Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 1

УДК 517.512

МАТЕМАТИКА

А. П. БУЛАНОВ

О НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 V 1969)

Пусть $R_n[f]$ и $E_n[f]$ — наименьшее уклонение (в метрике $c[a, b]$) соответственно рациональных функций степени не выше n и полиномов степени не выше n от функции $f(x)$, $x \in [a, b]$. Е. П. Долженко ([1]) установил, что существуют непрерывные функции f, для которых $R_{n_k}[f] = E_{n_k}[f]$ для бесконечного числа индексов n_k. При этом f может иметь модуль непрерывности любого наперед заданного порядка роста. В связи с этим возникает задача об отыскании достаточно простых классов функций f, для которых $R_n[f]$ стремится к нулю существенно быстрее, чем $E_n[f]$.

Остановимся вначале на выпуклых функциях. Из результата П. Шюша и П. Турана ([2]) следует: если $f(x)$ выпукла на $[-1, 1]$, то на любом отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ справедлива оценка

$$R_n[f] \leqslant C(\varepsilon) \ln^4 n / n^2 \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

С другой стороны (см. ([3]), оценка (24)), существуют такие кусочно-выпуклые функции f, для которых $R_n[f]$ стремится к нулю сколь угодно медленно. В связи с этими двумя результатами встает вопрос: существуют ли выпуклые функции, которые приближаются рациональными функциями сколь угодно плохо? Ответ на него дает

Теорема 1. *Для произвольной непрерывной выпуклой функции $f(x)$ ($x \in [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$) справедлива оценка*

$$R_n[f] \leqslant C_1 M \ln^2 n / n \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

где C_1 — абсолютная постоянная, M — максимум модуля $f(x)$ на $[a, b]$.

Теорема 2. *Существует выпуклая непрерывная функция $f(x)$, $x \in [0, 1]$, для которой справедливы неравенства*

$$R_n[f] \geqslant 1 / n \ln^2 n \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Теорема 2 показывает, что если пренебречь множителями типа $\ln^\gamma n$ ($\gamma = \mathrm{const}$), то оценка (1) является неулучшаемой.

Попутно отметим полученную А. А. Гончаром ([4]) (см. там следствие 3 теоремы 1) оценку

$$R_n\left[\left(\ln \frac{e}{x}\right)^{-\gamma}\right] \leqslant C_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\gamma, \quad \gamma > 0, \ x \in [0, 1].$$

Из теоремы 1 следует, что последняя оценка (множителем $\ln n$ пренебрегаем) не является точной при $0 < \gamma < 1$ (в то же время она является неулучшаемой для кусочно-выпуклой функции $f_0(x)$: $f_0(x) = 0$ при $x \in [-1, 0]$, $f_0(x) = (\ln e / x)^{-\gamma}$ при $x \in [0, 1]$).

Теорема 2а. *Для любой последовательности $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \ldots 0$, $\varepsilon_n \to 0$, существует подпоследовательность номеров $n_1 < n_2 < \ldots$ и выпуклая не-*

прерывная функция $f(x)$, $x \in [0, 1]$, *такие, что*

$$R_{n_k}[f] > \varepsilon_{n_k}/n_k.$$

Теорема 3. *Если выпуклая функция* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 0$, $x \in [a, b]$, *то справедливы неравенства*

$$R_n[f] \leqslant C_3 M \frac{\ln^6 n}{n^2} \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

где C_3 *зависит только от* α; M — *максимум модуля* $f(x)$ *на* $[a, b]$.

Так как Д. Ньюман, П. Шюш и П. Туран ([2]) показали, что существует выпуклая функция $f(x)$, $x \in [-1/2, 1/2]$, для которой

$$R_n[f] > \frac{1}{n^2 \ln^2 n} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

то (если пренебречь множителями типа $\ln^\gamma n$, $\gamma = \mathrm{const}$) оценка (2) является неулучшаемой. Третья теорема перекликается со следующим результатом: для непрерывных функций с ограниченным изменением $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $x \in [a, b]$, $\alpha > 0$, справедлива оценка *

$$R_n[f] \leqslant C_4 \frac{\ln^2 n}{n} \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

где C_4 не зависит от n. Как в оценке (2), так и в оценке (3) в правой части липшицев показатель α входит лишь в постоянные C_3 и C_4.

Теорема 4. *Пусть* $f(x)$ $(x \in [a, b])$ — *непрерывная функция с модулем непрерывности* $\omega(\delta)$ **, *имеющая конечное полное изменение* $(\mathrm{Var}\, f < \infty)$. *Тогда для* $R_n = R_n[f]$ *справедлива оценка*

$$\frac{1}{|\ln R_n|} \frac{R_n}{|\ln \omega^{-1}(R_n)|} \leqslant \frac{C_5}{n} \quad (n \geqslant N(\omega)), \tag{4}$$

где C_5 *зависит от* $\mathrm{Var}\, f$ *и от* $\omega(\delta)$; $N(\omega)$ *зависит от* ω; $\omega^{-1}(t)$ — *функция, обратная к* $t = \omega(\delta)$.

Следствие. *Если* $f(x)$, $x \in [a, b]$, *является непрерывной функцией с конечным изменением, модуль непрерывности которой удовлетворяет неравенству* $\omega(\delta) \leqslant (\ln 1/\delta)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, *то*

$$R_n[f] \leqslant C_6 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\gamma/(1+\gamma)} \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

где C_6 *зависит от* $\mathrm{Var}\, f$ *и от* γ (*заметим, что в работе* ([5]) *Г. Фройда для функций этого класса получена оценка* $R_n[f] \leqslant C_7 n^{-\gamma/(2+\gamma)}$).

Работа выполнена под руководством Е. П. Долженко.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 V 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. П. Долженко, Матем. заметки, 1, в. 3, 403 (1962). [2] P. Szüsz, P. Turán, MTA. Mat. Kut. Int. Közl., 495 (1965). [3] А. А. Гончар, Матем. сборн., 72 (114) 3, 489 (1967). [4] А. А. Гончар, Матем. сборн., 73 (115), 4, 630 (1967). [5] G. Freud, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 17 (3—4), 313 (1966).

* Результат получен независимо А. А. Абдугаппаровым с Е. П. Долженко и Г. Фройдом и сообщался на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г.; см. также ([5]).

** $\omega(\delta)$ — неотрицательная функция, неубывающая при $\delta \geqslant 0$, $\omega(0) = 0$. Обратная функция $\omega^{-1}(t)$ определяется так: $\omega^{-1}(t) = \inf\{\delta\colon \omega(\delta) \geqslant t\}$.