Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 2

УДК 517.54

МАТЕМАТИКА

И. С. ОВЧИННИКОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 29 V 1969)

1. В данной заметке формулируются результаты, установленные на основе неравенства (1) из работы ([1]).

Будем рассматривать семейство $\{f\}$ гомеоморфных отображений $y = f(x)$, определенных в области D n-мерного эвклидова пространства E^n (если не будет оговорено противное). Обозначим

$$I(f, D, F) = \int_D F\left(x, f, \frac{df}{dx}\right) dx \tag{1}$$

функционал, заданный на отображениях семейства $\{f\}$, причем в (1) $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $df / dx = (\partial f_i / \partial x_j)$ есть $n \times n$-матрица, элементами которой являются частные производные, понимаемые в смысле С. Л. Соболева, $F(x, y, Z)$ — измеримая функция своих $2n + n^2$ аргументов, $Z = (z_{ij})$ есть $n \times n$-матрица.

Ниже будут использоваться следующие обозначения: $\rho(M_1, M_2)$ — расстояние между множествами в E^n; $|x' - x''|$ — расстояние между точками в E^n; $\overline{M}$ — замыкание множества M в E^n; ∂D — граница области D в E^n; $d(M)$ — диаметр множества M в E^n; $\overline{E}^n$ — пополнение n-мерного пространства по сферической метрике $\tilde{\rho}(x', x'')$; $d_{\sim}(M)$ — диаметр множества M в метрике $\tilde{\rho}$. Пусть в области D задана положительная непрерывная функция $h(x)$, которая порождает в D неэвклидову метрику с элементом длины $ds = h(x)dl$, где dl — элемент длины в E^n. Через $\rho_h(M_1, M_2)$ будем обозначать расстояние между множествами M_1 и M_2 в этой неэвклидовой метрике и через $d_h(M)$ — диаметр множества M в этой метрике.

2. Теорема 1. *Пусть для семейства отображений $\{f\}$ области D на область Δ ограничен функционал*

$$I(f, \Delta^{-1}, \Phi) = \int_\Delta \Phi\left(y, f^{-1}, \frac{df^{-1}}{dy}\right) dy \leqslant K,$$

где $\Phi(y, x, Z) \geqslant h^n(x) \|Z\|^n$, функция $h(x)$ определена, непрерывна и положительна в D, $\|Z\| = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ij}^2)^{1/2}$. Предположим, что существует континуум $H \subset D$ и число $\alpha > 0$ такие, что

$$d(f(H)) > 2\rho(f(H), \partial\Delta), \quad d(f(H)) \geqslant \alpha, \tag{2}$$

для всех $f \in \{f\}$.

Тогда

$$\rho(f(H), \partial\Delta) \geqslant \frac{\alpha}{2} \exp\left[-M_n K \rho_h^{-n}(H, \partial D)\right], \tag{3}$$

где M_n — абсолютная постоянная ($M_n > 0$).

Замечание. Неравенство (3) показывает, что для любой точки $a \in H$ при каждом отображении $f \in \{f\}$ шар радиуса $\frac{1}{2}\alpha \exp[-M_n K \rho_h^{-n} \cdot (H, \partial D)]$ с центром в точке $f(a)$ лежит целиком в области Δ.

Приведем для плоского случая некоторые достаточные условия для выполнения соотношений (2).

a) Пусть область D односвязна и на границе областей D и Δ фиксированы по три различных простых конца [2] e_i и e_i^*, причем $f(e_i) = e_i^*$ при каждом $f \in \{f\}$. Пусть a есть некоторая главная точка простого конца e_1. Предположим, что существует такая область $u_1 \subset D$, в которую входит простой конец e_1, и такая окрестность U_2 точки a в E^2, что для всех $f \in \{f\}$ имеет место неравенство

$$I(f, U_3, F) = \int\limits_{U_3} F\left(x, f, \frac{df}{dx}\right) dx \leqslant K < \infty, \tag{4}$$

где $U_3 = U_1 \cap U_2$, $F(x, y, Z) \geqslant h^2(y) \| Z \|^2$, и $h(y)$ — непрерывная в E^2 функция, порождающая метрику ρ_h, топологически эквивалентную сферической метрике. Пусть неравенство, аналогичное неравенству (4), выполняется и для простого конца e_2. Тогда существует континуум H, для которого выполняются неравенства (2).

b) Пусть на границе областей D и Δ фиксированы по три различных простых конца e_i и e_i^* $(i = 1, 2, 3)$ и пусть открытая дуга простых концов $\overset{\frown}{e_1 e_2}$, не содержащая e_3, переходит при каждом отображении $f \in \{f\}$ в дугу простых концов $\overset{\frown}{e_1^* e_2^*}$, не содержащую простого конца e_3^*. Предположим, что $f(e_3) = e_3^*$ при всех $f \in \{f\}$. Пусть в области D имеется кривая $L : x = \pi(t)$ $(0 < t < 1)$. Обозначим $E_\varepsilon = [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1/2)$. Пусть $f(\pi(t))$ равномерно по $f \in \{f\}$ стремится к e_3^* при $t \to 1$, и $f(\pi(t))$ равномерно по $f \in \{f\}$ стремится к дуге простых концов $\overset{\frown}{e_1^* e_2^*}$ при $t \to 0$. Тогда для достаточно малого ε континуум $\pi(E_\varepsilon)$ будет удовлетворять неравенствам (2).

3. Теорема 2. *Пусть имеется семейство $\{f\}$ квазиконформных отображений, каждое из которых есть гомеоморфизм области $D \subset E^2$ на полосу $\Delta = \{y : 0 < y_2 < \delta\}$. Пусть на границах областей D и Δ зафиксировано по три различных простых конца e_i и e_i^* $(i = 1, 2, 3)$, причем телом простых концов e_1^* и e_2^* является ∞, и тело простого конца e_3^* есть некоторая точка $a \in \partial\Delta$. Предположим, что $f(e_i) = e_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$ для всех $f \in \{f\}$. Пусть для всех $f \in \{f\}$ выполняется неравенство*

$$I(f^{-1}, \Delta, \Phi) \leqslant K,$$

где $\Phi(y, x, Z) = h^2(x) \|Z\|^2$, и $h(x)$ есть непрерывная положительная в области D функция, причем такая, что в некоторых подобластях g_i $(i = 1, 2, 3)$ из D, в каждую из которых входит по одному простому концу e_i $(i = 1, 2, 3)$, эта функция порождает метрику ρ_h, топологически эквивалентную сферической метрике. Рассмотрим область $G \subset D$, обладающую тем свойством, что множество $D \setminus G$ состоит из двух подобластей, причем в одну из них входит простой конец e_1, в другую e_2, и простой конец e_3 входит в область G. Тогда

$$\sup_{x \in G} |f(x) - a| \leqslant \delta \exp [2\pi K \beta^{-2}(G)]. \tag{5}$$

где $\beta(F) = \inf d_h(l)$ и $\inf$ берется по всевозможным кривым $l \subset D$ таким, что l отделяет e_3 от e_1 или от e_2 и множество $l \cap G$ не пусто.

Отметим, что при выполнении условий данной теоремы $\beta(G) > 0$, и неравенство (5) дает нетривиальную оценку порядка роста вплоть до границы для семейства отображений $\{f\}$.

4. Теорема 3. *Предположим, что $y = f(x)$ есть гомеоморфное отображение односвязной области $D \subset E^2$ на область Δ. Пусть граница области Δ содержит прямолинейный отрезок γ^* (конечный или бесконечный), лежащий на некоторой прямой l, параллельной оси Oy_1, и область Δ находится по одну сторону прямой l. Пусть некоторая дуга простых концов γ*

области D при отображении $y = f(x)$ переходит в γ^*, и пусть ограничен интеграл

$$\int\limits_D |\nabla f_2|^2 dx \leqslant K,$$

*где производные понимаются в смысле С. Л. Соболева. Рассмотрим семейство $\{S_r\}$ концентрических окружностей S_r радиусов r таких, что множество $S_r' = S_r \cap D$ не пусто при $r \in (0, r_2)$. Пусть из каждого множества S_r' выбрана компонента K_r, причем так, что концы дуги K_r лежат на дуге γ, и семейство $\{K_r\}$ определяет некоторый простой конец $e \in \gamma$ *. Обозначим через $\alpha(r) = \sup\limits_{y \in f(K_r)} \rho(y, \gamma^*)$ отклонение множества $f(K_r)$ от множества γ^* и предположим, что $\alpha(r)$ есть измеримая функция.*

Тогда выполняется неравенство

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\alpha^2(r)}{r} dr \leqslant 2\pi K. \tag{6}$$

5. Теорема 4. *Пусть $y = f(x)$ есть гомеоморфное отображение односвязной области $D \subset E^2$ на область Δ, лежащую в полосе $G = \{y : \delta_1 < y_2 < \delta_2\}$ $(\delta_i = \text{const})$. Пусть на границе области D взято два простых конца e_1 и e_2, разбивающих границу области D на две открытых дуги простых концов γ_1 и γ_2. Обозначим $\gamma_i^* = \{y : y_2 = \delta_i\}$ $(i = 1, 2)$ и предположим, что для любого простого конца $e \in \gamma_i$ $\rho(f(x), \gamma_i^*) \to 0$ при $x \to e$. Пусть ограничен интеграл*

$$\int\limits_g \frac{1}{(1 + |f|^2)^2} |\nabla f_1|^2 dx, \tag{7}$$

где g есть некоторая подобласть из D, в которую входит простой конец e_1, причем $q = \partial g \setminus \partial D$ есть сечение области D. Обозначим $G_{-\delta} = \{y \in G: y_2 \leqslant -\delta\}$, $G_\delta = \{y \in G: y_2 \geqslant \delta\}$, $R_\delta = \{y \in G: y_1 = \delta\}$.

Тогда возможны два случая: 1) существует такое число $E > 0$, что либо $G_{-E} \subset \Delta$, либо $G_E \subset \Delta$; 2) существует число E такое, что либо $G_{-E} \subset G \setminus \Delta$ и $R_{-E} \subset \partial\Delta$, либо $G_E \subset G \setminus \Delta$ и $R_E \subset \partial\Delta$.

Предположим теперь, что вместо ограниченности интеграла (7) имеет место ограниченность интеграла

$$\int\limits_g \frac{1}{(1 + |f|^2)^2} |\nabla f_2|^2 dx.$$

Обозначим через G_1 компоненту множества $G \setminus f(q)$, содержащую множество $f(g)$. Тогда множество $f(g)$ может быть получено из множества G_1 проведением конечного или счетного числа разрезов в G_1, идущих из бесконечности параллельно оси oy_1.

Замечание. Для конформного отображения $y = f(x)$ в условиях теоремы 4 область Δ будет всегда совпадать с полосой G. Следующий пример показывает, что случай 2) в теореме 4 действительно может иметь место. Пусть $D = \{x \in E^2: 0 < x_2 < 1\}$, $\Delta = \{y \in E^2: 0 < y_1, 0 < y_2 < 1\}$, $y_1 = f_1(x) \equiv e^{x_1}$, $y_2 = f_2(x) \equiv x_2$. При этом все условия теоремы 4 выполняются и интеграл (7) ограничен при $g = D_{-E}$, $E = 1$.

Теорема 5. *Предположим, что $y = f(x)$ есть гомеоморфное отображение односвязной области $D \subset E^2$ на область Δ. Пусть $\{S_r\}$ есть семейство концентрических окружностей таких, что множество $S_r' = S_r \cap D$ не*

---

* Семейство сечений $\{q_\tau\}$, $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$, определяет простой конец e области D, если для всякой последовательности чисел $\{\tau^{(n)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, строго монотонно сходящейся к τ_i $(i = 1$ или $i = 2)$, последовательность сечений $\{q_{\tau^{(n)}}\}$ определяет простой конец e.

пусто при $r \in (\tau_1, \tau_2)$, *причем* $\tau_1 = 0$, *если* $\tau_2 \neq +\infty$. *Предположим, что* $\{K_r\}$ *есть семейство сечений, определяющих некоторый простой конец* e *области* D, *причем* K_r *есть компонента множества* S_r'. *Пусть функция* $d(f(K_r))$ *есть измеримая функция переменного* r, *множество* $D_1 = \bigcup K_r$ *измеримо. Пусть ограничен интеграл* $I(f, D, F)$, *где* $F(x, y, Z) = u^2(x) \times \times (1 + |y|^2)^{-2}\|Z\|^2$, $u(x)$ *есть непрерывная положительная в* D *функция такая, что* $u(x) \to 0$ *при* $x \to e$, $\inf\limits_{x \in g/g_1} u(x) > 0$, *причем* g *есть некоторая подобласть, в которую входит простой конец* e, $g_1 \subset g$ — *любая подобласть, в которую входит простой конец* e.

Тогда для всякого сегмента $[r_1, r_2] \subset (\tau_1, \tau_2)$ *существует такое* $\bar{r} \in \in [r_1, r_2]$, *что*

$$d_{\tilde{\rho}}(f(K_{\bar{r}})) \leqslant [2\pi\varkappa(r_1, r_2) I(f, D_1, F)]^{1/2} \ln^{-1/2} r_2 / r_1, \tag{8}$$

где $\varkappa(r_1, r_2) = \sup\limits_{[r_1, r_2]} \beta(r) / \inf\limits_{x \in D_1} u^2(x)$, $\beta(r) = l(K_r) / \pi r$, $l(K_r)$ — *длина дуги* K_r.

Замечание. Неравенство (8) позволяет делать заключения о поведении отображения $y = f(x)$ в окрестности простого конца e, когда эта окрестность имеет вид «нулевого угла», «вершиной» которого является тело простого конца e.

Пример. Пусть для отображения $y = f(x)$ выполняются условия теоремы 5, пусть $u(x) = x_2^{\alpha}$, $-1 \leqslant \alpha < 0$ и область D лежит в верхней полуплоскости. Пусть простой конец e имеет своим телом ∞ и существует такая подобласть g, в которую входит простой конец e, что g содержится между двумя параллельными прямыми. Тогда с помощью неравенства (8) можно показать, что при отображении $y = f(x)$ простой конец e переходит в некоторый простой конец e^* области Δ.

Донецкий вычислительный центр
Академии наук УССР

Поступило
22 V 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Овчинников, ДАН, 187, № 1 (1969). [2] C. Caratheodory, Math. Ann., 73, 323 (1913).