Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 2

УДК 538.3

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

П. Ш. ФРИДБЕРГ

ТЕОРИЯ СЛАБОИЗЛУЧАЮЩИХ ЩЕЛЕЙ

(Представлено академиком А. В. Гапоновым-Греховым 4 VI 1969)

1. Пусть объемы *1* и *2* с бесконечно тонкими и идеально проводящими стенками связаны через узкую ($p = d / L \ll 1$, но $|\ln p| \sim 1$, L — характерный размер в задаче) щель (рис. 1), прорезанную далеко (на расстояниях, много бо́льших d) от изломов поверхности. В работе [1] величина $L \sim \lambda$, в работе [2] $L \sim l$, λ — длина волны в свободном пространстве. Используя стандартную процедуру сшивания полей, получим

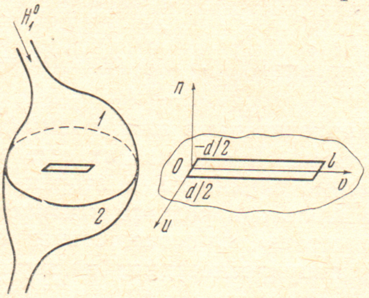

Рис. 1

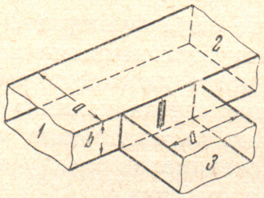

Рис. 2

для апертурного электрического поля $\mathbf{E}\{E_u, E_v\}$ векторное интегральное уравнение

$$\int\limits_{-d/2}^{d/2} du' \int\limits_0^l dv' \overleftrightarrow{\eta}(u, v; u', v') \cdot \mathbf{E}(u', v') = \mathbf{J}^0(u, v), \tag{1}$$

тензорное ядро которого складывается из входных адмитансов [3] $\overleftrightarrow{\eta}_1$ и $\overleftrightarrow{\eta}_2$ этих объемов

$$\overleftrightarrow{\eta} = \overleftrightarrow{\eta}_1 + \overleftrightarrow{\eta}_2, \tag{2}$$

а правая часть есть поверхностный электрический ток, возбуждаемый на «металлизированной» щели источниками в первом объеме

$$\mathbf{J}^0 = -\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1^0. \tag{3}$$

Интегральное уравнение (1) является фактически системой двух связанных интегральных уравнений

$$\begin{gathered}
\int\limits_{-d/2}^{d/2} du' \int\limits_0^l dv' \eta_{uu}(u, v; u', v') E_u(u', v') + \int\limits_{-d/2}^{d/2} du' \int\limits_0^l dv' \eta_{uv}(u, v; u', v') \times \\
\times E_v(u', v') = J_u^0(u, v), \\
\int\limits_{-d/2}^{d/2} du' \int\limits_0^l dv' \eta_{vu}(u, v; u', v') E_u(u', v') + \int\limits_{-d/2}^{d/2} du' \int\limits_0^l dv' \eta_{vv}(u, v; u', v') \times \\
\times E_v(u', v') = J_v^0(u, v).
\end{gathered} \tag{4}$$

Если $|J_u^0| \sim |J_v^0|$, то $|E_u| \gg |E_v|$ [1]. Здесь и в дальнейшем все рассуждения относительно компонент апертурного электрического поля справедливы всюду, за исключением малой области порядка d у концов щели. Пренебрегая E_v, получаем для E_u хорошо известное интегральное уравнение. Такую щель будем называть сильноизлучающей.

Если же $|J_u^0| \sim q|J_v^0|$, $q \ll 1$, то, как будет показано в дальнейшем, соотношение между E_u и E_v существенно зависит от соотношения малых параметров q и p. Такую щель будем называть слабоизлучающей, и для ее иследования необходимо рассмотреть систему (4).

2. Считая, что компоненты $J^0_{u.v}$ возбуждающего тока подчинены условиям

$$\left|\frac{\partial J^0_{u,\,v}/\partial u}{J^0_{u,\,v}}\right| \ll \frac{1}{d}, \quad \left|\frac{\partial J^0_{u,\,v}/\partial v}{J^0_{u,\,v}}\right| \lesssim \frac{1}{L}, \tag{5}$$

представим компоненты апертурного поля в виде

$$E_u(u,v) = \Phi(u)\,U(v), \quad \Phi(u) = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - u^2\right]^{-1/2}, \quad \int\limits_{-d/2}^{d/2} du\,\Phi(u) = 1,$$

$$E_v(u,v) = \Psi(u)\,Q(v), \quad \Psi(u) = \frac{8}{\pi d^2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - u^2\right]^{1/2}, \quad \int\limits_{-d/2}^{d/2} du\,\Psi(u) = 1. \tag{6}$$

Входящие сюда функции Φ и Ψ определены в зазоре ширины d между двумя полубесконечными плоскостями. Первая из них есть электрическое поле, когда плоскости разноименно заряжены, а вторая — функция тока в задаче «просачивания» через щель однородного статического магнитного поля, параллельного u. Нормировка Φ соответствует единичной разности потенциалов между этими полуплоскостями, а нормировка Ψ выбрана для удобства.

Домножая теперь первое уравнение (4) на $\Phi(u)$, а второе — на $\Psi(u)$ и интегрируя поперек щели, получим систему одномерных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^l dv'\,\overline{\eta}_{uu}(v,v')\,U(v') + \int\limits_0^l dv'\,\overline{\eta}_{uv}(v,v')\,Q(v') = \overline{J}^0_u(v),\\ &\int\limits_0^l dv'\,\overline{\eta}_{vu}(v,v')\,U(v') + \int\limits_0^l dv'\,\overline{\eta}_{vv}(v,v')\,Q(v') = \overline{J}^0_v(v), \end{aligned} \tag{7}$$

где вследствие узости щели

$$\overline{\eta}_{uu}(v,v') = \lim_{d\to 0}\int\limits_{-d/2}^{d/2} du \int\limits_{-d/2}^{d/2} du'\,\Phi(u)\,\eta_{uu}(u,v;u',v')\,\Phi(u'), \tag{8}$$

$$\overline{\eta}_{uv}(v,v') = \overline{\eta}_{vu}(v',v) = \lim_{d\to 0}\int\limits_{-d/2}^{d/2} du \int\limits_{-d/2}^{d/2} du'\,\Phi(u)\,\eta_{uv}(u,v;u',v')\,\Psi(u'), \tag{9}$$

$$\overline{\eta}_{vv}(v,v') = \lim_{d\to 0}\int\limits_{-d/2}^{d/2} du \int\limits_{-d/2}^{d/2} du'\,\Psi(u)\,\eta_{vv}(u,v;u',v')\,\Psi(u'), \tag{10}$$

$$\overline{J}^0_u(v) = \lim_{d\to 0}\int\limits_{-d/2}^{d/2} du\,J^0_u(u,v)\,\Phi(u) = J^0_u(0,v),$$

$$\overline{J}^0_v(v) = \lim_{d\to 0}\int\limits_{-d/2}^{d/2} du\,J^0_v(u,v)\,\Psi(u) = J^0_v(0,v). \tag{11}$$

Для вычисления этих пределов выделим в еще неусредненных компонентах ядра главную часть, обращающуюся в бесконечность при $r \to 0$

$[r = \sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}]$

$$\eta_{uu}(u, v; u', v') = -i\frac{\eta_0}{\pi k_0} L_v\left(\frac{1}{r} + F_1\right), \quad L_v = k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial v^2}, \tag{12}$$

$$\eta_{uv}(u, v; u' v') = -i\frac{\eta_0}{\pi k_0}\frac{\partial}{\partial u'}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r} + F_2\right), \tag{13}$$

$$\eta_{vv}(u, v; u', v') = -i\frac{\eta_0}{\pi k_0} L_u\left(\frac{1}{r} + F_3\right), \quad L_u = k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \tag{14}$$

и заметим, что согласно (4) величина $1/r$ должна интегрироваться с компонентами апертурного поля, существенный интервал изменения которых по $v' \sim L$, а по $u' \sim d$. Поэтому в интегральном смысле имеет место соотношение

$$\frac{1}{r} = -2\delta(v - v')\ln\frac{|u - u'|}{L} + F_4. \tag{15}$$

Здесь F_m $(m = 1, \ldots, 4)$ — регулярные функции, зависящие в пределах щели только от координат v и v'; η_0 — волновой адмитанс свободного пространства, $k_0 = 2\pi/\lambda$. Учитывая еще, что

$$L_u \sim \frac{\partial^2}{\partial u^2}, \qquad \int_{-d/2}^{d/2} du\, \Phi(u)\ln\frac{|u - u'|}{L} = \ln\frac{p}{4} = \text{const}, \tag{16}$$

находим окончательные выражения для усредненных элементов ядра

$$\bar{\eta}_{uu}(v, v') = i\frac{\eta_0}{\pi k_0}[2\ln p\, L_v\delta(v - v') + B(v, v')], \tag{17}$$

$$\bar{\eta}_{uv}(v, v') = \bar{\eta}_{vu}(v', v) = 0, \tag{18}$$

$$\bar{\eta}_{vv}(v, v') = i\frac{16}{\pi}\frac{\eta_0}{k_0}\frac{1}{d^2}\delta(v - v'). \tag{19}$$

Методы вычисления входящей сюда регулярной функции $B(v, v')$ приведены в работах [4, 5].

Исчезновение недиагональных элементов ядра приводит к распаду системы на два независимых уравнения

$$\int_0^l dv' \bar{\eta}_{uu}(v, v')\, U(v') = \bar{J}_u^0(v), \quad U(0) = U(l) = 0, \tag{20}$$

$$Q(v) = -i\frac{\pi}{16}\frac{k_0}{\eta_0} d^2 \bar{J}_v^0(v). \tag{21}$$

Таким образом, напряжение $U(v)$ на щели есть решение известного интегрального уравнения, а л о к а л ь н а я функция $Q(v)$ в каждой точке пропорциональна продольной компоненте возбуждающего тока.

Представляет интерес получить оценки для компонент апертурного поля на узкой щели. Используя (6), (20) и (21), находим: для сильноизлучающей щели $|E_v/E_u| \sim p^2$ и слабоизлучающей $|E_v/E_u| \sim p^2/q$. Если щель экспоненциально узкая $(|\ln p| \gg 1)$, но нерезонансная, то $|E_v/E_u| \sim p^2|\ln p|$ (а не $p|\ln p|$, как указано в работе [1]) в первом случае и $|E_v/E_u| \sim p^2|\ln p|/q$ — во втором.

3. В качестве примера найдем матрицу рассеяния $\|S\|$ щелевого тройника в H-плоскости (рис. 2). В возбуждающей H_{10}-волне отсутствует компонента магнитного поля вдоль щели, т. е. $J_u^0(u, v) \equiv 0$. Из уравнения (20) следует, что $U(v) \equiv 0$, поэтому такая щель не может стать резонансной. Она носит чисто индуктивный характер, ибо в ближних полях запасает больше магнитной энергии, чем электрической. Используя (21) и формулы возбуждения волноводов, находим

$$\|S - S^0\| = \left(\frac{\pi d}{4a}\right)^2 \frac{l}{b}\begin{Vmatrix} -i\Lambda/2a & -i\Lambda/2a & 2 \\ -i\Lambda/2a & -i\Lambda/2a & 2 \\ 2 & 2 & -i8a/\Lambda \end{Vmatrix}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}, \tag{22}$$

где $\|S^0\|$ — матрица рассеяния тройника при металлизированной щели.

Так как $J_v^0(v) = \text{const}$, то $\|S\|$ линейно зависит от l, а понятие коэффициента поляризуемости узкой щели, полученное в квазистатическом случае $\lambda \gg l \gg d$. остается справедливым и при $\lambda \sim l \gg d$. Матрица $\|S\|$ унитарна с точностью до членов порядка $o(p^2)$

$$\sum_{\nu} S_{m\nu} S_{n\nu}^{*} = \delta_{mn} + o(p^2), \tag{23}$$

так как при определении E_v удерживались лишь члены порядка p^2. В простейшем случае $l = b$ полученный результат совпадает с указанной выше точностью с результатом работы [6].

4. Пусть стенка, в которой прорезана щель, имеет конечную толщину $t \ll \lambda$. Введем в рассмотрение поверхности $S^{\pm}$, затягивающие выход из щели в объемы *1* и *2*, и представим апертурные поля на них в виде

$$E_u^{\pm}(u, v) = \Phi^{\pm}(u) U^{\pm}(v), \quad E_v^{\pm}(u, v) = \Psi^{\pm}(u) Q^{\pm}(v). \tag{24}$$

Здесь функции $\Phi^{+} = \Phi^{-}$, Ψ^{+} и Ψ^{-} нормированы на единицу и имеют указанный выше смысл для полуплоскостей конечной толщины t. В приближении узкой щели нет необходимости знать их явный вид, ибо представляющие практический интерес величины всегда содержат интеграл типа

$$\lim_{d\to 0} \int_{-d/2}^{d/2} du\, \varphi(u)\, \Phi^{\pm}(u) = \lim_{d\to 0} \int_{-d/2}^{d/2} du\, \varphi(u)\, \Psi^{\pm}(u) = \varphi(0), \tag{25}$$

где φ — медленно меняющаяся по u функция. Поэтому нашей задачей является отыскание $U^{\pm}$ и $Q^{\pm}$.

В работе [7] показано, что с точностью до членов порядка dt/λ^2 напряжения U^{+} и U^{-} равны и удовлетворяют уравнению (20) при замене d на d^{*}.

Вследствие условий (5) $E_v^{\pm}(u, v)$ в каждом поперечном сечении $v = v_0$ можно найти из решения соответствующей магнитостатической задачи. Это дает

$$Q^{\pm}(v) = [d^{\pm}/d]^2 Q(v), \text{ где } d^{\pm}/d = \sqrt{1 \pm k'^2}/\mathbf{E}(k), \tag{26}$$

а k есть решение трансцендентного уравнения

$$t/d = [\mathbf{K}(k') - \mathbf{E}(k')]/\mathbf{E}(k). \tag{27}$$

Здесь $\mathbf{K}$ и $\mathbf{E}$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, k и k' — их основной и дополнительный модули.

Величина d^{-} совпадает с введенной в работе [7] величиной d^{*}. Учитывая (26) и (27), для предельных случаев тонкой $(t/d \ll 1)$ и толстой $(t/d \gg 1)$ стенки получаем

$$\frac{d^{+}}{d} = \frac{d^{-}}{d} = 1 - \frac{1}{\pi}\frac{t}{d}\ln\frac{d}{t} + O\left(\frac{t}{d}\right), \qquad \frac{t}{d} \ll 1, \tag{28}$$

$$\frac{d^{+}}{d} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[1 + O\left(e^{-\pi\frac{t}{d}}\right)\right], \qquad \frac{t}{d} \gg 1, \tag{29}$$

$$\frac{d^{-}}{d} = \frac{8}{\pi e} e^{-\frac{\pi}{2}\frac{t}{d}}\left[1 + O\left(e^{-\pi\frac{t}{d}}\right)\right], \qquad \frac{t}{d} \gg 1. \tag{30}$$

Таким образом, в матрице рассеяния тройника (22) можно учесть толщину стенки волноводов. Для этого необходимо заменить в ее элементах, относящихся к разным объемам, d на d^{-}, а к одному объему — d на d^{+}.

В заключение приношу глубокую благодарность Б. З. Каценеленбауму, И. Б. Левинсону и Я. Н. Фельду за обсуждение работы.

Поступило
3 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Н. Фельд, Основы теории щелевых антенн, М., 1948. [2] A. F. Stevenson, J. Appl. Phys., 19, 1 (1948). [3] И. Б. Левинсон, С. С. Фел, П. Ш. Фридберг, ДАН, 153, №2 (1963). [4] И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг, ДАН, 158, № 5 (1964). [5] И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг, Радиотехника и электроника, 10, 2 (1965). [6] Справочник по волноводам, пер. с англ., М., 1951. [7] Х. Л. Гарб, И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг, Радиотехника и электроника, 13, 12 (1968).