Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 5

УДК 517.5 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ЖУК

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ЧАСТНЫХ СУММ ЕЕ РЯДА ФУРЬЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 VI 1969)

В заметке рассматриваются вопросы, связанные со скоростью аппроксимации периодической непрерывной функции при помощи частных сумм ее ряда Фурье и сходимостью тригонометрических рядов.

1. Примем следующие обозначения и предположения. $\tilde{C}$ — пространство вещественных, непрерывных, 2π-периодических функций f с нормой $\| f \|_{\tilde{C}} = \| f \| = \max\limits_{-\infty<x<\infty} |f(x)|$. $\tilde{L}_q$ $(1 \leqslant q < \infty)$ — пространство вещественных, суммируемых с q-й степенью на $[-\pi, \pi]$, 2π-периодических функций с нормой

$$\| f \|_q = \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right\}^{1/q}.$$

Число p определяется формулой $p = q / (q-1)$.

Пусть функция $f \in \tilde{C}$. Через $E_n(f)$ обозначим ее наилучшие приближения тригонометрическими полиномами порядка не выше n в метрике $\tilde{C}$. Аналогично, если $f \in \tilde{L}_q$ $(1 \leqslant q < \infty)$, то $E_n(f)_q$ означают ее наилучшие приближения в метрике $\tilde{L}_q$. $\tilde{f}$ — функция, тригонометрически сопряженная к функции f. $\sigma(f)$, $S_n(f)$, $\sigma_n(f)$ — соответственно ряд Фурье функции f, частные суммы порядка n и суммы Фейера этого ряда:

$$\sigma(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

$$S_n(f) = S_n(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

$$\sigma_n(f) = \sigma_n(f, x) = \frac{S_0(f, x) + S_1(f, x) + \ldots + S_n(f, x)}{n+1}.$$

Пусть $f \in \tilde{C}$, $\rho_k(f) = \sqrt{a_k^2(f) + b_k^2(f)}$. Положим

$$K_n(f)_q = \begin{cases} \sup\limits_{k \geqslant n} \rho_k(f), & \text{если } q = 1, \\ \left\{ \sum\limits_{l=n}^{\infty} \rho_l^p(f) \right\}^{1/p}, & \text{если } 1 < q \leqslant 2 \quad (n = 1, 2 \ldots), \\ \| f - S_{n-1}(f) \|_q, & \text{если } 2 < q < \infty. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$K_{n+1}(f)_1 \leqslant \pi^{-1} E_n(f)_1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В силу теоремы Хаусдорфа — Юнга (см. ([1]), стр. 153) при $1 < q \leqslant 2$

$$K_{n+1}(f)_q \leqslant \pi^{-1/q} \| f - S_n(f) \|_q \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

$\omega(n, f)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — семейство функционалов, заданных на $\tilde{C}$ и обладающих следующими свойствами: 1) для любой $f \in \tilde{C}$ $\omega(n, f) \geqslant 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, 2) $\omega(n, f) = 0$ разве лишь для тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Символ $\frac{0}{0}$ всюду понимается как 0.

2. Теорема 1. *Пусть $f \in \tilde{C}$. Тогда*

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2} \ln\left(1 + n\left(\frac{K_{n+1}(f)_q}{\omega(n, f)}\right)^q\right) + 4\right\} E_n(f) + \omega(n, f)$$
$$(n = 1, 2, \ldots),$$

если $1 \leqslant q \leqslant 2$ и

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2} \ln\left(1 + n\left(\frac{K_{n+1}(f)_q}{\omega(n, f)}\right)^q\right) + 4\right\} E_n(f) + C(q)\,\omega(n, f)$$
$$(n = 1, 2, \ldots),$$

если $2 < q < \infty$, где постоянная $C(q)$, зависящая только от q, удовлетворяет неравенству

$$C(q) \leqslant \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^\infty \left(\frac{u - \sin u}{u^2}\right)^p du\right\}^{1/p} + 2.$$

Эта теорема усиливает классическую оценку А. Лебега (см. [2], стр. 198) и некоторые результаты Нэша и Сато (см. [3], стр. 299—302).

Замечание 1. В частности, в качестве $\omega(n, f)$ можно брать:

$$\omega(n, f) = E_n(f) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$\omega(n, f) = \omega_r(1/n, f) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$\omega(n, f) = \|f - U_n(f)\| \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $\omega_r(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции f порядка r, а $U_n(f)$ — метод аппроксимации, сопоставляющий каждой функции $f \in \tilde{C}$ тригонометрический полином порядка не выше n.

Замечание 2. При определении порядка аппроксимации функции суммами Фурье иногда бывает полезно оценки, доказанные в теореме 1, применять не к самой функции, а к первообразной от рассматриваемой функции, взятой без свободного члена. Порядок аппроксимации самой функции и ее сопряженной определяется в этом случае на основании следующих известных лемм:

Лемма А. *Пусть $f \in \tilde{C}$ такова, что $f' \in \tilde{C}$. Тогда*

$$\|f' - S_n(f')\| \leqslant 4E_n(f') + 10n\,\|f - S_n(f)\| \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Лемма В. *Пусть $f \in \tilde{C}$ такова, что $\tilde{f}' \in \tilde{C}$. Тогда*

$$\|\tilde{f}' - S_n(\tilde{f}')\| \leqslant 4E_n(\tilde{f}') + 10n\,\|f - S_n(f)\| \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Приведем некоторые следствия теоремы 1, а также результаты, получающиеся из сопоставления теоремы 1 с леммами А и В.

Следствие 1. *Пусть $f \in \tilde{C}$. Если при каком-нибудь фиксированном q $(1 \leqslant q < \infty)$:*

1) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, nE_n(f)\{1 + \ln(1 + n^{1+q}K_{n+1}^q(f)_q)\} < +\infty, \qquad (1)$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\|f - S_n(f)\| < +\infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\|\tilde{f} - S_n(\tilde{f})\| < +\infty;$$

2) $$\lim_{n\to\infty} nE_n(f)\{1 + \ln(1 + n^{1+q}K_{n+1}^q(f)_q)\} = 0, \qquad (2)$$

то

$$\lim_{n\to\infty} n\|f - S_n(f)\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n\|\tilde{f} - S_n(\tilde{f})\| = 0.$$

Следствие 2. *Пусть $f \in \tilde{C}$ такова, что $f' \in \tilde{C}$. Если при каком-нибудь фиксированном q $(1 \leqslant q < \infty)$*

$$\lim_{n\to\infty} nE_n(f)\ln(1 + nK^q_{n+1}(f')_q) = 0,$$

то ряд Фурье функции f' сходится равномерно на всей оси.

Этот признак равномерной сходимости, в частности, содержит в себе: признак Харди и Литтльвуда (см. [3], стр. 271), обобщающий признак Жордана, признак Р. Салема — С. Б. Стечкина (см. [3], стр. 293—296), обобщающий признак Дини — Липшица, признаки Сато (см. [3], стр. 299—302), соответствующую часть теоремы, приведенной в [2] на стр. 114, вытекающей из признака Лебега.

Следствие 3. *Пусть $f \in \tilde{C}$ такова, что при некотором фиксированном q $(1 \leqslant q < \infty)$*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, nK^q_{n+1}(f)_q < +\infty.$$

Тогда существует такая постоянная C, не зависящая от n, что

$$\| f - S_n(f) \| \leqslant CE_n(f)\{1 + |\ln E_n(f)|\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Следствие 4. *Пусть $f \in \tilde{C}$ такова, что*: 1) $f \in \operatorname{Lip} 1$; 2) *при каком-нибудь фиксированном q $(1 \leqslant q < \infty)$ выполнено* (1).

Тогда существует такая постоянная C, не зависящая от n, что $\| S_n(f') \| \leqslant C$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 2. *Пусть $f \in \tilde{L}_q$ $(1 < q < \infty)$ такова, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{1/q}E_n(f)_q < +\infty.$$

Тогда в точке x соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f, x) = f(x), \tag{3}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\,dt = f(x), \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f, x) = f(x) \tag{5}$$

эквивалентны, т. е. выполнение одного из соотношений (3) — (5) *влечет выполнение двух других.*

Замечание. Частный случай теоремы, когда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\rho_n(f) < +\infty$, установлен Харди и Литтльвудом (см. [3], стр. 271; [2], стр. 133).

Теорема 3. *Пусть функция $f \in \tilde{C}$.*

1) *Если*

$$\lim_{n\to\infty} n\| f - S_n(f) \| = 0, \tag{6}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \left\| S'_n(f, x) - \frac{n\left\{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x - \frac{1}{n}\right)\right\}}{2} \right\| = 0.$$

2) *Если*

$$\lim_{n\to\infty} n\| f - S_n(f) \| < +\infty, \tag{7}$$

то:

а) *соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} S'_n(f, x) = S < +\infty$$

влечет соотношение

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right\}=S;$$

б) *при условии, что* $f\in \mathrm{Lip}\,1$, *для любой функции* $g\in\tilde{L}$ *справедлива формула Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,f'(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(g)\,a_n(f')+b_n(g)\,b_n(f')\right).$$

Первое утверждение теоремы 3 усиливает теорему, приведенную в (2) на стр. 505—506 (см. также (3), стр. 183—185). Утверждение а) второй части теоремы усиливает соответствующий результат из теоремы, приведенной в (2) на стр. 505—506, и объединяет ее с соответствующей частью теоремы, помещенной в (2) на стр. 506—507. Утверждение б) усиливает результаты, относящиеся к формуле Парсеваля, приведенные в (3) на стр. 220—221.

Новгородский филиал
Ленинградского электротехнического института
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступило
19 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 2, М., 1965. [2] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, М., 1965. [3] Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, М., 1961.