Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. СКОРДЕВ

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 7 VII 1969)

Для любого положительного натурального m рассмотрим многочлен

$$\nu_m(x, y) = {}^1/_2 m(x+y)(x+y+1) + x - (m-1)y.$$

Непосредственным вычислением проверяются равенства

$$\nu_m(0, 0) = 0,$$
$$\nu_m(0, x+1) = \nu_m(x, 0) + 1,$$
$$\nu_m(x+1, y) = \nu_m(x, y+1) + m.$$

При помощи этих равенств легко убедиться, что в точках с натуральными координатами многочлен ν_m принимает натуральные значения, причем в различных точках — различные.

Теорема 1. *Пусть m — положительное натуральное число и ω — такая (частичная) арифметическая функция двух переменных, что для любых натуральных x, y и z верны равенства*

$$\omega(\nu_m(y, 0), z) \simeq \nu_m(y, z), \tag{1}$$
$$\omega(\nu_m(0, x+1), z) \simeq x, \tag{2}$$
$$\omega(\nu_m(y+1, x+1), z) \simeq \omega(\omega(x, z), \omega(y, z)). \tag{3}$$

При этих предположениях ω является рекурсивно полной арифметической операцией в смысле ([3]), *т. е. существуют такие натуральные числа P, Q, R и S, что следующие 4 условия выполняются для любых натуральных x, y и z:*

а) $\omega(P, x) \simeq x+1$;

б) $\omega(Q, x+1) \simeq x$;

в) $\omega(\omega(\omega(R, x), y), z) \simeq \begin{cases} y, & \text{если } x = 0, \\ z, & \text{если } x \neq 0; \end{cases}$

г) $\omega(\omega(S, x), y)$ *определено и* $\omega(\omega(\omega(S, x), y), z) \simeq \omega(\omega(x, z), \omega(y, z))$.

На основании результатов, доказанных в ([3]), отсюда получается

Теорема 2. *При предположениях теоремы 1 можно утверждать:*

а) *если φ — одноместная арифметическая функция, которая μ-рекурсивна относительно ω, то существует такое натуральное число p, что для любого натурального z верно равенство*

$$\varphi(z) \simeq \omega(p, z);$$

б) *если n — положительное натуральное число и φ — $(n+1)$-местная арифметическая функция, которая μ-рекурсивна относительно ω, то существует такое натуральное число p, что для любых натуральных $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$ верно равенство*

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}) \simeq \omega(\omega(\ldots\omega(\omega(p, z_1), z_2), \ldots, z_n), z_{n+1}),$$

причем выражение $\omega(\ldots\omega(\omega(p, z_1), z_2), \ldots, z_n)$ *осмысленно для любых натуральных* $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Следствие. *При предположениях теоремы* 1 *и при дополнительном предположении, что функция* ω *частично рекурсивна, можно утверждать, что* ω — *главная универсальная функция* (*в смысле* ([4])) *для частично рекурсивных функций одного аргумента.*

Используя теорему о рекурсии, для каждого положительного натурального m можно построить соответствующую частично рекурсивную функцию ω, для которой уравнения (1), (2) и (3) удовлетворяются тождественно. Каждая такая функция будет главной универсальной функцией для частично рекурсивных функций одного аргумента.

Пусть ω_0 — та функция, которая получается по теореме о рекурсии при $m = 1$, т. е. та из функций ω, удовлетворяющих уравнениям (1), (2) и (3) при $m = 1$, которая имеет наименьшую область определения. Согласно сказанному, ω_0 будет главной универсальной функцией для одноместных частично рекурсивных функций. Обозначим через (е) следующую систему равенств формализма рекурсивных функций (([1]), § 54):

$$\begin{aligned}
&h(0, 0, 0, d) = d,\\
&h(a', 0, c', d) = h(a, c, 0, d),\\
&h(a', b', c, d) = h(a, b, c', d),\\
&f(a, b) = h(a, c, 0, h(d, c, b, d)),\\
&f(a, b) = h(a, 0, c', c),\\
&f(a, b) = h(a, d', c', f(f(c, b), f(d, b))).
\end{aligned} \tag{e}$$

Теорема 3. *Система* (е) *рекурсивно определяет функцию* ω_0.

Следствие. *Если* φ — *произвольная частично рекурсивная функция, то может быть построена система из* 7 *равенств формализма рекурсивных функций, которая рекурсивно определяет* φ.

Можно построить относительно простой нормальной алгорифм, который в некотором смысле вычисляет функцию ω_0. Мы построили нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ в алфавите $|f0abc$, обладающий следующими свойствами (относительно терминологии см. ([2])):

1) Для любых натуральных v и z имеет место равенство

$$\mathfrak{A}_{\llcorner} f\,|^{v+1}0\,|^{z+1}_{\lrcorner} \simeq |^{\omega_0(v,\, z)+1}.$$

2) Схема алгорифма $\mathfrak{A}$ состоит из 18 формул подстановок.

3) Все формулы в схеме алгорифма $\mathfrak{A}$ — простые.

4) Длина изображения алгорифма $\mathfrak{A}$ равна числу 128.

Из существования нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ со свойствами 1), 2) и 3) следует, что для любой одноместной частично рекурсивной функции φ можно построить нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над алфавитом $|$, обладающий следующими свойствами:

А. Для любого натурального z верно равенство

$$\mathfrak{B}_{\llcorner}\,|^{z}_{\lrcorner} \simeq |^{\varphi(z)}.$$

Б. Схема алгорифма $\mathfrak{B}$ состоит из 20 формул подстановок.

Путем применения теоремы 2 при $m = 2$ можно получить некоторые результаты, касающиеся относительной частичной рекурсивности. Сформулируем здесь один из них:

Теорема 4. *Если* φ *и* ψ — *частичные арифметические функции и* φ *частично рекурсивна относительно* ψ, *то можно построить систему из* 8 *равенств формализма рекурсивных функций, рекурсивно определяющую* φ *через* ψ.

Софийский университет
София, Болгария

Поступило
15 V 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1957. [2] А. А. Марков, Теория алгорифмов, М., 1954. [3] Д. Скордев, Докл. Болгарск. АН, 16, № 5, 465 (1963). [4] В. А. Успенский, Лекции о вычислимых функциях, М., 1960.