

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЦЕССА НАУЧЕНИЯ¹

Н. Д. СКОРОСПЕШКИНА

(Московский автодорожный институт. Кафедра высшей математики)

До недавнего времени представлялось, что проникновение математических методов в психологию было обусловлено только потребностями обработки экспериментальных данных. Первоначальным свидетельством тому послужили известные работы Бугера, Вебера и, особенно Фехнера по психофизике, а также экспериментальные работы школы Вундта и его последователей в Европе и Америке. По сравнению с этими видными достижениями психологии девятнадцатого века чисто умозрительные математико-психологические начинания Христиана Вольфа, а затем смелые выкладки Гербарта казались совершенно неудачными и бесперспективными, главным образом потому, что они строились безотносительно к конкретному эмпирическому материалу.

В настоящее время такое суждение не может быть признано целиком правильным. Со второй половины текущего столетия стало выясняться, что математика может оказать психологии существенную помощь двояким образом. Во-первых, уже известным путем обработки экспериментально получаемых данных; во-вторых, путем построения специальных математических теорий или моделей, позволяющих не только описывать и анализировать, но в какой-то мере объяснять и предсказывать результаты проводимых экспериментально-психологических исследований.

К этой второй категории теоретико-экспериментальных исследований чаще всего применяется новый термин «математическая психология». Сюда именно и относится недавно переведенная на русский язык книга Р. Аткинсона и др. «Введение в математическую теорию обучения».

На вопрос, что такое математическая теория обучения, авторы отвечают предельно просто: «теоретическое рассмотрение и исследование проблем обучения математическими средствами» (стр. 23). Последнее означает, что предположения, выражаемые в не математических теориях словами, заменяются здесь формулировками на точном математическом языке. Однако формализация в

данном случае не является самоцелью, а лишь «мощным средством для создания теории» (стр. 24).

Кроме общетеоретического введения книга содержит семь глав, посвященных описанию различных математических моделей в заключительную главу, в которой рассматриваются проблема и методы оценки параметров. В книге рассматриваются опыты и модели, относящиеся: 1) к проблеме идентификации понятий; 2) к обучению парным ассоциациям; 3) к поведению в условиях выбора; 4) к проблеме обнаружения сигналов и вероятностного обучения; 5) к проблеме «обусловливания» пассивно-оборонительной реакции; 6) к некоторым формам «социального и экономического поведения»; 7) к теории отбора стимулов, математически разрабатываемой главным образом В. К. Эстесом и его сотрудниками и восходящей к некоторым психофизиологическим предпосылкам из работ Э. Газри и К. Халла. Теория отбора стимулов, по-видимому, имеет самое общее значение и большинство моделей, описываемых в данной книге, по словам авторов, можно рассматривать как различные частные случаи этой общей теории.

Можно с уверенностью сказать, что у советских читателей определенный интерес вызовут общие основоположения математической теории научения, как концепции прежде всего психологической, развиваемой на современной теоретико-вероятностной основе. Сами авторы в предисловии указывают, что «эта книга по психологии, а не по математике. Тем не менее она в развернутой форме систематизирует методы указанного направления математического моделирования в применении к разработке целого ряда хорошо известных психологических проблем».

В одном отношении заглавие книги может несколько дезориентировать советского читателя. Ни о каком обучении в том смысле, в котором это слово употребляется в нашей педагогике, речи не ведется. Авторы имеют в виду не обучение, а научение (learning), как всякое приобретение новых форм поведения человеком и животным на основе индивидуального опыта. Эта сторона дела подробно разъясняется в предисловии к русскому изданию книги. К сожалению,

¹ Р. Аткинсон, Г. Бауэр, Э. Кротерс. Введение в математическую теорию обучения. М., «Мир», 1969.

математическая сторона вопроса в предисловии считается почти без внимания. Поэтому мы считаем целесообразным остановиться на этой части излагаемого материала, и на конкретных примерах рассмотреть следующие три положения книги: 1) как авторы строят модели; 2) как, с точки зрения авторов, эти модели объясняют и предсказывают поведение испытуемого в условиях исследуемой экспериментальной ситуации; 3) как эти предсказания могут быть перенесены в условия других экспериментальных ситуаций.

Нам представляется, что эти вопросы должны быть небезыносительными для советских психологов, работающих в разных областях. Дело в том, что наука в широком смысле (как образование временных связей, как приобретение всякого рода знаний и навыков) имеет место почти во всех экспериментальных ситуациях, с которыми имеет дело психолог. При этом подразумевается не только общепсихологический, но и педагогико-психологический аспекты, равным образом как и другие подходы, в частности, инженерно-психологический и психофизиологический. Это легко иллюстрировать на самом простом примере. Уже во введении в книге приводится формула: $q_n = q_1 \alpha^{n-1}$ которая математически описывает предположительную функцию вероятности ошибочного ответа при обучении. Здесь q_1 — параметр, который представляет вероятность появления ошибки в первой пробе эксперимента, а α — скорость или темп научения. Иначе говоря, параметр α указывает ту долю, на которую вероятность ошибочного ответа уменьшается в каждой последующей пробе. Он выражает в численном виде то, что интуитивно подразумевается, когда говорят, что испытуемый чему-то обучается, быстро или медленно.

Скорость является одной из существенных характеристик процесса научения. С понятием скорости выбора того или иного признака при классификации экспериментальных объектов связана описываемая авторами модель «идентификации понятий». Она интересна и в том отношении, что отвечает на вопрос, как и почему испытуемый, наконец, приходит к верному решению. С помощью такого рода модели можно получить ряд предсказаний относительно хода процесса научения. Она становится еще интересней потому, что проблема «идентификации понятий», будучи рассмотрена с точки зрения «фильтрации сенсорной информации» в математической теории отбора стимулов (стр. 55), легко может быть соотнесена с данными инженерной психологии и психофизиологии высших процессов.

В эксперименте по «идентификации понятий» испытуемый должен классифицировать карточки на два класса (A и B). На карточках изображались геометрические фигуры (стимулы), которые отличались друг от друга следующими признаками: числом, цветом и формой. Все признаки были бинарными, то есть принимали только два значения. Число фигур — одна или две, цвет — красный или зеленый, форма — круг или квадрат. Таким

образом, испытуемому предъявлялось $2^3=8$ стимулов.

Правило классификации предполагает разбиение 2^3 карточек на два класса, на основе релевантного (значимого) и иррелевантных признаков. Так, например, если все карточки красные принадлежали к одному классу, а все зеленые к другому, то признак цвет полностью релевантный. Если же в каждом из классов половина кругов и половина квадратов, то форма — иррелевантный признак, так как в этом случае коэффициент корреляции между значением признака и принадлежностью стимула к тому или иному классу равен 0.

Будучи выражена в наиболее общей словесной форме, рассматриваемая модель в сущности сводится к «теории проб и ошибок». Выбор признака осуществляется случайно в том смысле, что по неизвестным причинам было обращено внимание именно на этот признак, а не на другой. Предполагается, что в каждой пробе испытуемый из множества признаков выбирает какой-то один. Между значением выбранного признака и ответом испытуемого, получившим словесное подкрепление, устанавливается «связь». Установление связи между значением релевантного признака и правильным ответом испытуемого эквивалентно утверждению — «обучение произошло». Начиная с этого момента, вероятность правильного ответа становится равной 1. Если в какой-то пробе была допущена ошибка, то вероятность отыскания в следующей пробе правильного решения равна вероятности выбора релевантного признака. Эта вероятность рассматривается в модели как «скорость обучения».

Математическая форма модели предполагает, что испытуемый может находиться в одном из двух состояний: \bar{S} — «нет обучения», S — «обучение произошло». Состояния \bar{S} генерируют стационарные последовательности независимых ответов. Переход из состояния \bar{S} в состояние S происходит в какой-то пробе скачком, причем, раз попав в состояние \bar{S} , испытуемый более из него не выходит. Такая трактовка модели определяет подходящий для ее формализации математический аппарат, а именно: статистическая независимость ответов состояния S удовлетворяет требованиям цепи Маркова с поглощением.

Формализация модели состоит в следующем. Прежде всего вводится параметр, характеризующий скорость обучения:

$$C = \frac{W_r}{W_r + \sum_i W_i}$$

где W_r — «рельефность» или характеристика признака, т. е. его вес, $\sum_i W_i$ — сумма всех

весов иррелевантных признаков. Второй параметр q выражает вероятность ошибочного ответа. Если принять во внимание, что вероятность правильного ответа равна P , то вероятность ошибки $q=1-P$; вероятность того, что была допущена ошибка и выбран реле-

вантный признак — qc ; вероятность того, что переход из состояния \bar{S} в состояние S перед очередной пробой не состоится, равна $1 - qc$, то матрица перехода из состояния «нет обучения» в состояние «обучение произошло», задается следующим образом:

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} \begin{bmatrix} 1 & S_{n+1} \\ qc & 1 - qc \end{bmatrix}$$

Связь между состоянием и ответом испытуемого определяется в модели следующими двумя аксиомами: «Если при предъявлении карточки испытуемый находится в состоянии S , то его ответ будет правильным с вероятностью P и ошибочным с вероятностью $q=1-P$ ». «Если при предъявлении карточки испытуемый находится в состоянии \bar{S} , то его ответ будет правильным с вероятностью 1 » (стр. 70).

Что дает такая модель психологической теории? Прежде всего отметим преимущество математического языка, лишённого двусмысленностей и связанных с ними недоразумений, которые почти всегда имеют место в теориях, формулируемых на словесном уровне. Верхняя строка матрицы перехода, выраженная 1 и 0 , свидетельствует об однозначности состояний «обучение произошло» и «обучение не может произойти». Это значит, что модель указывает на наличие этих состояний, но исключает их из сферы теоретизации. Таким образом, модель четко выделяет ту область, которая в данном случае может быть подвергнута математическому анализу: это последовательности состояний \bar{S} .

Исключение из сферы теоретизации состояния S и состояния «обучение произошло не может», в свою очередь, отчетливо указывает то потенциальное направление, развитие которого составит будущее теории. Несомненно, что получение количественного выражения для состояния S не менее важно, чем получение количественного выражения для состояния \bar{S} . Тем более важно ответить на вопрос, что представляет собой состояние «обучение произошло не может». Реально ли оно, или это только гипотетическая конструкция?

Это имеет непосредственное отношение и к экспериментальной психологии. Очевидно, что рассматриваемый эксперимент по идентификации понятий не может дать нужных данных для продолжения теоретизации в этой области. Здесь нужен эксперимент психофизиологического или биофизического уровня. Таким образом, модель заранее указывает область планирования экспериментов. В этом усматривается второе преимущество количественной теории перед качественной.

Наряду с этим, следует указать на узость и однобокость рассматриваемой модели, как на существенные ее недостатки. Это общий недостаток математической психологии данного этапа развития. «Психологи работают, — отмечают авторы, — с миниатюрными теориями, или ограниченными моделями. Указанный подход обычно подвергается критике

на том основании, что ему не хватает полноты и общности. Это верно «по определению», однако те, кто работает в указанном направлении, смотрят на этот недостаток как на неизбежную в настоящий момент плату за обладание поддающимися исследованию моделями» (стр. 116).

В частности, математическое исследование модели «идентификации» понятий позволило Р. Аткинсону и соавторам получить следующие новые знания о процессе научения. Во-первых, было получено распределение y , представляющее число проб, необходимых для осуществления перехода из состояния \bar{S} в состояние S

$$P_r [Y = n] = (1 - qc)^{n-1} qc, \quad n \geq 1$$

Нетрудно заметить, что указанное распределение является функцией вероятности появления ошибки при n -й пробе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q(1 - qc)^{n-1} = 0$$

Последнее есть математическое ожидание ошибки, которое получается обычным способом:

$$q_n = qP_r(\bar{S}) + 0 \cdot P_r(S) = qP_r(\bar{S})^*$$

Так как модель предполагает, что в первой пробе испытуемый находится в состоянии \bar{S} , то $P_r(\bar{S})=1$. Вероятность того, что оно будет иметь место и во второй пробе, что эквивалентно утверждению «испытуемый остался в том же состоянии», равна $P(\bar{S}_2)=1-qc$. Аналогичные рассуждения относительно третьей, четвертой и т. д. проб, приводят к выражению для вероятности появления ошибки при n -й пробе: $P_r(\bar{S}_n)=(1-qc)^{n-1}$. Произведение q на вероятность ее появления $(1-qc)^{n-1}$ дает распределение для q_n . Оно хорошо соотносится с интуитивным предположением о том, что с увеличением числа проб обучение в конце концов произойдет

$$q_n = q(1 - qc)^{n-1}.$$

Сходным образом модель предсказывает распределение числа ошибок, сделанных испытуемым до того как он решит задачу; распределение номеров проб, соответствующих последней ошибке; распределение правильных ответов, попавших между соседними ошибочными ответами. Дальнейшее предсказание такого рода возможно, но практически не имеет смысла, так как теряет свою информативность, на что указывают сами авторы (стр. 103).

Теоретически предсказываемые результаты, по утверждению авторов книги, хорошо согласуются с экспериментальными данными. Постулируемые моделью утверждения о независимости и стационарности состояний, генерируемых последовательностью \bar{S} , также хорошо подтверждаются экспериментом. Выше уже говорилось об ограниченности моделей такого типа. Следует добавить, что модель «идентификации понятий» не касается вопросов о том, какие карточки предъявля-

* Здесь вероятность ошибки сама является случайной величиной, принимающей значения q или 0 .

лись, какие ответы на них давали испытуемые, какие ошибки при этом были допущены. Это делает модель относительно грубой, ее предсказания трудно переносятся даже на условия идентичных экспериментальных ситуаций. Так, например, ее предсказания могут быть перенесены на такие опыты, где имела место вариация шести бинарных признаков, вместо восьми (стр. 91) Однако, предсказания теряют силу в условиях эксперимента, где осуществляется классификация признаков, принимающих больше, чем два значения.

Однако современная математическая психология уже имеет примеры моделей, способных выполнить более высокий уровень предсказания. Это — модели с инвариантными параметрами. Примером такой теории является «обнаружения сигналов и вероятностное обучение» (гл. 5), где обсуждаются две, вообще говоря, различные области психологии: психофизика и обучение. Предполагаемая авторами модель формулируется так, что при одной системе правил соответствия она представляет теорию обнаружения сигналов, при другой — теорию вероятностного обучения, а при особом соотношении параметра чувствительности σ и параметра P_n , характеризующего ответ испытуемого, она обобщает ту и другую теории.

Посредством σ в модели постулируется процесс «активации» (A), определяющий соотношение между внешним стимулом и предполагаемым сенсорным состоянием испытуемого. «Грубо говоря, — отмечают авторы, — стимул питает процесс активации, которой превращает изменения внешней энергии в сенсорную информацию (сенсорное состояние)» (стр. 240—241). Стимулы предъявлялись в двух временных интервалах, на одном из которых подавался «сигнал + шум», а на втором — только «шум». Указанная последовательность интервалов соответствует стимулу S_1 , обратный порядок последовательности — стимулу S_2 . Сенсорные состояния, — это теоретические конструкции, которым приписывались определенные свойства. Модель постулировала при таких состояниях:

s_0 — сигнал не обнаружен; s_1 сигнал обнаружен в первом интервале; s_2 — сигнал обнаружен во втором интервале. Процесс активации представлялся матрицей:

$$A_n = \begin{matrix} & s_0 & s_1 & \bar{s}_2 \\ S_1 & \begin{bmatrix} 1-\sigma & \sigma & 0 \\ 1-\sigma & 0 & \sigma \end{bmatrix} \\ S_2 & \end{matrix}$$

Элементы матрицы не зависят от номера пробы, а это значит, что процесс активации фиксирован на всем протяжении эксперимента. Существенно, что s_1 и s_2 однозначно связаны со стимулами S_1 и S_2 , а s_0 — неоднозначно.

Последнее положение уточняется смыслом параметра P_n . Он выражает склонность испытуемого разрешить неопределенность, возникшую при сенсорном состоянии s_0 , в пользу стимула S_1 или S_2 , т. е. выдать от-

вет A_1 или A_2 . Процесс принятия решения в модели задается матрицей:

$$D_n = \begin{matrix} & A_2 & A_1 \\ s_0 & \begin{bmatrix} P_n & 1-P_n \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ s_1 & \\ s_2 & \end{matrix}$$

Заметим, что D_n является функцией номера пробы n , а сам параметр P_n подвергается в модели меньшим ограничениям, чем параметр σ . Так, например, предполагается, что параметр P_n зависит от программы предъявления стимулов. Кроме того, P является функцией подкрепления (E), зависящей и от характера этого подкрепления. В то же время считалось, что эти переменные не оказывают влияния на изменение величины параметра σ . Он зависит лишь от физических характеристик сигнала и шума. Взаимодействие параметров модели задает матрицу деятельности:

$$P_n = A_n D_n = \begin{bmatrix} (1-\sigma)P_n + \sigma & (1-\sigma)(1-P_n) \\ (1-\sigma)P_n & (1-\sigma)(1-P_n) + \sigma \end{bmatrix}$$

Модель полностью определяется первым столбцом, где $(1-\sigma)P_n + \sigma = P_r(H_n)$ — вероятность попадания, а $(1-\sigma)P_n = P_r(F_n)$ — вероятность ложной тревоги. Нетрудно заметить, что если в указанных двух равенствах один из параметров σ или P_n считать постоянным, а второй — переменным, то модель предсказывает линейный характер изменения деятельности. Соотношение между $P_r(H_n)$ и $P_r(F_n)$ также выражается линейной зависимостью. Ее можно иллюстрировать на хорошо известной уравнении $y = kx + e$. Случай $k = 1$, $e = \sigma$ представляет собой РОС кривую, т. е. кривую оперативной характеристики ответа. Поскольку σ — теоретически постоянная, а P меняется, то изменение деятельности испытуемого по этой прямой рассматривается как изменение в смещении ответа. Случай $e = -1$, $K < 0$, соответствует кривой изомещения. Так как P_n — константна, а σ — переменная, то изменение в деятельности изометрической интерпретируется как изменение в чувствительности испытуемого.

Проверка достоверности этого предсказания осуществляется оценкой параметров. Параметр σ оценивался по методу наименьших квадратов обычным способом. Результаты были использованы авторами для получения РОС-кривых восьми испытуемых. Так как уровни сигнала и шума оставались одинаковыми для всех испытуемых, то вариации величины σ представляли различие в пороге чувствительности.

Более интересным образом оценивался параметр P_n . Для описания изменения этого параметра авторы постулировали линейную форму приращения $P_{n+1} = (1-\theta)P_n + \theta$. Было принято допущение, что изменение имеет место только при наступлении сенсорного состояния s_0 , причем, если экспериментатор сообщает испытуемому, что сигнал имел место в первом интервале E_1 , то P_n получает по-

ложительное приращение θ , если во втором интервале E_2 , то приращение θ отрицательное:

$$P_{n+1} = \begin{cases} (1 - \theta) P_n + \theta, & \text{если } S_{on} \Delta E_{1n} \\ (1 - \theta') P_n, & \text{если } S_{on} \Delta E_{2n} \\ P_n & \text{во всех других случаях} \end{cases}$$

После выполнения ряда сложных математических выкладок авторы получили одно из очень важных предсказаний модели: P_∞ не зависит от абсолютных значений величин θ и θ' а зависит от отношения: $F = \frac{\theta'}{\theta}$

Так как θ' и θ непосредственно связываются с E_1 и E_2 , то отношение F характеризует способность испытуемых корректировать свое поведение в связи с информацией, получаемой посредством обратной связи. Оно может варьировать от испытуемого к испытуемому, показывая при этом индивидуальные реакции испытуемых на эту информацию. Но поскольку θ' и θ никак не связывались с программой предъявления сигналов, то в этом отношении для каждого испытуемого они предполагаются фиксированными и неизменными. Таким образом, можно сделать одну единственную оценку для F , а затем использовать ее для предсказаний по всем программам. «Проверка неизменности (инвариантности) параметров поведения, — отмечают авторы, — в разных экспериментальных условиях представляет очень надежный тест для модели. История математической психологии изобилует моделями, которые оказались вполне удовлетворительными при объяснении данных, полученных в условиях отдельного эксперимента, но терпели полную неудачу, столкнувшись с задачей объяснения данных целой серии таких экспериментов» (стр. 265).

Нам представляется, что описание этой модели является самым интересным и содержательным разделом книги. Она интересна уже тем, что «пробивает непроницаемую стену»

между двумя разными областями традиционной психологии. Она имеет подобные себе модели в математической психологии, в частности, она сходна с моделью Люса с одним интервалом наблюдения и с принудительным выбором, а также с моделью Аткинсона, которая была сформулирована в терминах теории отбора стимулов со многими элементами (гл. 8). Наконец, она интересна и потому, что является незаконченной в теоретическом отношении и этим самым представляет широкое поле деятельности для исследователей, работающих в этой области.

Построение математической психологии — сложный и многоступенчатый процесс. Ясно, что на нынешней стадии моделирования психики приходится значительно сужать, схематизировать моделируемый объект. Однако какие-то элементы, стороны сложного целого уже сейчас моделируются по меньшей мере удовлетворительно, и это, по нашему мнению, составляет одно из главных достоинств книги. Что же касается перспективы развития этого направления вообще, то на этот счет не может быть двух разных мнений. Проникновение математики в психологию является большим шагом вперед, хотя авторы и выражают сомнение в том, что математические методы в ближайшем будущем могут стать неотъемлемой составной частью психологии и проникнуть в нее более глубоко, чем в другие научные области.

Разумеется, что в краткой рецензии нет никакой возможности обсудить весь содержащийся в книге богатый и интересный материал. Достаточно сказать, что в ней описывается и подробно анализируется восемнадцать различных моделей, с которыми можно познакомиться только путем внимательного изучения рецензируемой книги.

В заключение хочется отметить, что выход в русском переводе книги Р. Аткинсона, Г. Бауэра и Э. Кротерса является своевременным и, несомненно, принесет большую пользу советским психологам.

