Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 2

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК, В. В. ГРУШИН

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ НА ПОДМНОГООБРАЗИИ ГРАНИЦЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 VI 1969)

В ограниченной области $\Omega \subset R^{n+1}$ с гладкой границей Г рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$A(x, D)u(x) = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_{n+1}), \tag{1}$$

порядка μ размера $q \times q$ с коэффициентами из $C^\infty(\Omega)$. Пусть на Г задано граничное условие

$$\gamma Bu = g(x'), \tag{2}$$

где B — прямоугольная матрица размера $l \times q$, состоящая из дифференциальных операторов порядка r; γ — оператор сужения функций на Г. Предполагается, что оператор $A(x, D)$ эллиптичен в $\overline{\Omega}$ и во всех точках $\Gamma \setminus \Delta$, где Δ — гладкое подмногообразие размерности $n - 1$ на Г, выполняется условие эллиптичности задачи (1), (2) (см. ([1])). При некоторых дополнительных условиях в настоящей статье доказаны теоремы о нормальной разрешимости таких задач. Найдены функциональные пространства, в которых оператор, отвечающий задаче, нётеров.

Пусть зафиксировано покрытие $\{U_i\}$ некоторой окрестности подмногообразия Δ и в каждой окрестности U_i так определена локальная система координат (л.с.к.) $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, что $x_{n+1} > 0$ в $U_i \cap \Omega$, Г задается уравнением $x_{n+1} = 0$, Δ — уравнениями $x_{n+1} = 0$, $x_n = 0$ и для любых пересекающихся U_i и U_j переход от л.с.к. $(x_1^i, \ldots, x_{n+1}^i)$ в U_i к л.с.к. $(x_1^j, \ldots, x_{n+1}^j)$ в U_j осуществляется с помощью преобразования вида

$$x_1^j = \varphi_1(x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i, x_{n+1}^i), \ldots, x_{n-1}^j = \varphi_{n-1}(x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i, x_{n+1}^i),$$
$$x_n^j = \varphi_n(x_1^i, \ldots, x_{n+1}^i), \quad x_{n+1}^j = \varphi_{n+1}(x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i, x_{n+1}^i).$$

Пусть в л.с.к., отвечающей U_i, оператор B имеет вид

$$B(x', D) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} x_n^{j\delta} b_{jk}(x', D) D_n^k, \tag{3}$$

где $r \geqslant m$, b_{jk} — матричные дифференциальные операторы порядка $r - m + j$ с коэффициентами из $C^\infty(R^n)$, $x' = (x_1, \ldots, x_n)$, δ — целое положительное число. Все дальнейшее остается в силе и в том случае, когда

$$b_{jk}(x', D) = \sum_{l=0}^{r-m+j} b_{jk}^l(x', D') D_{n+1}^l, \tag{4}$$

где $b_{jk}^l(x', D')$ — псевдодифференциальные операторы на многообразии Г порядка $r - m - l + j$. Таким образом, при $x_n = 0$ граничный оператор B вырождается в оператор $b_{0m}(x', D)D_n{}^m$.

Для изучения задач указанного вида естественно использовать весовые функциональные пространства. Зафиксируем некоторое число s и обозначим через $H_{(m,\delta)}^s(R_+^{n+1})$ пространство (обобщенных) функций $u(x)$ в

$R_{+}^{n+1}=\{x\colon\ x_{n+1}>0\}$, для которых конечна норма

$$|||u,\ R_{+}^{n+1}|||_s=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|(x_n+ix_{n+1})^{(|\alpha''|+\alpha_{n+1})\delta}D^{\alpha}u\|_s,\tag{5}$$

где $\alpha''=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1})$, $\|\ \|_s$ — норма в обычном пространстве $H^s(R_{+}^{n+1})$ (см. ([1])). Аналогично через $\overset{s}{H}_{(m,\ \delta)}(R^n)$ обозначается пространство функций $u(x')$ в R^n, для которых конечна норма

$$|||u,\ R^n|||_s=\sum_{|\alpha'|\leqslant m}\|x_n^{|\alpha''|\delta}D^{\alpha'}u\|_s,\tag{6}$$

где $\alpha'=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$, $\|\ \|_s$ — теперь норма в $H^s(R^n)$. Пространства $\overset{s}{H}_{(m,\ \delta)}(\Omega,\Delta)$ и $\overset{s}{H}_{(m,\ \delta)}(\Gamma,\Delta)$ определяются обычным способом с помощью разбиения единицы, причем вне некоторой окрестности подмногообразия Δ нормы в этих пространствах эквивалентны обычным нормам в $H^{s+m}(\Omega)$ и $H^{s+m}(\Gamma)$.

Возникает вопрос о разрешимости задачи (1), (2) в пространствах $u\in\overset{s_0+\mu}{H}_{(m,\delta)}(\Omega,\Delta)$, $f\in\overset{s_0}{H}_{(m,\ \delta)}(\Omega,\Delta)$, $g\in H^s(\Gamma)$, $s>0$, $s_0=s+r-\mu-m+{}+{}^1/_2$. Как следует из дальнейшего, вообще говоря, задача (1), (2) имеет бесконечномерное ядро и коядро. Однако, если задать на Δ дополнительные граничные и кограничные условия, то при выполнении некоторых алгебраических требований соответствующая задача становится нётеровой. Итак, рассмотрим на (Γ,Δ) граничные условия вида

$$\gamma Bu+G\rho(x'')\otimes\delta(\Delta)=g(x'),$$

$$\sum_{j=0}^{r-m}\gamma_{\Delta}C_j\gamma D_{n+1}^{j}u+E\rho(x'')=h(x''),\tag{7}$$

где γ_Δ — оператор сужения функций на Δ, E — прямоугольная матрица размера $l_1\times k$ из псевдодифференциальных операторов на Δ с однородными символами $e_{ji}(x'',\xi'')$, C_j и G — псевдодифференциальные операторы на Γ, причем в окрестности Δ символ $G(x',\xi')$ для $G(x',D')$ — квазиоднородный порядка σ, т. е. $G(x',\lambda^{1+\delta}\xi'',\lambda\xi_n)=\lambda^{\sigma}G(x',\xi')$, $\lambda>0$, символы $C_j(x',\xi')$ для $C_j(x',D)$ квазиоднородны порядка $\varkappa-(1+\delta)j$. Предполагается, что $\sigma<-s-{}^1/_2$, $\varkappa<m-{}^1/_2$ и порядок E_{ji} равен $t-\theta$, где $\theta=(m-\varkappa-{}^1/_2)\,/\,(1+\delta)-m+r$, $t=(\sigma+{}^1/_2)\,/\,(1+\delta)$. Числа l_1 и k будут определены ниже.

Теорема 1. *Оператор* $\mathfrak{A}$: $(u,\rho)\to(f,g,h)$, *который определяется соотношениями* (1), (7), *при любом* $s>0$ *задает непрерывное отображение*

$$\mathcal{H}_1^s=H_{(m,\ \delta)}^{s_0+\mu}(\Omega,\ \Delta)\times H^{t+s}(\Delta)\xrightarrow{\mathfrak{A}}H_{(m,\ \delta)}^{s_0}(\Omega,\Delta)\times H^s(\Gamma)\times H^{\theta+s}(\Delta)=\mathcal{H}_2^s.$$

Предположим, что в каждой точке $x_0''\in\Delta$ выполнено условие эллиптичности задачи

$$\gamma b_{0m}(x',D)u=\psi(x')\tag{8}$$

для уравнения (1), где $b_{0m}(x',D)$ — оператор из (3) (в соответствующей л.с.к.). Локальное исследование задачи (1), (7) в окрестности точки $x_0''\in\Delta$ естественным образом сводится к исследованию некоторой другой задачи на Γ в окрестности точки x_0''. Для этого рассмотрим достаточно малую окрестность V точки x_0'', и пусть $V^0=V\cap R^n$, $R^n=\{x\colon\ x_{n+1}=0\}$. Тогда существует уточненный регуляризатор задачи (1), (8), т. е. оператор

$$(f,\psi)\to\mathfrak{C}(f,\psi)\ \text{ из }\ H^{s_0}(R_{+}^{n+1})\times H^s(R_n)\ \text{ в }\ H^{s_0+\mu}(R_{+}^{n+1}),$$

$s>0$, $s_0=s+r-m-\mu+{}^1/_2$, такой что если $\operatorname{supp}f\subset V$, $\operatorname{supp}\psi\subset V^0$, то для $u=\mathfrak{C}(f,\psi)$

$$(A(x,D)u,\ \gamma b_{0m}(x',D)u)=(f,\psi)+T_N(f,\psi),$$

где T_N — сглаживающий на N единиц оператор, N — достаточно большое число. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{supp} u \subset W$, где W — некоторая большая окрестность точки x_0''. Положим $\mathfrak{C}_0 f = \mathfrak{C}(f, 0)$, $\mathfrak{C}_1\psi = \mathfrak{C}(0, \psi)$ и введем операторы $d_\alpha(x', D')\psi = \gamma D^\alpha \mathfrak{C}_1\psi$. Как показано в ([2]), $d_\alpha(x', D')$ — псевдодифференциальные операторы в V^0 порядка $|\alpha| - (m - r)$, символ $d_\alpha(x', \xi')$ оператора $d_\alpha(x', D')$ выражается через $A(x, \xi)$ и $b_{0m}(x, \xi)$. Так как $u = \mathfrak{C}(f, \psi)$ удовлетворяет с достаточной точностью уравнению (1), то остается удовлетворить граничным условиям. Подставив u в граничные условия (7), получим новую задачу для нахождения ψ:

$$p(x', D')\psi + G\rho(x'') \otimes \delta(x_n) = g(x') - \gamma B\mathfrak{C}_0 f = g_1(x'),$$

$$\gamma_\Delta C\psi + E\rho(x'') = h(x'') - \sum_{j=0}^{r-m} \gamma_\Delta C_j \gamma D_{n+1}^j \mathfrak{C}_0 f = h_1(x''), \tag{9}$$

где $p(x', D')$ получается, если в $B(x', D)$ заменить D^α на $d_\alpha(x', D')$, $C = \sum C_j d_j(x', D')$, где $d_j(x', D') = \gamma D_{n+1}^j \mathfrak{C}_1\psi$. Положим $C_1 = \sum C_j d_j(x', D'', 0)$, где $d_j(x', D'', 0)$ — операторы с символами $d_j(x, \xi'', 0)$, и заменим C в (9) на C_1 (при этом разность является подчиненным оператором). Тогда получим как раз задачу, которая изучалась в ([3]).

Теорема 2. *Пусть задача* (1), (2) *вне Δ удовлетворяет условию эллиптичности и в каждой точке $x_0'' \in \Delta$ выполнено условие эллиптичности для соответствующей задачи* (1), (8). *Предположим, что система* (9), *в которой C заменено на C_1, удовлетворяет условиям статьи* ([3]). *Тогда оператор $\mathfrak{A}$, отвечающий задаче* (1), (7), *является нётеровым из пространства $\mathscr{H}_1^s$ в $\mathscr{H}_2^s$ при любом $s > 0$.*

Для доказательства теоремы будут построены правый и левый регуляризаторы R. С помощью разбиения единицы построение сводится к построению регуляризатора в окрестности точки x_0'' подмногообразия Δ, поскольку вне Δ выполняется условие эллиптичности задачи (1), (2) и регуляризатор вне окрестности Δ строится обычным способом. Изучим сначала регуляризатор $\mathfrak{C}$ вспомогательной задачи (1), (8) в весовых пространствах.

Лемма 1. *Оператор $\mathfrak{C}$ обладает следующим свойством: если $f \in H^{s_0}_{(m,\delta)}(R_+^{n+1})$, $\psi \in H^s_{(m,\delta)}(R^n)$, $s > 0$, то $u = \mathfrak{C}(f, \psi)$ принадлежит $H^{s_0+\mu}_{(m,\delta)}(R_+^{n+1})$, причем*

$$|||u, R_+^{n+1}|||_{s_0+\mu} \leqslant C(|||f|||_{s_0} + |||\psi|||_s).$$

Предполагается, что $\operatorname{supp} f \subset V$, $\operatorname{supp}\psi \subset V^0$. *Константа C не зависит от f и ψ.*

Для доказательства нужно проверить конечность норм, входящих в (5), при $s = s_0 + \mu$. Проверим сначала, что $v = D_n u$ принадлежит $H^{s_0+\mu}(R^{+\,n+1})$. Пользуясь условиями леммы, находим, что $\gamma b_{0m}(x', D)v \in H^s(R^n)$, $A(x, D)v \in H^{s_0}(R_\times^{n+1})$. Поэтому из обычной теоремы о гладкости решений эллиптической задачи (1), (8) вытекает, что $v \in H^{s_0+\mu}(R_+^{n+1})$ (см., например, ([1])). К тому же выводу мы приходим, если положить $v = (x_n + ix_{n+1})^\delta D_i u$, $i \neq n$. С помощью аналогичных рассуждений последовательно проверяем конечность всех норм в (5) с $s = s_0 + \mu$.

Следующий шаг состоит в построении регуляризатора для системы (9). В том случае, когда $g_1(x') \in H^0(R^n)$, $h_1(x'') \in H^\theta(R^{n-1})$, для системы (9) в ([3]) был построен регуляризатор S с областью значений в $H_{(m,\delta)}(R^n) \times H^t(R^{n-1})$.

Лемма 2. *Если правые части* (g_1, h_1) *принадлежат* $H^s(R^n) \times H^{\theta+s}(R^{n-1})$, $s > 0$, *то решение* (ψ, ρ) *системы* (9) *принадлежит*

$H^{s}_{(m,\,\delta)}(R^n) \times H^{t+s}(R^{n-1})$ *и имеет место оценка*

$$|||\psi, R^n|||_s + \|\rho\|_{t+s} \leqslant c(\|g_1\|_s + \|h_1\|_{e+s}).$$

Предполагается, что носители ψ и ρ принадлежат достаточно малой окрестности точки x_0''. Константа c не зависит от ψ и ρ.

Регуляризатор исходной задачи (1), (7) в окрестности точки $x_0'' \in \Delta$ получается с помощью композиции оператора S и оператора $\mathfrak{C}$ (регуляризатора задачи (1), (8)). Теорема 2 доказана.

В качестве примера рассмотрим систему

$$A(x, D)u_i(x) = f_i(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant q, \tag{10}$$

где $A(x, D)$ — эллиптический оператор второго порядка, а граничный оператор (3) имеет вид

$$B(x', D)u = ID_n u + x_n^{\delta} b(x', D)u, \qquad u = (u_1, \ldots, u_q),$$

где $b(x, D)$ — матрица размера $q \times q$ из дифференциальных операторов первого порядка, I — единичная матрица. Пусть $\lambda(x', \xi')$ — корень уравнения $A^0(x', \xi', \lambda) = 0$ с $\operatorname{Im}\lambda > 0$, где A^0 — главная часть для A в соответствующей л.с.к. В этом случае символ $p(x', \xi')$ для оператора $p(x', D')$ в (9) равен $I\xi_n + x_n^{\delta} b^0(x', \xi'', \xi_n, \lambda(x', \xi'))$, b^0 — главная часть b.

Предположения теоремы 2 в данном случае сводятся к тому, чтобы матрица $b^0(x_0'', \xi'', 0, \lambda(x_0'', \xi'', 0))$ не имела вещественных собственных значений при $\xi'' \neq 0$. Если, кроме того, выполнено условие $Z_{\xi''}$ статьи [3], то соответствующая задача (10), (7) нётерова. В случае одного уравнения эта задача (задача с косой производной) изучалась в [4–8].

З а м е ч а н и е 1. Для простоты изложения мы ограничились случаем, когда все граничные операторы имеют одинаковые порядки и кограничные операторы обладают тем же свойством. Все теоремы легко обобщаются на случай различных порядков.

З а м е ч а н и е 2. Мы изучали случай, когда порядок вырождения в граничных условиях одинаков по всем направлениям, кроме x_n. Аналогично ([3, 9]) можно рассмотреть случай разных порядков вырождения; в частности, по некоторым касательным направлениям может не быть вырождения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 V 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. [2] Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин, Матем. сборн., **73**, № 1, 126 (1967). [3] М. И. Вишик, В. В. Грушин, **189**, № 1 (1969). [4] А. В. Бицадзе, ДАН, **157**, № 6, 1273 (1964). [5] L. Hörmander, Ann. Math., **83**, № 1, 129 (1966). [6] R. L. Borrelli, J. Math. and Mech., **16**, № 1, 51 (1966). [7] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, Матем. сборн., **78**, № 1, 146 (1969). [8] М. Б. Малютов, ДАН, **172**, № 2, 283 (1967). [9] М. И. Вишик, В. В. Грушин, Матем. сборн., **79**, № 1, 3 (1969).