Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 5

УДК 531.51

ФИЗИКА

Л. П. ГРИЩУК

О ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ ТЯГОТЕНИЯ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 28 V 1969)

Будем называть метрику пространственно однородной (п.о.), если она допускает просто- или кратно-транзитивную группу движений C_r $(r \geqslant 3)$, действующую на пространственноподобных гиперповерхностях. Такое определение часто встречается в литературе [1-3], хотя и не вполне оправдано с физической точки зрения [3]. Рассмотрим случай $r = 3$. Метрики, удовлетворяющие указанным требованиям, известны. Обычно выбирают полугеодезическую (синхронную) систему координат, в которой гиперповерхности транзитивности имеют уравнения $x^0 = \mathrm{const}$, а каждая компонента векторов Киллинга ξ^i является самое большее функцией x^1, x^2, x^3. Тогда метрики, полученные в результате интегрирования уравнений Киллинга, могут быть записаны в виде [1, 2] *

$$ds^2 = dx^{0^2} + g_{ik}\,dx^i\,dx^k = c^2\,dt^2 + \alpha_{ab}\overset{a}{e}_i\overset{b}{e}_k dx^i dx^k.$$

Здесь α_{ab} — произвольные функции от t, $\underset{a}{e}^i$ — векторы Киллинга группы $\bar{G}_3$, взаимной с данной [4]. Величины $\overset{a}{e}_i$ определены соотношениями $\overset{a}{e}_i\underset{a}{e}^k = \delta_i^k$, $\overset{a}{e}_i\underset{b}{e}^i = \delta^a{}_b$. Для каждого из 9 типов вещественных неизоморфных структур [5,7] $\overset{a}{e}_i$ можно выбрать так, чтобы структурные постоянные $\bar{C}^a{}_{bc}$ из соотношений

$$\overset{a}{e}_{i,\,k} - \overset{a}{e}_{k,\,i} = \bar{C}^a{}_{bc}\overset{b}{e}_i\overset{c}{e}_k \tag{1}$$

совпадали со структурными постоянными $C^a{}_{bc}$ данной G_3 $(\underset{b}{\xi}^i{}_{,\,k}\,\underset{c}{\xi}^k - \underset{c}{\xi}^i{}_{,k}\underset{b}{\xi}^k = C^a{}_{bc}\underset{a}{\xi}^i)$. Вид операторов $\underset{a}{\xi}^i$ и $\overset{a}{e}_i$ приводится в приложении.

П.о. метрики, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна $R_{\mu\nu} = -\varkappa(T_{\mu\nu} - {}^1/{}_2 g_{\mu\nu}T)$, интенсивно изучаются в связи с их космологическими приложениями. В качестве тензора энергии — импульса среды чаще всего принимается

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)\,u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где ρc^2 и p — плотность энергии и давление; u_μ — компоненты скорости среды, имеющие в данном случае вид [2] $u_0 = n_0(t)$, $u_i = n_a(t)\overset{a}{e}_i$. Вообще говоря, u^i не равны нулю, т. е. используемая синхронная система координат не является сопутствующей среде. Однако в космологических задачах нас прежде всего интересует поведение среды — ее плотность, деформация, вращение и т. д., для чего удобно использовать сопутствующую систему отсчета (с.с.о.). А в тех случаях, когда отыскиваются решения, удовлетворяющие заранее поставленным требованиям (например, требованию определенной зависимости плотности от собственного времени τ элемента сре-

---

* Греческие индексы μ, ν, … пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские i, j, k, … — 1, 2, 3. «Реперные» индексы a, b, c, d, … пробегают значения 1, 2, 3. Запятая с индексом обозначает частное дифференцирование.

ды, что важно при расчете химического состава вещества), без использования с.с.о. практически невозможно обойтись. Целью статьи является вывод уравнений Эйнштейна в с.с.о. для всех типов п.о. метрик.

Существуют преобразования координат (содержащие 4 произвольные функции от t), оставляющие неизменным вид $\underset{a}{\xi}{}^i$ и уравнение $x^0 = \mathrm{const}$. Найдя эти преобразования, легко показать, что за счет выбора произвольных функций можно обратить все u^i в нуль, т. е. ввести с.с.о. Синхронность системы координат при этом нарушается. Предположим, что выбор с.с.о. сделан, и проинтегрируем уравнения Киллинга. В результате получим

$$g_{00} = \alpha_{00}, \quad g_{0i} = \alpha_{0a}\overset{a}{e}_i, \quad g_{ik} = \alpha_{ab}\overset{a}{e}_i\overset{b}{e}_k, \tag{3}$$

где $\alpha_{..}$ — произвольные функции от t. Имея в виду возможность непосредственной физической интерпретации величин, входящих в уравнения Эйнштейна, запишем эти уравнения в хронометрически инвариантной (х.и.) форме, предложенной Зельмановым [6]:

$$\begin{gathered} {}^*\dot{D} + D_{ik}D^{ik} + A_{ik}A^{ki} + {}^*\nabla_i F^i - F_i F^i = -{}^1\!/_2(\rho + U), \\ {}^*\dot{D}_{ik} - (D_{ij} + A_{ij})(D_k^{\,j} + A_{k\cdot}^{\,j}) + DD_{ik} - D_{ij}D_k^{\,j} + 3A_{ij}A_{k\cdot}^{\,j} + \\ + \frac{1}{2}({}^*\nabla_i F_k + {}^*\nabla_k F_i) - F_i F_k - C_{ik} = {}^1\!/_2(\rho h_{ik} + 2U_{ik} - U h_{ik}), \\ {}^*\nabla_k(h^{ik}D - D^{ik} - A^{ik}) + 2F_k A^{ik} = J^i, \end{gathered} \tag{4}$$

Постоянные c и $\varkappa$ равны 1; точка обозначает $\dfrac{\partial}{\partial t}$, а точка с $*$ обозначает $\dfrac{{}^*\partial}{\partial t}$. Х.и. величины и операторы (отмеченные $*$) выражаются через обычные операторы и метрику $g_{\mu\nu}$ следующим образом: $\dfrac{{}^*\partial}{\partial t} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{\partial}{\partial t}$; $\dfrac{{}^*\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^i} - \dfrac{g_{0i}}{g_{00}}\dfrac{\partial}{\partial t}$; метрический тензор $h_{ik} = -g_{ik} + g_{0i}g_{0k}/g_{00}$; тензор скоростей деформации $D_{ik} = {}^1\!/_2{}^*\dot{h}_{ik}$; вектор гравитационно-инерциальной силы $F_i = (1 - w)^{-1}(w_{,\,i} - \dot{V}_i)$; тензор угловой скорости вращения $A_{ik} = {}^1\!/_2(V_{k,\,i} - V_{i,\,k}) + {}^1\!/_2(F_i V_k - F_k V_i)$, где вспомогательные величины w, V_i определены посредством $g_{00} = (1 - w)^2$, $g_{0i} = -V_i(1 - w)$. Далее, тензор Риччи пространства

$$\begin{gathered} C_{lk} = H_{lk} - A_{ki}D_l^i - A_{li}D_k^i - A_{kl}D, \text{ где } H_{lk} = H_{lki\cdot}^{\;\;\;\;i}, \\ H_{lki\cdot}^{\;\;\;\;j}Q_j = ({}^*\nabla_{ik} - {}^*\nabla_{ki})Q_l - 2A_{ik}{}^*\dot{Q}_l; \end{gathered} \tag{5}$$

Q_l — произвольный вектор; ${}^*\nabla_i$ — оператор ковариантного дифференцирования, составленный по обычным правилам из метрики h_{ik} и $\dfrac{{}^*\partial}{\partial x^i}$. Наконец, $\rho = T_{00}(g_{00})^{-1}$, $J^i = T_0{}^i(g_{00})^{-1/2}$, $U^{ik} = T^{ik}$. Для тензора (2) и в с.с.о. $J^i = 0$, $U^{ik} = ph^{ik}$.

Для п. о. метрик (3) все рассмотренные векторные и тензорные величины можно «разложить» по векторам репера $\overset{a}{e}_i$ с коэффициентами, зависящими только от t. Например, $h_{ik} = \left(-\alpha_{ab} + \dfrac{\alpha_{0a}\alpha_{0b}}{\alpha_{00}}\right)\overset{a}{e}_i\overset{b}{e}_k = \gamma_{ab}(t)\,\overset{a}{e}_i\overset{b}{e}_k$. При помощи γ_{ab} перемещаются реперные индексы. Реперные компоненты величин D_{ik}, V_i, F_i, A_{ik}, C_{lk} обозначим соответствующими малыми буквами, тогда $d_{ab} = {}^1\!/_2{}^*\dot{\gamma}_{ab}$, $v_a = -\dfrac{\alpha_{0a}}{\sqrt{\alpha_{00}}}$, $f_a = -{}^*\dot{v}_a$, с учетом (1) $a_{ab} = {}^1\!/_2 v_c C^c_{\cdot ba} + {}^1\!/_2(f_a v_b - f_b v_a)$. Найдем, как c_{ab} выражаются через γ_{ab}, v_a, $C^a_{\ bc}$. В качестве Q_i в (5) подставим $\overset{d}{e}_i$. Введем обозначения $-\Gamma^d_{\ ac} =$

$= \underset{a}{e}^i \underset{c}{e}^{k*}\nabla_k \overset{d}{e}_i$. Тогда $\underset{a}{e}^i \underset{b}{e}^j \underset{c}{e}^k {}^*\nabla_{jk} \overset{d}{e}_i = -\Gamma^d{}_{ac\oplus b} + \Gamma^d{}_{gc}\Gamma^g{}_{ab} + \Gamma^d{}_{ag}\Gamma^g{}_{cb}$, где $\Gamma^d{}_{.ac\oplus b} = \underset{b}{e}^j {}^*\nabla_j \Gamma^d{}_{ac}$. Поскольку ${}^*\left(\overset{d}{e}_l\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$, то из (5) получаем

$$H_{ab} = H_{abc}{}^{c} = -2\Gamma^c{}_{a[b\oplus c]} + 2\Gamma^c{}_{d[b}\Gamma^d{}_{|a|c]} + 2\Gamma^c{}_{ad}\Gamma^d{}_{[bc]}, \tag{6}$$

где $X_{[a|b|c]} = {}^1/_2(X_{abc} - X_{cba})$. Искомые c_{ab} связаны с H_{ab} посредством

$$c_{ab} = H_{ab} - a_{bc}d_a{}^c - a_{ac}d_b{}^c - a_{ba}d. \tag{7}$$

Вычислим величины $\Gamma^c{}_{ab}$. Применяя оператор ${}^*\nabla_k$ к $\gamma_{ab} = \underset{a}{e}^i \underset{b}{e}_i$, получим $\Gamma_{abc} + \Gamma_{bac} = v_c{}^*\dot{\gamma}_{ab}$, а из определения $\Gamma^d{}_{ac}$ и (1) вытекает $\Gamma^d{}_{bc} - \Gamma^d{}_{cb} = C^d{}_{cb}$. Если использовать равенства, отличающиеся от этих циклической заменой индексов, то можно найти $-\Gamma_{abc} = {}^1/_2(C_{abc} + C_{bca} - C_{cab} - \overset{*}{v}_c\dot{\gamma}_{ab} - \overset{*}{v}_b\dot{\gamma}_{ac} + \overset{*}{v}_a\dot{\gamma}_{bc}$. После незначительных преобразований

$$-\Gamma^c{}_{ab} = {}^1/_2[C^c{}_{ab} + \gamma^{cd}(\gamma_{ag}C^g{}_{bd} + \gamma_{bg}C^g{}_{ad})] - v_a d^c_b - v_b d^c_a + v^c d_{ab}. \tag{8}$$

Так как $\Gamma^c{}_{ab}$ зависят только от t, то $\Gamma^c{}_{ab\oplus d} = v_d{}^*(\Gamma^c{}_{ab})^{\boldsymbol{\cdot}}$, и с учетом этого факта формулы (6)—(8) решают поставленную задачу. В приложении приведены $\bar{c}_{ab}$, вычисленные по (6)—(8) при условии $\alpha_{00} = 1$, $\alpha_{0a} = 0$. Введем еще обозначение ${}^*\nabla_i = \overset{c}{e}_i \square_c$. Нетрудно показать, что для всякой величины $X_{i\cdots}^{\cdots k} = x_{a\cdots}^{\cdots b}(t)\, \overset{a}{e}_i \cdots \underset{b}{e}^k$ имеет место ${}^*\nabla_j X_{i\cdots}^{\cdots k} = \overset{c}{e}_j \overset{a}{e}_i \cdots \underset{b}{e}^k \square_c \times x_{a\cdots}^{\cdots b}$, где $\square_c x_{a\cdots}^{\cdots b} = \overset{*}{v}_c (x_{a\cdots}^{\cdots b})^{\boldsymbol{\cdot}} - x_{d\cdots}^{\cdots b}\Gamma^d{}_{ac} - \ldots + x_{a\cdots}^{\cdots d}\Gamma^b{}_{dc}$.

Наконец, перейдем к собственнному времени посредством $d\tau = \sqrt{\alpha_{00}}dt$ (что эквивалентно выбору $\alpha_{00} = 1$) и выпишем уравнения (4) в с.с.о. в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений на функции от τ ($d/d\tau$ обозначено точкой):

$$\begin{gathered} \dot{d} + d_{ab}d^{ba} + a_{ab}a^{ba} + \square_a f^a - f_a f^a = -{}^1/_2(\rho + 3p), \\ \square_b(\gamma^{ab}d - d^{ab} - a^{ab}) + 2f_b a^{ab} = 0, \\ \dot{d}_{ab} - (d_{ac} + a_{ac})(d^c_b + a_{b\cdot}{}^{c}) + dd_{ab} - d_{ac}d^c_b + 3a_{ac}a_{b\cdot}{}^{c} + \\ + {}^1/_2(\square_a f_b + \square_b f_a) - f_a f_b - c_{ab} = {}^1/_2(\rho - p)\gamma_{ab}. \end{gathered} \tag{9}$$

Отметим, что из уравнений гидродинамики $\dot{\rho} + d(\rho + p) = 0$, $v_a\dot{p} = (\rho + p)f_a$, являющихся следствием (9), вытекает $f_a v_b - f_b v_a = 0$, т. е. $a_{ab} = {}^1/_2 v_c C^c{}_{ba}$. Кроме того, $v_a = -\alpha_{0a} = k_a \exp\int \frac{dp}{\rho + p}$, где k_a — произвольные постоянные.

Автор благодарит А. Л. Зельманова за обсуждение.

Приложение

Введем обозначение $X_a = \underset{a}{\xi}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \underset{a}{\xi}^i p_i$, определитель матрицы γ_{ab} обозначим γ, тогда:

Тип I. $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = p_3$, $\overset{1}{e}_i = (1, 0, 0)$, $\overset{2}{e}_i = (0, 1, 0)$; $\overset{3}{e}_i = (0, 0, 1)$, $\bar{c}_{ab} = 0$.

Тип II. $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = x^2p_1 - p_3$, $\overset{1}{e}_i = (1, x^3, 0)$, $\overset{2}{e}_i = (0, 1, 0)$, $\overset{3}{e}_i = (0, 0, 1)$, $\bar{c}^2_1 = \bar{c}^3_1 = \bar{c}^3_2 = 0$, $-\bar{c}^1_1 = \bar{c}^2_2 = \bar{c}^3_3 = \frac{1}{2\gamma}\gamma^2_{11}$.

Тип III. $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = x^1p_1 - p_3$, $\overset{1}{e}_i = (e^{x^3}, 0, 0)$, $\overset{2}{e}_i = (0, 1, 0)$, $\overset{3}{e}_i = (0, 0, 1)$, $\bar{c}^3_1 = \bar{c}^3_2 = 0$, $\bar{c}^2_1 = -\frac{1}{\gamma}\gamma_{11}\gamma_{12}$, $\bar{c}^1_1 = \bar{c}^3_3 = \gamma^{33} + \frac{1}{2\gamma}\gamma^2_{12}$, $\bar{c}^2_2 = -\frac{1}{2\gamma}\gamma^2_{12}$.

Тип IV. $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = (x^1 + x^2) p_1 + x^2 p_2 - p_3$, $\overset{1}{e}_i = (e^{x^3}, x^3 e^{x^3}, 0)$, $\overset{2}{e}_i = (0, e^{x^3}, 0)$, $\overset{3}{e}_i = (0, 0, 1)$, $\bar{c}^3_1 = \bar{c}^3_2 = 0$, $\bar{c}^2_1 = \frac{1}{\gamma}\gamma_{11}^2$, $\bar{c}^1_1 = 2\gamma^{33} - \frac{1}{2\gamma} \times \gamma_{11}(\gamma_{11} + 2\gamma_{12})$, $\bar{c}^2_2 = 2\gamma^{33} + \frac{1}{2\gamma}\gamma_{11}(\gamma_{11} + 2\gamma_{12})$, $\bar{c}^3_3 = 2\gamma^{33} + \frac{1}{2\gamma}\gamma_{11}^2$.

Тип V. $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = x^1 p_1 + x^2 p_2 - p_3$, $\overset{1}{e}_i = (e^{x^3}, 0, 0)$, $\overset{2}{e}_i = (0, e^{x^3}, 0)$, $\overset{3}{e}_i = (0, 0, 1)$, $\bar{c}_{ab} = 2\gamma^{33}\gamma_{ab}$.

Тип VI. $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = x^1 p_1 + q x^2 p_2 - p_3$, $\overset{1}{e}_i = (e^{x^3}, 0, 0)$, $\overset{2}{e}_i = (0, e^{q x^3}, 0)$, $\overset{3}{e}_i = (0, 0, 1)$, $\bar{c}^3_1 = \bar{c}^3_2 = 0$, $\bar{c}^2_1 = \frac{1}{\gamma}\gamma_{11}\gamma_{12}(q - 1)$, $\bar{c}^1_1 = \frac{1}{2\gamma}\gamma_{12}^2 \times (1 - q^2) + (1 + q)\gamma^{33}$, $\bar{c}^2_2 = -\frac{1}{2\gamma}\gamma_{12}^2(1 - q)^2 + q(1 + q)\gamma^{33}$, $\bar{c}^3_3 =$

$$= \frac{1}{2\gamma}\gamma_{12}^2(1 - q)^2 + (1 + q^2)\gamma^{33}, \text{ где } q \neq 0, 1.$$

Тип VII. $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = -x^2 p_1 + (q x^2 + x^1) p_2 + p_3$, $\overset{1}{e}_i = \left[e^{-{}^1\!/_2 q x^3}\left(q \sin\frac{p}{2}x^3 + p\cos\frac{p}{2}x^3\right), 2e^{-{}^1\!/_2 q x^3}\sin\frac{p}{2}x^3, 0\right]$, $\overset{2}{e}_i = \left[-2e^{-{}^1\!/_2 q x^3} \times \sin\frac{p}{2}x^3, e^{-{}^1\!/_2 q x^3}\left(-q\sin\frac{p}{2}x^3 + p\cos\frac{p}{2}x^3\right), 0\right]$, $\overset{3}{e}_i = (0, 0, 1)$, $q^2 < 4$, $p = \sqrt{4 - q^2}$, $\bar{c}^1_1 = \frac{1}{2\gamma}[\gamma_{22}^2 - (\gamma_{11} - q\gamma_{12})^2]$, $\bar{c}^2_2 = -\frac{1}{2\gamma}[\gamma_{22}^2 + (\gamma_{11} + q\gamma_{12})^2 - 2\gamma_{11}(\gamma_{11} + q\gamma_{22})]$, $\bar{c}^3_3 = \frac{1}{2\gamma}[-(\gamma_{11} + \gamma_{22} + q\gamma_{12})^2 + 2(\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + 2\gamma_{12}^2) + 2q^2\gamma_{11}\gamma_{22}]$, $\bar{c}^3_1 = \bar{c}^3_2 = 0$, $\bar{c}^2_1 = -\frac{1}{\gamma}[\gamma_{12}(\gamma_{11} + \gamma_{22}) - q\gamma_{11}\gamma_{22}]$.

Тип VIII. $X_1 = p_2$, $X_2 = x^2 p_2 + p_3$, $X_3 = e^{x^3} p_1 + x^{2^2} p_2 + 2x^2 p_3$, $\overset{1}{e}_i = (1, x^1 e^{-x^3}, -x^1)$, $\overset{2}{e}_i = (0, -2x^1 e^{-x^3}, 1)$, $\overset{3}{e}_i = (0, e^{-x^3}, 0)$, $\bar{c}^2_1 = -2\bar{c}^3_2 = -4\left(\gamma^{23} + \frac{1}{\gamma}\gamma_{12}A\right)$, $\bar{c}^3_1 = -2\left(2\gamma^{33} - \frac{1}{\gamma}\gamma_{11}A\right)$, $\bar{c}^1_1 = \bar{c}^3_3 = -2\left(2\gamma^{13} - \frac{1}{\gamma}\gamma_{22}A\right)$, $\bar{c}^2_2 = 2\left[\gamma^{22} - \frac{1}{\gamma}(\gamma_{22} + \gamma_{13})A\right]$, где $A = \gamma_{22} - \gamma_{13}$.

Тип IX. $X_1 = p_2$, $X_2 = \cos x^2 p_1 - \operatorname{ctg} x^1 \sin x^2 p_2 + \frac{\sin x^3}{\sin x^1} p_3$, $X_3 = -\sin x^2 p_1 - \operatorname{ctg} x^1 \cos x^2 p_2 + \frac{\cos x^2}{\sin x^1} p_3$, $\overset{1}{e}_i = (\cos x^3, \sin x^3 \sin x^1, 0)$, $\overset{2}{e}_i = (-\sin x^3, \cos x^3 \sin x^1, 0)$, $\overset{3}{e}_i = (0, \cos x^1, 1)$, $\bar{c}^2_1 = -2\gamma^{12} - \frac{1}{\gamma}\gamma_{12}A$, $\bar{c}^1_1 = \frac{1}{2\gamma}A^2 - B - \gamma^{11} - \frac{1}{\gamma}(\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2)$, где $A = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}$, $B = \gamma^{11} + \gamma^{22} + \gamma^{33}$, остальные компоненты $\bar{c}_a{}^b$ получаются циклической заменой индексов 1, 2, 3.

О некоторых геометрических свойствах рассмотренных метрик см. [3, 8].

Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга

Поступило
26 V 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. H. Taub, Ann. Math., 53, 3, 472 (1951). [2] E. Schücking, In: Gravitation, 1963. [3] Л. П. Грищук, Астр. журн., 44, 5, 1097 (1967). [4] Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947. [5] L. Bianchi, Lezioni sulla teoria dei gruppi contunui finiti di transformazioni sperri, Pisa, 1918. [6] А. Л. Зельманов, ДАН, 107, 6, 815 (1956); Тр. VI совещ. по вопросам космогонии, 1959. [7] А. З. Петров, Новые методы в общей теории относительности, «Наука», 1966. [8] G. F. R. Ellis, M. A. H. Maccalum, Comm. Math. Phys., 12, 108 (1969).