – P. 463–465.

8. Kegel, O.H. Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – V. 30. – P. 225–228.

9. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

10. Ballester-Bolinches, A. On the lattice of F-subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, V.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – V. 148. – P. 42–52.

11. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: Тр. / Институт математики АН Украины. – Киев, 1993. – С. 27–54.

12. Семенчук, В.Н. Конечные группы с системой минимальных не F-подгрупп / В.Н. Семенчук // Подгрупповое строение конечных групп: Тр. / Ин-т математики АН БССР. – Минск : Наука и техника, 1981. – С. 138–149.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 12.03.2017