Доклады Академии наук СССР
1970. Том 190, № 5

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

В. М. ЗОЛОТАРЕВ

НЕСКОЛЬКО НОВЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ НЕРАВЕНСТВ, СВЯЗАННЫХ С МЕТРИКОЙ ЛЕВИ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 30 VI 1969)

Расстояние Леви между двумя функциями распределения F и G, определяемое равенством

$$L(F, G) = \inf \{h:\ F(x-h) - h \leqslant G(x) \leqslant F(x+h) + h \ \text{для всех}\ x\},$$

как известно, естественно связано со слабой сходимостью распределений. Работы последнего времени, посвященные предельным теоремам для сумм независимых случайных величин, в которых условие предельной пренебрегаемости слагаемых не используется (см., например, ([1, 2])), продемонстрировали исключительную роль, которую играет в этой теории метрика Леви.

Вместе с тем использование метрики Леви в теории вероятностей долгое время было весьма ограниченным по чисто аналитическим соображениям, в первую очередь из-за недостатка сведений о ее связи с аппаратом характеристических функций. Ниже приводятся несколько неравенств, которые, на наш взгляд, будут способствовать повышению интереса специалистов к метрике Леви.

Обозначим f, g характеристические функции, соответствующие функциям распределения F и G.

Теорема 1. *Для любых функций распределения F, G и произвольных чисел $T > e$ справедливо неравенство*

$$L(F, G) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^T |f(t) - g(t)|\,\frac{dt}{t} + 2e\,\frac{\log T}{T}.$$

Обозначим $\mathfrak{S}$ множество всех функций распределения, сосредоточенных в интервале $(-{}^1/_2, {}^1/_2)$, и условимся далее обозначать θ-характеристические функции распределений $\Theta \in \mathfrak{S}$.

Пусть $\psi(x)$ — вещественная функция, определенная на положительной полуоси и обладающая свойствами:

1) $0 \leqslant \psi(x) \leqslant \psi(y)$ для $x \geqslant y$;
2) $\psi(xy) \leqslant \psi(x)\psi(y)$.

Положим

$$\Delta = \sup_{t>0} \psi(t)\,|f(t) - g(t)|, \tag{1}$$

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{|\theta(t)|}{t\psi(t)}\,dt. \tag{2}$$

Теорема 2. *Для любого числа $\varepsilon > 0$, любых функций распределения F, G и любой функции $\Theta \in \mathfrak{S}$ справедливо неравенство*

$$L(F, G) \leqslant \varepsilon + C\Delta\psi(\varepsilon). \tag{3}$$

Доказательство теорем 1, 2 опиралось на использование следующих неравенств.

Лемма. *Для любых функций распределения F, G, H и произвольных $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства*

$$0 \leqslant L(F, G) - L(F * H, G * H) \leqslant 2 \max(\varepsilon, H(-\varepsilon), 1 - H(\varepsilon)).$$

Следствие теоремы 2. *Если потребовать дополнительно существование и монотонность производной функции ψ, то правую часть (3) нетрудно минимизировать по ε. Именно, обозначим $\varphi(x)$ функцию, обратную к $-\psi'(x)$. Тогда*

$$L(F, G) \leqslant \varphi\left(\frac{1}{C\Delta}\right) + C\Delta\psi\left[\varphi\left(\frac{1}{C\Delta}\right)\right]. \tag{4}$$

Отметим два частных случая неравенства (4).

1°. Если $\psi(x) = x^{-r}$, где $r > 0$, то

$$L(F, G) \leqslant B\Delta^{1/(1+r)}; \quad B = (1 + 1/r)(rC)^{1/(1+r)}, \tag{5}$$

причем, как показывает элементарный пример,

$$F(x) = E(x); \quad G(x) = (1 - \varepsilon)E(x) + \varepsilon E(x - \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1$$

(E — единичное распределение), показатель $1/(1 + r)$ при Δ нельзя заменить большей постоянной.

В качестве функции Θ удобно брать N-кратную свертку равномерного распределения на $(-1/2N, 1/2N)$. Если выбирать такие функции, то для B нетрудно получить простую оценку

$$B < \frac{2}{r}(1 + r)^2\pi^{-1/(1+r)}. \tag{6}$$

При малых значениях r неравенство (5) становится мало эффективным, поскольку, как бы мы не выбрали функцию $\Theta \in \mathfrak{S}$, характеристическая функция которой участвует в построении C,

$$B \sim 1/\pi r, \quad \text{если } r \to 0.$$

Такое поведение B нельзя признать естественным, скорее всего это связано с методом. Отчасти такой недостаток оценки можно восполнить за счет выбора другого семейства функций ψ, например следующего.

2°. Выберем $\psi(x) = q^s(x)$, где $s > 1$ и

$$q(x) = \begin{cases} 2 - \log x, & \text{если } x < e, \\ 1/\log x, & \text{если } x \geqslant e. \end{cases}$$

Эта функция относится к числу рассматриваемых нами, но непосредственно использовать неравенство (4) здесь не удается по той причине, что для ψ не существует явной формы записи φ. Однако, если считать, что Δ достаточно мало, именно, что

$$Cr\Delta \leqslant \exp(3 - e - s),$$

то можно выписать уже в явной форме несколько более грубое чем (4) неравенство

$$L(F, G) \leqslant C\Delta\psi(C\Delta).$$

В качестве иллюстрации приведем полученные с помощью (5) два неравенства, представляющие на наш взгляд и самостоятельный интерес.

I. Пусть $K_F = \{F'\}$ — множество всевозможных компонент функции распределения F (включая сюда само F и вырожденные компоненты). Фиксируем распределение G и определяем $\mathfrak{A}_\varepsilon$ как множество тех распределений F, для которых $L(F, G) \leqslant \varepsilon < 1$. Образуем величину

$$\beta_G(\varepsilon) = \sup_{\mathfrak{A}_\varepsilon} \sup_{K_F} \inf_{K_G} L(F', G').$$

Известно (см. ([3])), что для любого закона распределения G $\beta_G(\varepsilon) \to 0$, если $\varepsilon \to 0$. Однако построение оценок величины β_G представляет собой очень сложную задачу. В том частном случае, когда $G = \Phi$ является стандартным нормальным распределением, автором было доказано ([3]) существование таких числовых положительных постоянных c_0, c_1, что *

$$c_0 \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2} < \beta_\Phi(\varepsilon) < c_1 \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/11}.$$

По-видимому, правильной оценкой величины β_Φ является оценка $\beta_\Phi(\varepsilon) \smile \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2}$. Неравенство (5) позволяет довольно простым приемом улучшить верхнюю оценку β_Φ.

Теорема 3. *Существует такая числовая положительная постоянная c_2, что*

$$\beta_\Phi(\varepsilon) < c_2 \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/8}.$$

II. Пусть $F = F_1 * F_2 * \ldots$ и $G = G_1 * G_2 * \ldots$ — какие-либо разложения функций распределения F и G в бесконечные композиции (компоненты при этом могут быть и вырожденными). Обозначим

$$\mu(k) = \sum_j \left| \int x^k d(F_j - G_j) \right|, \quad \text{где } k \text{ — целое} \geqslant 0,$$

$$\nu(r) = \sum_j \int |x|^r |d(F_j - G_j)|, \quad \text{где } r \text{ — вещественное} \geqslant 0,$$

$$\varkappa(r) = \sum_j \int |x|^{r-1} |F_j - G_j| dx, \quad \text{где } r \text{ — вещественное} \geqslant 1.$$

Теорема 4. *Если для некоторого целого неотрицательного m и какого-либо вещественного $r \geqslant 1$, $m \leqslant r \leqslant m+1$ выполняются условия*

1) $\mu(0) = \mu(1) = \ldots = \mu(m)$;

2) $\varkappa(r) < \infty$,

то имеет место неравенство

$$L(F, G) \leqslant D[\varkappa(r)]^{1/(1+r)}, \tag{7}$$

где

$$D = (1 + 1/r)(rCW)^{1/(1+r)} \text{ и } W = 1, \text{ если } m = 0,$$
$$W = (2m)^{m+1-r} / \Gamma(m+1), \text{ если } m \geqslant 1.$$

За счет специального выбора функции θ можно осуществить абсолютную оценку D. Именно,

$$D \leqslant 8{,}1.$$

Тот же пример, который был упомянут в связи с неравенством (5), показывает, что существуют такие распределения F и G, для которых

$$L(F, G) > \exp(-1/e)[\varkappa(r)]^{1/(1+r)}.$$

Заметим, что неравенство (7) позволяет получить аналогичное неравенство с использованием величины $\nu(r)$, поскольку для $r \geqslant 1$

$$r\varkappa(r) \leqslant \nu(r). \tag{8}$$

Неравенства между L и величинами $\varkappa$, ν, как легко заметить, осуществляют соотношения между метрикой Леви и метриками другого типа — средней метрикой с весом и вариацией с весом.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
20 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, 1960. [2] В. М. Золотарев, Теория вероятностей и ее применения, 12, 4 (1967). [3] В. М. Золотарев, Там же, **13**, 4 (1968).

* А. Г. Малошевский в своей кандидатской диссертации сумел несколько улучшить верхнюю оценку, заменив $1/11$ на $1/10$.