Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 4

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Ю. А. БРУДНЫЙ

ПРОСТРАНСТВА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ВАРИАЦИЕЙ ЛОКАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(*Представлено академиком В. И. Смирновым 4 VI 1969*)

1. Семейство пространств, определяемых вариацией локальных приближений, получается с помощью очень простой конструкции. Тем не менее среди членов этого семейства имеется ряд постоянно используемых в анализе пространств (липшицевы, функции ограниченной вариации, соболевские и т. д.). Таким образом устанавливается несколько неожиданная связь между этими пространствами, в частности, из приводимых ниже теорем вытекает ряд новых свойств этих пространств. Отметим, что два представителя рассматриваемого семейства пространств изучались ранее Ф. Риссом (лемма Рисса, см. ([1]), стр. 85) и Ф. Йоном — Л. Ниренбергом ([2]).

2. Нам понадобится несколько определений. Ниже Q_0 обозначает фиксированный n-куб, а $Q \subset Q_0$ — параллельный ему куб. Пусть X — банахово пространство, элементами которого являются функции куба $I(Q)$, причем норма в X обладает тем свойством, что если $|I_1(Q)| \leqslant |I_2(Q)|$, $Q \subset Q_0$ и $I_2 \in X$, то $I_1 \in X$ и $\|I_1\| \leqslant \|I_2\|$. Пусть P есть проектор $L_p(Q_0) \to P_{k-1}$, где P_{k-1} — пространство многочленов степени $k-1$ (состоящее лишь из нуля при $k=0$), а P_Q — «пересадка» P на $L_p(Q)$ с помощью гомотетии, переводящей Q_0 в Q. Наконец, пусть

$$I_f^k(Q) = \left\{\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - Pf|^p dx\right\}^{1/p}. \qquad (1)$$

Определение. Пространство $\mathscr{L}_p{}^k(X)$ есть линейное множество функций f и $L_p(Q_0)$, для которых $I_f{}^k(Q) \in X$. В качестве нормы f в этом пространстве возьмем величину

$$\|f\|_{L_p(Q_0)} + \|I_f{}^k\|_X.$$

3. Выберем в качестве X пространство функций $I(Q)$, имеющих ограниченную вариацию в следующем смысле:

$$V(I;\ \Omega) = \sup\left\{\sum m(Q_s)\left|\frac{I(Q_s)}{\varphi(a_s)}\right|^q\right\}^{1/q} < +\infty \qquad (2)$$

для любого открытого $\Omega \subset Q_0$. Здесь sup взят по всем семействам $\{Q_s\}$ попарно неперекрывающихся кубов из Ω; a_s есть длина ребра Q_s и φ — мажоранта, т. е. монотонно неубывающая положительная на $(0, +\infty)$ функция, удовлетворяющая условию

$$\sup \frac{\varphi(2\tau)}{\varphi(\tau)} < +\infty.$$

Обозначим это пространство $V_q{}^\varphi$; его подпространство, состоящее из тех I, для которых (2) абсолютно непрерывна, обозначим $v_q{}^\varphi$.

Для формулировки первой теоремы обозначим

$$m_Q(f;\ \tau) = \operatorname{mes}\{x \in Q \,|\, |(f - P_Q f)(x)| > \tau\} \qquad (3)$$

и через $f_Q^*(\tau)$, $0 < \tau \leqslant m(Q)$, непрерывную справа функцию, обратную к (3).

Теорема 1. *Если $f \in \mathscr{L}_p^k(V_q^\varphi)$, $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$, то для любого $Q \subset Q_0$ со стороной a*

$$f_Q^*(\tau^n) \leqslant cV(I_f^k;\ Q) \int_\tau^a \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{1+n/q}}\, d\tau. \tag{4}$$

Из теоремы 1 при $k = 1$ и $\varphi = 1$ получаем известные результаты Йона — Ниренберга ([2]), а при $k = 1$ и $q = \infty$ — результат С. Спанне ([3]).

Следствие 1. *Если для некоторого $r \geqslant q$ определена функция $\bar{\varphi}(\tau) = \tau^\lambda \int_0^\tau \frac{\varphi(u)}{u^{1+\alpha}}\, du$, $\alpha = n(q^{-1} - r^{-1})$, то имеет место непрерывное вложение*

$$\mathscr{L}_p^k(V_q^\varphi) \subset \mathscr{L}_r^k(V_q^{\bar{\varphi}}).$$

В частности, если $p \leqslant r$ и φ — квазистепенная мажоранта, т. е. $\bar{\varphi} \leqslant \varphi$, то $\mathscr{L}_p^k(V_q^\varphi)$ изоморфно $\mathscr{L}_r^k(V_q^\varphi)$.

Следствие 2. *Все пространства $\mathscr{L}_p^k(V_q^\varphi)$, $1 \leqslant p < q$, изоморфны.*

Для формулировки второй теоремы предположим, что $\varphi(\tau) = \tau^s\psi(\tau)$, где $s \geqslant 0$ — целое меньшее k и ψ — модуль непрерывности. Положим

$$\bar{\psi}(\tau) = \int_0^\tau \frac{\psi(u)}{u}\, du + \tau \int_\tau^1 \frac{\psi(u)}{u^2}\, du, \tag{5}$$

причем при $s = k - 1$ второе слагаемое опустим.

Теорема 2. *Если $f \in \mathscr{L}_p^k(V_q^\varphi)$, $\varphi(\tau) = \tau^s\psi(\tau)$ и функция (5) существует, то для любого $\varepsilon > 0$*

$$f = g + h,$$

где h имеет носитель, мера которого меньше ε, а g принадлежит $C^{s,\bar{\psi}}$, причем

$$\sup_{|\alpha|=s} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha(g;\, x) - D^\alpha(g;\, y)|}{\bar{\psi}(|x - y|)} = O(\varepsilon^{-1/q})\, V(I_f^k;\ Q_0).$$

Замечание. Можно еще дать оценку более высоких разностей функции $D^\alpha g$ на множестве $Q_0 \setminus \operatorname{supp} h$.

4. Укажем связь между $\mathscr{L}_p^k(V_q^\varphi)$ и известными пространствами функций.

А. Соболевские пространства.

Теорема 3. *Пространство $\mathscr{L}_p^k(V_q^\varphi)$ при $\varphi(\tau) = \tau^k$, $1 < q \leqslant p$ и $k > n(q^{-1} - p^{-1})$ изоморфно пространству $W_q^k \cap L_p$.*

Замечание. При $k = n(q^{-1} - p^{-1})$ имеет место лишь собственное вложение в $W_q^k \cap L_p$.

При $n = 1$, $p = \infty$ и $k = 1$ получаем из теоремы 3 известную лемму Ф. Рисса (см. ([1]), стр. 85). Из теоремы 1 получаем теперь теорему вложения С. Л. Соболева ([4]) с некоторым уточнением на предельном показателе (ср. ([5])), а из теоремы 2 — некоторое новое свойство функций из соболевских пространств, состоящее в том, что после изменения на множестве малой меры они совпадают с функциями из $C^{k-1,1}$.

Б. Липшицевы пространства. В работах ([6–9]) показано, что если $\varphi(\tau) = \tau^{s+\alpha}$, $0 \leqslant s < k - 1$, $0 < \alpha < 1$, или $\varphi(\tau) = \tau^{s+\alpha}$, $s = k - 1$, $\alpha = 1$, то $\mathscr{L}_p^k(V_\infty^\varphi)$ изоморфно пространству $C^{s,\alpha}$. Из результатов работы ([9]) вытекает также, что если $0 < s \leqslant k - 1$ и $\alpha = 0$, то $\mathscr{L}_p^k(V_\infty^\varphi)$ изоморфно $C^{s-1,1-0}$, где пространство $C^{l,1-0}$ определено условием, что вторые разности шага h старших производных мажорируются величиной $O(|h|)$. Для $q < \infty$ имеем следующий результат.

Теорема 4. *Если $\varphi(\tau) = \tau^\alpha$, $0 < \alpha < k$, то при $p \leqslant q$ справедливы непрерывные вложения*

$$L_p \cap B_q{}^\alpha \subset \mathscr{L}_p{}^k(V_q{}^\varphi) \subset H_p{}^\alpha,$$

а при $q \leqslant p$ — вложения

$$B_p^\alpha \subset \mathscr{L}_p^k(V_q^\varphi) \subset H_q^\alpha \cap L_p.$$

Здесь $H_p{}^\alpha$, $B_p{}^\alpha$ — известные пространства С. М. Никольского и О. В. Бесова (см. обзор [10]*).*

В. Функции ограниченной вариации. При $\varphi(\tau) = \tau^{1/q}$ и $n = 1$ пространство $\mathscr{L}_\infty{}'(V_q{}^\varphi)$ изоморфно пространству функций q-ограниченной вариации в смысле Винера — Л. Юнга. Поэтому и при $n > 1$ функции пространства $\mathscr{L}_\infty{}'(V_q{}^\varphi)$, где $\varphi(\tau) = \tau^{u/q}$, естественно назвать функциями q-ограниченной вариации. Пространство $\mathscr{L}_1{}'(V_1{}^\varphi)$ при $\varphi(\delta) = \tau$ изоморфно пространству функций, имеющих ограниченную вариацию по Тоннели. Общее, имеет место

Теорема 5. *Пространство $\mathscr{L}_1{}^k(V_1{}^\varphi)$ при $\varphi(\tau) = \tau^k$ изоморфно пространству BV^k функций из $L_1(Q_0)$, у которых обобщенные k-производные — борелевские меры.*

Замечание. В то же время пространство $\mathscr{L}_1{}^k(v_1{}^\varphi)$, $\varphi(\tau) = \tau^k$, изоморфно пространству $W_1{}^k$.

5. Можно выбрать X в $\mathscr{L}_p{}^h(X)$ еще и так, чтобы получить любое липшицево пространство в смысле Кальдерона (см. [11]). В частности, можно получить пространства $H_p{}^\alpha$ С. М. Никольского или $B_p{}^\alpha{}_{,q}$ О. В. Бесова.

6. В заключение приведем одну интерполяционную теорему для операторов, действующих из шкалы L_p в пространстве $\mathscr{L}_p{}^k(X)$.

Пусть X_0, X_1 — два пространства функций куба $I(Q)$, описанные в п. 2. Обозначим через X_s, $0 < s < 1$, пространство тех функций $I(Q)$, для каждой из которых найдутся число λ и функции $I_i \in X_i$, $i = 0, 1$, такие, что

$$|I(Q)| \leqslant \lambda |I_0(Q)|^{1-s} |I_1(Q)|^s, \quad Q \subset Q_0. \tag{6}$$

Нижнюю грань λ из (6) при $\|I_i\|_{X_i} \leqslant 1$ возьмем в качестве нормы в X_s.

Теорема 6. *Пусть линейный оператор T непрерывно действует из L_{p_i} в $\mathscr{L}_{p_i}{}^k(X_i)$ и его норма есть α_i, $i = 0, 1$. Тогда T непрерывно действует из L_p в $\mathscr{L}_p{}^k(X_s)$, где $1/p = (1-s)/p_0 + s/p_1$, и его норма не превышает $\alpha_0{}^{1-s}\alpha_1{}^s$.*

Днепропетровский химико-технологический институт

Поступило 23 V 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Рисс, В. Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1964. [2] F. John, Z. Nirenberg, Comm. Pure Appl. Math., 14, 415 (1961). [3] S. Spanne, Ann. Scuola Norm. Super. Pica, 19, № 4, 593 (1965). [4] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [5] В. И. Юдович, ДАН, 138, № 3, 805 (1961). [6] S. Campanato, Ann. Scuola Norm. Super, Pisa, 17, 175 (1963). [7] N. Meyers, Proc. Am. Math. Soc., 15, 717 (1964). [8] S. Campanato, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 18, № 1, 137 (1964). [9] Ю. А. Брудный, Исследования по теории локального наилучшего приближения, Диссертация, Днепропетровск, 1965. [10] С. М. Никольский, УМН, 16, № 5 (101), 63 (1961). [11] A. P. Calderon, Studia Math., 24, 113 (1964).