Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 1

УДК 517.544

МАТЕМАТИКА

В. А. ЧЕРНЕЦКИЙ

О КОНФОРМНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ КАРЛЕМАНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА НА РАЗОМКНУТОМ КОНТУРЕ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 26 V 1969)

1. Пусть D — конечная $(m+1)$-связная область, ограниченная контуром Ляпунова L, состоящим из кривой L_0, охватывающей кривые $L_1, \ldots, L_m$. Предполагаем, что начало координат принадлежит области D.

Через $\omega(z, L_k)$, $k = 0, \ldots, m$, обозначим гармонические меры граничных кривых L_k относительно области D ([1]), а через $D_0^-, \ldots, D_m^-$ — дополнение области $D + L$ до полной плоскости.

Пусть

$$\alpha(t) = \sum_{k=0}^{m} \omega(t, L_k)\, \alpha_k(t),$$

где $\alpha_k(t)$ — изменяющий ориентацию гомеоморфизм контура L_k на себя, удовлетворяющий следующим двум условиям: 1) $\alpha_k[\alpha_k(t)] \equiv t$ (условие Карлемана); 2) функция $\alpha'_k(t) \in H(L)$ *, $\alpha'_k(t) \neq 0$, $t \in L$. Пусть $G(t) \in H(L)$, $g(t) \in H(L)$, $G(t) \neq 0$, $t \in L$.

Рассмотрим следующую задачу.

Найти функцию $\Phi(z)$, однозначную и аналитическую в D, H-непрерывную в $\bar{D}$, по одному из следующих условий на L:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^+(t), \tag{1}$$

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^+(t) + g(t) \tag{2}$$

Интерес представляет лишь тот случай, когда выполнены условия ([2, 3]):

$$G[\alpha(t)]G(t) = 1, \quad G[\alpha(t)]g(t) + g[\alpha(t)] = 0. \tag{3}$$

Краевая задача (1) впервые была поставлена Т. Карлеманом ([4]). Полное решение задач (1), (2) для ограниченной односвязной области D дано Д. А. Квеселава ([2]). Случай односвязной неограниченной внешней области исследован Г. С. Литвинчуком ([3]). Задача (1) для многосвязной области впервые была рассмотрена Э. И. Зверовичем ([5, 6]), подсчитавшим число решений задачи (1) для случаев $\varkappa > 0$ и $\varkappa < -2(m-1)$, где $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)|_L$. Однако примененный в ([5]) метод не давал алгоритма для нахождения решений задачи (1) и оказался недостаточным для нахождения числа решений задачи в случае $-2(m-1) \leqslant \varkappa \leqslant 0$.

В настоящей заметке устанавливается факт конформной эквивалентности задачи Карлемана задаче Римана на контуре, состоящем из $m+1$ разомкнутых дуг. Это достигается путем построения специальной склеивающей функции. До сих пор была известна установленная Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе ([7]) и И. Б. Симоненко ([8]) конформная эквивалентность задачи Газемана задаче Римана (на замкнутом контуре); задача типа задачи Газемана была включена Э. И. Зверовичем ([5]) в общую

* То есть удовлетворяет условию Гёльдера (H-непрерывна) на L.

теорию задачи Римана на абстрактных римановых поверхностях; эквивалентность задачи типа задачи Карлемана задаче Гильберта доказана Г. С. Литвинчуком и Э. Г. Хасабовым [9]. Задача Карлемана (2) оставалась единственной из основных краевых задач со сдвигом *, для которой подобный факт не был до сих пор известен.

Связь, установленная между задачей Карлемана и задачей Римана на разомкнутом контуре, позволяет дать полное решение задачи Карлемана для многосвязной области.

2. Лемма 1. *Функция $\Phi(z)$, однозначная и аналитическая в D, H-непрерывная в $\overline{D}$, может быть представлена в виде:*

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\int\limits_L \omega(\tau,\,L_m)\,\varphi(\tau)\,[1+|\alpha'(\tau)|]\,d\sigma, \tag{4}$$

где плотность $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$\varphi(t)+\varphi[\alpha(t)]=\sum_{k=1}^{m} c_k\omega(t,\,L_k); \tag{5}$$

здесь c_k, $k=1,\ \ldots,\ m-1$,— произвольные постоянные, а c_m определяется по $\Phi(z)$ единственным образом, причем плотность $\varphi(t)$ определяется с точностью до слагаемого вида $\sum\limits_{k=1}^{m-1}\mu_k\omega(t,\,L_k)$, где μ_k — произвольные постоянные.

Лемма 2. *Общим решением задачи*

$$\Phi^+[\alpha(t)]=\Phi^+(t) \tag{6}$$

является произвольная постоянная.

Воспользовавшись представлением (4), задачу (6) сводим к интегральному уравнению

$$\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau=0. \tag{7}$$

Легко показать, что любое решение уравнения (7) удовлетворяет условию (5); функции $\omega(t,\,L_1),\ldots,\ \omega(t,\,L_m)$ являются собственными функциями уравнения (7), причем функциям $\omega(t,\,L_k)$, $k=1,\ldots,\ m-1$, соответствует тривиальное решение задачи (7), а функции $\omega(t,\,L_m)$ — комплексная постоянная.

Рассмотрим уравнение

$$\psi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right]\psi(\tau)\,d\tau=0, \tag{8}$$

сопряженное к уравнению (7). Для фундаментальной системы решений $\psi_1(t),\ldots,\psi_m(t)$ уравнения (8) выполняются условия

$$\psi_k(t)+\psi_k[\alpha(t)]\,\alpha'(t)=0,\qquad k=1,\ \ldots,\ m. \tag{9}$$

Отсюда следует безусловная разрешимость задачи **

$$\Phi^+[\alpha(t)]=\Phi^+(t)+g(t)\qquad (g(t)+g[\alpha(t)]\equiv 0). \tag{10}$$

3. На последнем утверждении в предположении, что $g(t)=1/t-1/\alpha(t)$, основывается следующая теорема конформного склеивания.

Теорема 1. *В области D существует однолистная функция $\omega^+(z)$, аналитическая в D, за исключением точки $z=0$, где $\omega^+(z)$ имеет простой*

* Здесь и выше используется терминология обзорной статьи [6].

** Легко видеть, что условие разрешимости задачи (10) $\int g(t)\psi_k(t)\,dt=0$, $k=1,\ldots,m$, выполнено.

полюс, удовлетворяющая на L условию склеивания

$$\omega^+[\alpha(t)] = \omega^+(t). \tag{11}$$

Кроме того, линия склеивания Γ состоит из $m+1$ простых разомкнутых контуров Ляпунова $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_m$, заданных уравнением

$$w = \omega^+(t), \quad t \in L. \tag{12}$$

Функция $\omega^+(z)$ ищется в виде $\omega^+(z) = 1/z + \Phi^+(z)$. Нетрудно показать, что $\omega^+(z)$ однолистна.

4. Введем новую неизвестную функцию

$$\Psi(\omega) = \Phi[z(\omega)], \tag{13}$$

где $z(\omega)$ — функция, обратная к $\omega^+(z)$. Тогда задача (2) сводится к двум задачам Римана на разомкнутом контуре Γ, состоящем из $m+1$ дуг. Обе задачи в силу условий (3) оказываются тождественными. Таким образом, соответствующая задаче Карлемана задача Римана имеет вид

$$\Psi^+(w) = G[z^-(w)]\Psi^-(w) + g[z^-(w)], \quad w \in \Gamma. \tag{14}$$

Индекс задачи (14) представляется формулой ([10])

$$\nu = -(\varkappa + m_-)/2, \tag{15}$$

где m_- — число неподвижных точек сдвига $\alpha(t)$, в которых $G(t) = -1$, $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)|_L$.

Опираясь на теорию задачи Римана на разомкнутом контуре ([10]), получаем результат для задачи Карлемана в случае $(m+1)$-связной области.

Теорема 2. *Число решений однородной задачи Карлемана* (1) $l = 1 - (\varkappa + m_-)/2$ *при* $\varkappa \leqslant -m_-$, *где* $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)|_L$, m_- — *число неподвижных точек сдвига* $\alpha(t)$, *в которых* $G(t) = -1$.

При $\varkappa > -m_-$ *однородная задача* (1) *не имеет нетривиальных решений.*

При $\varkappa > -m_-$ *неоднородная задача* (2) *разрешима и имеет единственное решение, если выполнены* $p = (\varkappa + m_-)/2 - 1$ *условий.*

В случае $m = 0$ получается известная теорема Д. А. Квеселава ([2, 6]).

Я благодарю Э. И. Зверовича, Г. С. Литвинчука и А. П. Нечаева за ценные обсуждения и помощь в работе.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
5 V 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М., 1941. [2] Д. А. Квеселава, Тр. Тбилисск. матем. инст., 16, 39 (1948). [3] Г. С. Литвинчук, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 6 (25) (1961). [4] T. Carleman, Verhandl. internat. mathem. congr., Zurich, 1 B, 1932. [5] Э. И. Зверович, Сибирск. матем. журн., 7, № 4 (1966). [6] Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук, УМН, 23, 3 (141) (1968). [7] Г. Ф. Манджавидзе, Б. В. Хведелидзе, ДАН, 123, № 5 (1958). [8] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. [9] Г. С. Литвинчук, Э. Г. Хасабов, Сибирск. матем. журн., 5, № 3 (1964). [10] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.