Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 2

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О ПОРЯДКЕ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ЧЕБЫШЕВА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 V 1969)

I. Обозначим через M_n степень точности квадратурной формулы Чебышева с n узлами

$$\int_{-1}^{1} p(x) f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k), \qquad -1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1, \tag{1}$$

т. е. наивысшую степень многочлена, для которого она верна; весовая функция $p(x) \geqslant 0$ предполагается суммируемой на отрезке $[-1, +1]$.

В настоящей заметке мы ставим себе целью найти оценки для порядка относительно n величины M_n, предполагая, что она безгранично возрастает вместе с n; при этом мы пользуемся методами С. Н. Бернштейна ([1]) и Н. И. Ахиезера ([2]).

II. Введем обозначение

$$t(\theta) = \pi p(-\cos\theta)\,|\sin\theta|, \qquad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad x = -\cos\theta, \tag{2}$$

причем наложим на поведение функции $t(\theta)$ следующие ограничения локального характера:

А. Функция $t(\theta)$ непрерывна в точке $\theta = 0$.

В. На отрезке $[0, \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ — фиксированная малая величина, функция $t(\theta)$ почти всюду положительна.

С. Функция $t(\theta)$ не убывает на отрезке $[0, \varepsilon]$.

Через $2m - 1$ обозначим наибольшее нечетное число, не превышающее M_n, причем будем считать m настолько большим, чтобы иметь $0 < \theta_1^{(m)} < \theta_2^{(m)} < \varepsilon$; здесь $\{x_k^{(m)} = -\cos\theta_k^{(m)}\}_1^m$ — корни многочлена степени m, ортогонального на отрезке $[-1, +1]$ относительно весовой функции $p(x)$.

Имеет место неравенство

$$\frac{2m}{n} \leqslant \frac{2m\theta_2^{(m)}}{\pi}\, t(\theta_2^{(m)}); \tag{3}$$

если же функция $t(\theta)$ непрерывна на $[0, \varepsilon]$, то *

$$\frac{2m}{n} \leqslant C_1\omega_2\left(\frac{1}{m};\ t\right) + \gamma_m\,|t(\theta_1^{(m)}) - t(0)| + \gamma_m t(0), \tag{4}$$

где $\omega_2(\delta; t)$ — модуль гладкости функции $t(\theta)$ на отрезке $[0, \varepsilon]$, а $8/3 \leqslant \gamma_m = 4(2m^2+1)/3m^2 \leqslant 4$.

Отсюда вытекает весьма простой результат: если $t(0) < 3/8$, то $\lim\limits_{n\to\infty} M_n/n < 1$; таким образом, *условие* $t(0) \geqslant 3/8$ *необходимо* (*но недостаточно*) *для того, чтобы при безгранично возрастающих значениях* n *иметь* $M_n = n$.

---

* $C, C_1, C_2, \ldots$ — постоянные, не зависящие от m и n.

III. Во всем дальнейшем будем считать $t(0) = 0$; чтобы оценить порядок величины M_n, нам необходимо найти оценку для величины $\theta_2^{(m)}$ при безгранично возрастающих значениях m.

Теорема. *Имеет место оценка $\theta_2^{(m)} \leqslant C\delta_m$, где величина δ_m может быть найдена как корень уравнения* *

$$\frac{1}{\delta} \lg \frac{2c_0}{a(\delta;\, t)} = m, \qquad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t(\theta)\, d\theta; \tag{5}$$

через $a(\delta; t)$ обозначен модуль роста (см. ([4])) функции $t(\theta)$ на отрезке $[-\varepsilon, +\varepsilon]$

$$a(\delta;\ t) = \inf \int_\varphi^{\varphi+\delta} t(\theta)\, d\theta, \quad \varphi, \varphi + \delta \in [-\varepsilon,\ +\varepsilon], \tag{6}$$

который при наших условиях таков:

$$a(\delta; t) = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} t(\theta)\, d\theta = 2 \int_0^{\delta/2} t(\theta)\, d\theta. \tag{7}$$

Неравенства (3), (4) можно теперь записать так:

$$\frac{2m}{n} \leqslant \begin{cases} C_2 m\delta_m t(C\delta_m), & (3') \\ C_1\omega_2\left(\dfrac{1}{m};\ t\right) + \gamma_m t(C\delta_m). & (4') \end{cases}$$

Зная величину δ_m, мы сможем найти оценку сверху для m в зависимости от n, а следовательно, и оценку для $M_n < 2m$.

IV. Пусть сперва весовая функция $p(x)$ имеет в точке $x = -1$ особенность алгебраического характера

$$p(x) = (1 + x)^\gamma p_1(x), \quad -1/2 < \gamma, \quad 0 < C_3 \leqslant p_1(x) \leqslant C_4, \\ x \in [-1, -1 + \eta], \quad \eta > 0 \tag{8}$$

(причем m взято настолько большим, что $-1 < x_1^{(m)} < x_2^{(m)} < 1 + \eta$). В этом случае из (7) находим оценку $\delta_m \leqslant C_5 \lg m / m$, после чего формулы (3), (4) дают

$$\frac{2m}{n} \leqslant \begin{cases} C_6 \lg m \left(\dfrac{\lg m}{m}\right)^{2\gamma+1}, \\ C_1\omega_2\left(\dfrac{1}{m};\ t\right) + C_7 \left(\dfrac{\lg m}{m}\right)^{2\gamma+1}. \end{cases} \tag{9}$$

Окончательное нахождение оценки для M_n зависит от порядка величин

$$\lg m (\lg m / m)^{2\gamma+1}, \quad \omega_2(1 / m; t), \quad (\lg m / m)^{2\gamma+1}$$

относительно друг друга; результаты сведены в табл. 1 **.

V. Если наложить дополнительные ограничения на поведение функции $p(x)$ (8) на всем отрезке $[-1, +1]$, то можно получить более точную оценку $\delta_m \leqslant C_8 \cdot 1 / m$ (см. ([5], [6])); в частности, для этого достаточно условие: *функция $p_1(x)$ в (8) непрерывна и убывает на отрезке* $[-1, +1]$, *причем* $-1/2 \leqslant \gamma \leqslant 1/2$ (условие C при этом может быть отброшено); пользуясь этой оценкой, получим неравенство

$$2m / n \leqslant C_1\omega_2(1 / m;\, t) + C_5(1 / m)^{2\gamma+1}; \tag{10}$$

если $(1 / m)^{2\gamma+1} = o[\omega_2(1 / m;\, t)]$, то придем к оценке $M_n \leqslant \varphi^{-1}(Cn)$; если же $\omega_2(1 / m;\, t) = o(1 / m)^{2\gamma+1}$, то $M_n \leqslant C_{10} n^{1/(2\gamma+2)}$.

---

* Доказательство см. в ([2]), лемма 1.

** Функция φ^{-1} обратна функции $\varphi(m) = m / \omega_2(1 / m;\, t)$.

III. Во всем дальнейшем будем считать $t(0) = 0$; чтобы оценить порядок величины M_n, нам необходимо найти оценку для величины $\theta_2^{(m)}$ при безгранично возрастающих значениях m.

Теорема. *Имеет место оценка* $\theta_2^{(m)} \leqslant C\delta_m$, *где величина* δ_m *может быть найдена как корень уравнения* *

$$\frac{1}{\delta} \lg \frac{2c_0}{a(\delta;\, t)} = m, \qquad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t(\theta)\, d\theta; \tag{5}$$

через $a(\delta; t)$ *обозначен модуль роста* (см. ([4])) *функции* $t(\theta)$ *на отрезке* $[-\varepsilon, +\varepsilon]$

$$a(\delta;\ t) = \inf \int_{\varphi}^{\varphi+\delta} t(\theta)\, d\theta, \quad \varphi, \varphi + \delta \in [-\varepsilon,\ +\varepsilon], \tag{6}$$

который при наших условиях таков:

$$a(\delta; t) = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} t(\theta)\, d\theta = 2 \int_0^{\delta/2} t(\theta)\, d\theta. \tag{7}$$

Неравенства (3), (4) можно теперь записать так:

$$\frac{2m}{n} \leqslant \begin{cases} C_2\, m\delta_m t(C\delta_m), & (3') \\ C_1\omega_2\left(\frac{1}{m};\ t\right) + \gamma_m t(C\delta_m). & (4') \end{cases}$$

Зная величину δ_m, мы сможем найти оценку сверху для m в зависимости от n, а следовательно, и оценку для $M_n < 2m$.

IV. Пусть сперва весовая функция $p(x)$ имеет в точке $x = -1$ особенность алгебраического характера

$$p(x) = (1+x)^{\gamma} p_1(x), \quad -1/2 < \gamma, \quad 0 < C_3 \leqslant p_1(x) \leqslant C_4,$$
$$x \in [-1, -1+\eta], \qquad \eta > 0 \tag{8}$$

(причем m взято настолько большим, что $-1 < x_1^{(m)} < x_2^{(m)} < 1 + \eta$). В этом случае из (7) находим оценку $\delta_m \leqslant C_5 \lg m / m$, после чего формулы (3), (4) дают

$$\frac{2m}{n} \leqslant \begin{cases} C_6 \lg m \left(\frac{\lg m}{m}\right)^{2\gamma+1}, \\ C_1\omega_2\left(\frac{1}{m};\ t\right) + C_7\left(\frac{\lg m}{m}\right)^{2\gamma+1}. \end{cases} \tag{9}$$

Окончательное нахождение оценки для M_n зависит от порядка величин

$$\lg m(\lg m / m)^{2\gamma+1}, \quad \omega_2(1/m; t), \quad (\lg m / m)^{2\gamma+1}$$

относительно друг друга; результаты сведены в табл. 1 **.

V. Если наложить дополнительные ограничения на поведение функции $p(x)$ (8) на всем отрезке $[-1, +1]$, то можно получить более точную оценку $\delta_m \leqslant C_8 \cdot 1 / m$ (см. ([5], [6])); в частности, для этого достаточно условие: *функция* $p_1(x)$ *в* (8) *непрерывна и убывает на отрезке* $[-1, +1]$, *причем* $-1/2 \leqslant \gamma \leqslant 1/2$ (условие C при этом может быть отброшено); пользуясь этой оценкой, получим неравенство

$$2m / n \leqslant C_1\omega_2(1/m; t) + C_5(1/m)^{2\gamma+1}; \tag{10}$$

если $(1/m)^{2\gamma+1} = o[\omega_2(1/m; t)]$, то придем к оценке $M_n \leqslant \varphi^{-1}(Cn)$; если же $\omega_2(1/m; t) = o(1/m)^{2\gamma+1}$, то $M_n \leqslant C_{10} n^{1/(2\gamma+2)}$.

---

* Доказательство см. в ([2]), лемма 1.

** Функция φ^{-1} обратна функции $\varphi(m) = m / \omega_2(1/m; t)$.

VI. Пусть теперь весовая функция $p(x)$ имеет в точке $x = -1$ нуль логарифмического характера

$$p(x) = |\lg(1+x)|^{-\gamma} p_1(x), \quad \gamma > 0, \quad x \in [-1, -1+\eta]; \qquad (11)$$

нетрудно показать, что в этом случае мы имеем ту же самую оценку $\delta_m \leqslant C_{11} \lg m / m$; результаты сведены в табл. 2.

Таблица 1

Условия	Оценки для M_n
$\omega_2(1/m;\ t) = o\,[(\lg m/m)^{2\gamma+1}]$	$\{n(\lg n)^{2\gamma+1}\}^{1/(2\gamma+2)}$
$(\lg m/m)^{2\gamma+1} = o\,[\omega_2(1/m;\ t)]$, $\omega_2(1/m; t) = o\,(\lg m\,(\lg m/m)^{2\gamma+1}]$	$\varphi^{-1}(Cn)$
$\lg m\,(\lg m/m)^{2\gamma+1} = o\,[\omega_2(1/m;\ t)]$	$n^{1/(2\gamma+2)} \lg n$

Таблица 2

Условия	Оценки для M_n
$\omega_2(1/m;\ t) = o\,[(\lg m)^{1-\gamma}/m]$	$[n(\lg n)^{1-\gamma}]^{1/2}$
$(\lg m)^{1-\gamma}/m = o\,[\omega_2(1/m;\ t)]$, $\omega_2(1/m;\ t) = o\,(\lg m)^{2-\gamma}/m]$	$\varphi^{-1}(Cn)$
$(\lg m)^{2-\gamma}/m = o\,[\omega_2(1/m;\ t)]$	$[n(\lg n)^{2-\gamma}]^{1/2}$

В случае нуля экспоненциального характера

$$p(x) = \exp\{-1/(1+x)^{\gamma}\} p_1(x), \quad \gamma > 0, \quad x \in [-1, -1+\eta] \quad (12)$$

находим по (7) оценку $\delta_m \leqslant C_{12} m^{-1/(2\gamma+1)}$, окончательная оценка для степени точности M_n снова такова: $M_n \leqslant \varphi^{-1}(Cn)$.

VII. В заключение заметим следующее: мы нашли оценку M_n, рассматривая поведение весовой функции $p(x)$ вблизи точки $x = -1$; надо найти аналогичную оценку M_n' из рассмотрения ее поведения вблизи точки $x = +1$, а затем взять меньшую из величин M_n и M_n'.

Поступило
17 IX 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, 14, № 6 (1937). [2] Н. И. Ахиезер, Журн. Инст. матем. АН УССР, № 3 (1937). [3] Я. Л. Геронимус, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 3, 529 (1963). [4] J. Shohat, Ann. Math., 18, 201 (1939). [5] P. Erdös, P. Turan, Ann. Math., 39, № 4 (1938). [6] G. Freud, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 4, № 3—4 (1953).